MAE 5871: Análise Espectral de Séries Temporais

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
pam@ime.usp.br
http://www.ime.usp.br/$\sim$ pam

Aula 6

12 de setembro de 2021

Sumário

Conceitos básicos

1. Vimos que uma função periódica, de quadrado integrável, admite uma representação em série de Fourier, que converge para a função, sob determinadas condições. Se a função não for periódica, mas de quadrado integrável, podíamos considerar a sua representação como uma integral de Fourier.
2. Considere, agora, um processo estocástico estacionário $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$, que pode ser complexo, com média suposta igual a zero e suponha inicialmente que $\mathcal{T} = \mathbb{R}$. Considere o conjunto de todas as trajetórias do processo. Pelo fato dele ser estacionário, segue-se que se considerarmos qualquer trajetória $X^{(j)}(t)$, teremos que ela não é de quadrado integrável e, portanto, não podemos definir a transformada de Fourier de $X^{(j)}(t)$. Do mesmo modo, essa trajetória não é periódica; portanto, não podemos considerar sua série de Fourier.
3. Pareceria, então, que não se poderia obter uma "representação espectral" para o processo. Contudo, o argumento heurístico que passamos a apresentar mostrará que podemos de fato efetuar a análise de Fourier (ou espectral) de um processo estacionário, sob determinadas condições.

Conceitos básicos

1. Considere uma realização particular do processo, que chamaremos simplesmente de $X(t)$, para simplificar a notação. Vamos lembrar que $X(t)$ é, agora, uma função não aleatória de t.
2. Defina a função

$$Y(t) = \begin{cases} X(t), \text{ se } -T \leq t \leq T \\ 0, \text{ se } |t| > T. \end{cases} \tag{1}$$

3. Para essa função, podemos definir a transformada de Fourier

$$F_Y(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} X(t) e^{-i\lambda t} dt, \tag{2}$$

com

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \tag{3}$$

Definição de espectro

1. Vemos, pois, que

$$|F_Y(\lambda)|^2 d\lambda \tag{4}$$

representa a contribuição à energia total daquelas componentes de $Y(t)$, com frequências em $(\lambda, \lambda + d\lambda)$.

2. Segue-se que

$$J^{(T)}(\lambda) = \frac{|F_Y(\lambda)|^2}{2T} \tag{5}$$

representa uma função densidade de potência de $Y(t)$.

3. Portanto,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{|F_Y(\lambda)|^2}{2T} \tag{6}$$

descreveria as propriedades espectrais de $X(t)$.

Espectro

1. O limite (6) depende da particular realização $X(t)$ do processo, de modo que se quisermos caracterizar as propriedades espectrais do processo estacionário $X(t)$, devemos tomar a média de $J^{(T)}(\lambda)$ sobre todas as realizações e considerar

$$f(\lambda) = \lim_{T\to\infty} E\{J^{(T)}(\lambda)\}, \tag{7}$$

quando esse limite existir.

2. Denominamos $f(\lambda)$ de função densidade espectral $X(t)$, ou simplesmente espectro de $X(t)$, se ele existir. Da interpretação de $J^{(T)}(\lambda)$ dada acima, vemos que $f(\lambda)$ representa a média das contribuições, das componentes de $X(t)$ com frequências em $(\lambda, \lambda + d\lambda)$, à potência total.

3. Não é difícil mostrar que

$$f(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} [1 - \frac{|\tau|}{2T}]\gamma(\tau)e^{-i\lambda\tau} d\tau, \tag{8}$$

onde $\gamma(\tau)$ é a função de autocovariância de $X(t)$.

Espectro

1. Uma condição suficiente para que o limite em (8) exista é

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)| d\tau < \infty, \tag{9}$$

ou seja, $\gamma(\tau) \to 0, |\tau| \to \infty$, indicando que valores do processo suficientemente afastados são fracamente correlacionados.

2. Se (9) estiver satisfeita, segue-se de (8) que

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau, \tag{10}$$

obtendo-se o espectro como a transformada de Fourier da função de autocovariância.

Espectro

1. A transformada inversa resulta

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda\tau} d\lambda. \tag{11}$$

2. Em particular, para $\tau = 0$ em (21), obtemos

$$\gamma(0) = Var\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda, \tag{12}$$

o que mostra que a variância do processo é uma "soma" de contribuições devidas às diversas componentes de frequências presentes em $X(t)$, sendo que as componentes com frequências em $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ contribuem para a variância com $f(\lambda)d\lambda$.

Espectro

Se tivermos um processo estacionário discreto $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, o argumento acima pode ser repetido, com somas substituindo integrais. Se

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty \tag{13}$$

estiver satisfeita, obtemos o espectro de X_t como

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k}, \; -\pi < \lambda < \pi. \tag{14}$$

Propriedades do espectro

1. *O espectro $f(\lambda)$, definido em (14), é limitado, não negativo, uniformemente contínuo, par e periódico, de período 2π.*

2. O fato que $f(\lambda)$ é limitado segue de (13) e $|f(\lambda)| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\gamma_k|$.
3. Como

$$|f(\lambda+\omega)-f(\lambda)| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|e^{-i(\lambda+\omega)k}-e^{-i\lambda k}||\gamma_k|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\gamma_k||e^{-i\omega k}-1|,$$

   vemos que o último termo tende a zero para $\omega \to 0$, independente de λ; logo, $f(\lambda)$ é uniformemente contínuo.
4. Como a f.a.c.v. é par, segue-se facilmente que o espectro também é par e, portanto, real. Que é periódico, de período 2π, segue do fato que $e^{-i2\pi k}=1$, k inteiro.
5. Quando $E\{J^{(N)}\} \to f(\lambda)$, $f(\lambda) \geq 0$, para $N \to \infty$ e $J^{(N)}(\lambda) \geq 0$, onde $J^{(N)}(\lambda)$ é a versão discreta de (8), baseada em observações $X_0, \ldots, X_{N-1}$ do processo.

Propriedades do espectro

1. Para processos contínuos, $f(\lambda)$ tem as mesmas propriedades anteriores, exceto que neste caso não é periódico.
2. No caso discreto, como $f(\lambda)$ tem período 2π, considere $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Sendo par, basta representá-lo graficamente no intervalo $[0, \pi]$, ou no intervalo $[0, 1/2]$, se a frequência for dada em ciclos por unidade de tempo.
3. Da definição de espectro no caso discreto, obtemos

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda \ , k = 0, \pm 1, \ \ldots \ . \tag{15}$$

Processos reais

1. Suponha, agora, que $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ seja real. Como $\gamma(\tau)$ é par, temos

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\lambda\tau) - i\text{sen}(\lambda\tau)]\gamma(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda\tau)\gamma(\tau)d\tau - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\lambda\tau)\gamma(\tau)d\tau$$

e, portanto, como a última integral se anula (pois o integrando é uma função ímpar), obtemos

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos(\lambda\tau)\gamma(\tau)d\tau. \tag{16}$$

3. De modo análogo, temos

$$\gamma(\tau) = 2 \int_{0}^{\infty} \cos(\lambda\tau)f(\lambda)d\lambda. \tag{17}$$

Processos reais

1. No caso de um processo discreto real, teremos, respectivamente,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos(\lambda k) = \frac{\sigma_X^2}{2\pi} \{1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(\lambda k)\}, \tag{18}$$

$$\gamma_k = 2 \int_0^{\pi} \cos(\lambda k) f(\lambda) d\lambda. \tag{19}$$

2. As condições (9) e (13) não necessitam estar, necessariamente, satisfeitas. Lembremos que o processo quase periódico é tal que sua f.a.c.v. não tende a zero, quando $|k| \to \infty$.
3. Em situações como esta será necessário introduzir o espectro do processo de outra maneira. Basicamente, a relação (11) entre o espectro e a f.a.c.v. continua válida, mas a integral será substituída por uma integral de Riemann-Stieltjes.

RE da facv

1. Vimos que um processo quase periódico é uma soma de componentes periódicas, da forma

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{i\lambda_k t}, \qquad (20)$$

e sua f.a.c.v. é dada por

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^2 e^{i\lambda_j \tau}, \qquad (21)$$

2. Essas duas relações são casos particulares das chamadas representações espectrais do processo $X(t)$ e da f.a.c.v. $\gamma(\tau)$, respectivamente.
3. Ambas constituem as relações de Wiener-Khintchine. Observe a semelhança de (21) com (11) e (15). Na realidade, essas relações são casos particulares de

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda), \qquad (22)$$

no caso contínuo e relação análoga (com limites de integração $-\pi$ e π) para o caso discreto.

RE da facv

1. Em (22), temos uma integral de Riemann-Stieltjes, de modo que essa se reduz a (11), no caso que $F(\lambda)$ for absolutamente contínua, com $dF(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$, e a (21), no caso em que $F(\lambda)$ for uma função em escada, com saltos nos pontos λ_j iguais a σ_j^2.
2. O fato importante é que, embora nem todo processo estacionário $X(t)$ seja uma soma de componentes harmônicas, como em (20), ele pode ser aproximado por tal soma. Ou seja, $X(t)$ pode ser obtido como um limite de somas do tipo $\sum_j Z_j e^{i\lambda_j t}$, tomando-se as frequências λ_j bem próximas entre si e as v.a. Z_j escolhidas de tal sorte que o limite seja $X(t)$.

RE da facv

1. Consideremos, então, um processo estocástico estacionário $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, real, de média zero e f.a.c.v. $\gamma(\tau)$, suposta contínua para todo τ.
2. **Teorema 1.** *Uma condição necessária e suficiente para que $\gamma(\tau)$ seja a f.a.c.v. de um processo estacionário é que*

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda), \tag{23}$$

para todo τ real, onde $F(\lambda)$ é uma função real, não decrescente e limitada.

3. Este teorema é denominado representação espectral de Bochner-Wiener-Khintchine, porque Wiener (1930) e Khintchine (1934) o provaram para classes de funções distintas, enquanto Bochner (1936) demonstrou um teorema geral para funções positivas definidas.

RE da facv

1. Dividindo ambos os membros de (23) por $\gamma(0)$, podemos escrever

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dG(\lambda) \tag{24}$$

   onde $G(\lambda)$ tem propriedades análogas às de $F(\lambda)$.

2. A função $F(\lambda)$ é definida a menos de uma constante e podemos supor $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = \gamma(0)$. Se considerarmos (24), supomos $G(-\infty) = 0$, $G(+\infty) = 1$, de modo que $G(\lambda)$ pode ser considerada uma função de distribuição. Usualmente, tomamos $F(\lambda)$ contínua à direita.

3. De (23), temos

$$\gamma(0) = Var\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda), \tag{25}$$

   que nos diz que a variância total do processo é determinada por $F(\lambda)$ e, portanto, fornece a distribuição espectral de $X(t)$ sobre o eixo das frequências.

FD espectral

1. Como $F(\lambda)$ tem o caráter de uma função de distribuição (f.d.), ela pode ser escrita na forma

$$F(\lambda) = a_1 F_d(\lambda) + a_2 F_c(\lambda) + a_3 F_s(\lambda), \tag{26}$$

para todo λ, onde a_1, a_2 e a_3 são constantes não negativas, com $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

2. $F_d(\lambda)$ é uma função em escada (a f.d. discreta), $F_c(\lambda)$ é absolutamente contínua (componente contínua da f.d. espectral) e $F_s(\lambda)$ é componente singular, com $F_s'(\lambda) = 0$ em quase toda a parte.

3. Para modelos de interesse prático, a última componente pode ser desprezada, de modo que

$$F(\lambda) = a_1 F_d(\lambda) + a_2 F_c(\lambda), \tag{27}$$

com a_1, a_2 não negativos e $a_1 + a_2 = 1$.

FD espectral

1. Em correspondência, a f.a.c.v. $\gamma(\tau)$ pode ser decomposta na forma
$$\gamma(\tau) = a_1\gamma_d(\tau) + a_2\gamma_c(\tau),$$
onde
$$\gamma_d(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF_d(\lambda)$$
e
$$\gamma_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF_c(\lambda).$$
2. A componente contínua é tal que
$$F_c(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_c(\alpha)d\alpha,$$
ou seja, $f_c(\lambda) = F_c'(\lambda)$, para todo λ. Como $F_c(\lambda)$ é não decrescente, $f_c(\lambda) \geq 0$, para todo λ.
3. A componente discreta $F_d(\lambda)$ está associada a uma função $p(\lambda) \geq 0$, para todo λ, e $p(\lambda) > 0$, para um conjunto discreto de frequências $\{\lambda_j\}$, de modo que $dF(\lambda) = 0$, exceto em λ_j e $dF(\lambda_j) = p(\lambda_j)$. Segue-se que
$$F_d(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} p(\lambda_j)$$

FD espectral

1. Vemos, então, de modo genérico, que a f.d. espectral é uma mistura de uma função em escada, com saltos iguais a $p(\lambda_j)$ nas frequências λ_j, e de uma função contínua, ambas não decrescentes.
2. Se a condição $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_c(\tau)| d\tau < \infty$ estiver satisfeita, então
$$f_c(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \gamma_c(\tau) d\tau.$$
3. Para obter os $p(\lambda_j)$ em função de $\gamma_d(\tau)$, considere
$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \gamma_d(\tau) e^{-i\lambda_k \tau} d\tau = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(\lambda_j) \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i\tau(\lambda_j - \lambda_k)} d\tau.$$

FD espectral

1. Mas

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\lambda\tau}\,d\tau = \begin{cases} 1, \text{ se } \lambda = 0 \\ \frac{\text{sen}(T\lambda)}{T\lambda}, \text{se } \lambda \neq 0, \end{cases}$$

   de modo que, quando $T \to \infty$,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\tau(\lambda_j-\lambda_k)}d\tau \to \begin{cases} 1, \text{se } \lambda_j = \lambda_k \\ 0, \text{se } \lambda_j \neq \lambda_k \end{cases}$$

   e obtemos, então, que

$$p(\lambda_k) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\gamma_d(\tau)e^{-i\lambda_k\tau}d\tau.$$

2. Se em (27), $a_1 = 1, a_2 = 0$, dizemos que $X(t)$ tem espectro puramente discreto. O processo quase periódico é um exemplo dessa situação. Nesse caso, como vimos, $\gamma(\tau)$ não tende a zero, quando $|\tau| \to \infty$.
3. Se $a_1 = 0, a_2 = 1$, então $X(t)$ tem espectro puramente contínuo; assim, $\gamma(\tau) \to 0$, quando $|\tau| \to \infty$. São exemplos o ruído branco discreto, os processos AR(p), MA(q), $ARMA$(p,q) e o processo linear geral.

FD espectral

1. Se $a_1 > 0, a_2 > 0$, então $X(t)$ tem espectro misto. Nesse caso, $\gamma_c(\tau) \to 0$, quando $|\tau| \to \infty$, mas $\gamma_d(\tau) \not\to 0$, quando $|\tau| \to \infty$. Um exemplo de tal processo é dado por

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\lambda_k t + \phi_k), \tag{28}$$

   que é um modelo adequado para muitas séries temporais reais.
2. Em (28), o primeiro termo do lado direito, $Y(t)$, digamos, é um *PLG*, com a suposição que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, e o segundo termo, $Z(t)$, digamos, é um processo harmônico. Supomos, ainda, que esses dois processos sejam não correlacionados. Segue-se que $Y(t)$ terá um espectro contínuo e $Z(t)$ terá um espectro discreto, de modo que $X(t)$ terá um espectro misto.

RE do processo

1. Passemos, agora, à representação espectral do processo estacionário $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$. No que segue, vamos supor que o processo seja contínuo em média quadrática.
2. **Teorema 2.** *Seja o processo $X(t)$, como o acima. Então, existe um processo estocástico $\{Z(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$, de incrementos ortogonais, tal que*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda), \tag{29}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O processo $Z(\lambda)$ tem as propriedades:

$$\text{(i) } E\{dZ(\lambda)\} = 0, \text{ para todo } \lambda;$$
$$\text{(ii) } E\{|dZ(\lambda)|^2\} = dF(\lambda), \text{ para todo } \lambda.$$

RE do processo

1. Este resultado é também denominado teorema espectral de Cramér.
2. O processo $\{Z(\lambda)\}$ é o processo espectral associado a $X(t)$.
3. O fato importante contido em (29) é que as amplitudes aleatórias $Z(\Delta\lambda)$, correspondentes a intervalos de frequências disjuntos, são não correlacionadas.
4. Há várias demonstrações do Teorema 2. Cramér (1950) usa métodos da teoria de espaços de Hilbert, enquanto que Kolmogorov (1941) obtém (29) como caso particular da teoria espectral de operadores unitários.
5. A demonstração dada no Apêndice A.3 do texto segue Yaglom (1962). Definimos uma função $Z(\lambda)$ de modo apropriado e demonstramos que $\{Z(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ é um processo com incrementos ortogonais. Depois, provamos que $E\{|X(t) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda)|^2\} = 0$.

Processos com tempo discreto

1. Consideremos, agora, um processo estacionário com tempo discreto $\{X_t, \ \ t \in \mathbb{Z}\}$. Como vimos, a frequência angular λ nesse caso varia entre $-\pi$ e π, de modo que o correspondente do Teorema 1 é o resultado seguinte, devido a Herglotz.
2. **Teorema 3.** *Uma condição necessária e suficiente para γ_k, $k \in \mathbb{Z}$, seja a f.a.c.v. de X_t é que*

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} dF(\lambda), \tag{30}$$

para todo $k \in Z$, na qual $F(\lambda)$ é uma função real, não decrescente e limitada.

2. Se a condição (13) estiver satisfeita, então $F(\lambda)$ é derivável, com $f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} dF(\alpha)$ e (30) fica

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda, \tag{31}$$

e a relação inversa é dada por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k} \ , \ -\pi \leq \lambda \leq \pi. \tag{32}$$

Processos com tempo discreto

O teorema seguinte dá a representação espectral de X_t no caso de tempo discreto.

Teorema 4. *Para um processo com tempo discreto, como o acima,*

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda), \tag{33}$$

na qual $\{Z(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi\}$ *é um processo com incrementos ortogonais com as propriedades (i) e (ii) do Teorema 2.*

Processos reais

1. Suponha, agora, que o processo $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ seja um processo estacionário real, isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ é uma v.a. real.
2. Então, para todo t, $X(t) = \overline{X(t)}$

$$\overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\overline{dZ(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\overline{dZ(-\lambda)},$$

   do que segue que $dZ(\lambda) = \overline{dZ(-\lambda)}$, para todo λ.
3. Consideremos os processos reais $U_0(\lambda)$ e $V_0(\lambda)$, tais que

$$dU_0(\lambda) = \mathcal{R}[dZ(\lambda)],$$

$$dV_0(\lambda) = \mathcal{I}[dZ(\lambda)],$$

   para todo λ. Então, $U_0(-\lambda) = U_0(\lambda)$, $V_0(-\lambda) = -V_0(\lambda)$ e podemos escrever

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\lambda t) + i\mathrm{sen}(\lambda t))[dU_0(\lambda) - idV_0(\lambda)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t) dU_0(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}(\lambda t) dV_0(\lambda).$$

Processos reais

1. Os processos $U(\lambda)$ e $V(\lambda)$ são definidos por
$$dU(\lambda) = 2dU_0(\lambda) = \{dU_0(\lambda) + dU_0(-\lambda)\},\ \lambda \neq 0,$$
$$dU(0) = dU_0(0),$$
$$dV(\lambda) = 2dV_0(\lambda) = \{dV_0(\lambda) - dV_0(-\lambda)\}.$$
2. Seguem-se as relações
$$E\{dU(\lambda)dU(\mu)\} = E\{dV(\lambda)dV(\mu)\}$$
$$= \begin{cases} 0, \text{se } \lambda \neq \mu \\ dG(\lambda), \text{se } \lambda = \mu, \end{cases} \tag{34}$$
$$E\{dU(\lambda)dV(\mu)\} = 0\ , \quad \text{para quaisquer } \ \lambda,\ \mu,$$
3. mostrando que $U(\lambda)$ e $V(\lambda)$ são processos ortogonais e ortogonais entre si. A função $G(\lambda)$ em (34) é tal que
$$\gamma(\tau) = \int_0^\infty \cos(\lambda\tau)dG(\lambda), \tag{35}$$
com $G(\lambda) = 2F(\lambda) + C$, C uma constante, e se (9) estiver satisfeita
$$G(\lambda) = \int_0^\lambda g(\alpha)d\alpha,$$
com $g(\lambda) = 2f(\lambda), \lambda > 0, g(0) = 0.$

Referências

Morettin, P. A. (2014). *Ondas e Ondaletas*. Segunda edição. São Paulo: EDUSP.

Morettin, P. A. and Toloi, C. M. C. (2018). *Análise de Séries Temporais*. Terceira Edição. São Paulo: Blucher.

Percival, D. and Walden, A. (1993). *Spectral Analysis for Physical Applications*. Cambridge.

Yaglom, A. M. (1962). *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions.* Englewood Cliffs: Prentice Hall