MAE 5871: Análise Espectral de Séries Temporais

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
pam@ime.usp.br
http://www.ime.usp.br/$\sim$ pam

Aula 4

31 de agosto de 2021

Sumário

Modelo MA

1. Dizemos que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é um processo de médias móveis de ordem q (denotado por MA (q)), se satisfizer à equação de diferenças

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \tag{1}$$

   na qual $\mu, \theta_1, \ \ldots, \theta_q$ são constantes reais e $\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$.

2. Segue-se que X_t é estacionário, de média μ, e como ε_t são não correlacionadas, podemos obter facilmente a variância do processo,

$$\sigma_X^2 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2). \tag{2}$$

3. A facv do processo é

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma^2(-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \ldots + \theta_q\theta_{q-\tau}), \text{ se } \tau = 1, \ \ldots, q \\ 0, \text{ se } \tau > q \\ \gamma_{-\tau}, \text{ se } \tau < 0. \end{cases} \tag{3}$$

fac

1. A f.a.c. do processo MA (q) é dada por

$$\rho_\tau = \begin{cases} \frac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \ldots + \theta_q\theta_{q-\tau}}{1+\theta_1^2+\ldots+\theta_q^2}, \text{se } \tau = 1, \ldots, q \\ 0, \text{ se } \tau > q \\ \rho_{-\tau}, \text{ se } \tau < 0. \end{cases} \tag{4}$$

2. Observamos, então, que a f.a.c.v. (ou a f.a.c.) de um processo MA (q) anula-se para $\tau > q$.

Modelo MA(1)

1. Em particular, para um processo $MA(1)$,
$$X_t = \varepsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}, \tag{5}$$
obtemos
$$Var(X_t) = \sigma_X^2 = \sigma^2(1+\theta^2),$$
$$\rho_\tau = \begin{cases} \frac{-\theta}{1+\theta^2}, \text{se } \tau = \pm 1, \\ 0, \text{se } |\tau| > 1. \end{cases} \tag{6}$$
2. Definindo-se o operador de médias móveis de ordem q por
$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q,$$
o modelo (1) pode ser escrito
$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t. \tag{7}$$
3. Em particular, para o processo $MA(1)$, temos $\theta(B) = 1 - \theta B$, de modo que podemos escrever
$$X_t = (1 - \theta B)\varepsilon_t$$
de onde, formalmente, segue
$$\varepsilon_t = (1-\theta B)^{-1} X_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \ldots) X_t.$$

Invertibilidade

1. Ou seja, podemos escrever

$$X_t = -\theta X_{t-1} - \theta^2 X_{t-2} - \ldots + \varepsilon_t, \tag{8}$$

se $|\theta| < 1$, para que a série do lado direito de (8) convirja.

2. Nessa equação, temos X_t escrito como um processo autorregressivo de ordem infinita. Dizemos que $|\theta| < 1$ é uma condição de invertibilidade para o processo $MA(1)$.

3. De modo geral, o processo (1) poderá ser escrito na forma

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \tag{9}$$

se a seguinte condição de invertibilidade estiver satisfeita: todas as raízes de $\theta(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário. Veja Box et al. (1994) para detalhes.

Invertibilidade

1. A relação (9) pode ser escrita

$$\pi(B)X_t = \varepsilon_t, \tag{10}$$

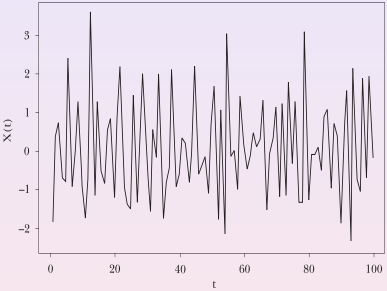
onde $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \ldots$, de modo que $\pi(B) = \theta(B)^{-1}$. Portanto, os coeficientes π_j podem ser obtidos a partir da identidade $\theta(B)\pi(B) = 1$.

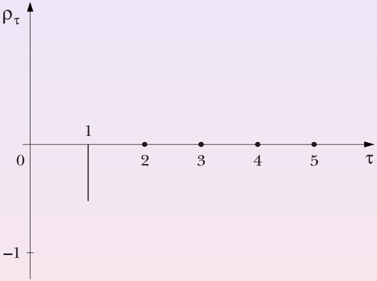
2. A Figura 1 apresenta 100 observações de um processo MA(1), gerado segundo o modelo

$$X_t = \varepsilon_t - 0,8\varepsilon_{t-1}\ , \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0,1). \tag{11}$$

Para esse processo, $\rho_1 = -0,49$, $\rho_\tau = 0, \quad \tau \geq 2$ e $\rho_{-\tau} = \rho_\tau$. Temos também, na figura, o gráfico da f.a.c. de X_t.

Exemplo MA





(a) (b)

Figura 1: (a) Valores gerados de um modelo MA(1) com $\theta = 0{,}8$.
(b) Função de autocorrelação.

Modelos ARMA

1. Um modelo autorregressivo e de médias móveis, de ordem (p, q), denotado por ARMA (p,q), é definido por

$$\begin{aligned} X_t - \mu &= \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \ldots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) \\ &\quad + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q}, \end{aligned} \tag{12}$$

onde $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$. Segue-se que a média do processo é μ.

2. Usando os operadores autorregressivos e de médias móveis, definidos anteriormente, podemos escrever (12) na forma

$$\phi(B)\tilde{X}_t = \theta(B)\varepsilon_t, \tag{13}$$

em que $\tilde{X}_t = X_t - \mu$. Suponha que, a partir de agora, $\mu = 0$.

Modelo ARMA (1,1)

1. Um modelo frequentemente usado é o ARMA (1,1), ou seja,
$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}. \tag{14}$$
2. É fácil ver, por substituições sucessivas, que podemos escrever
$$X_t = \psi(B)\varepsilon_t,$$
na qual $\psi_j = \phi^{j-1}(\phi - \theta)$, $j \geq 1$.
3. A condição de estacionariedade é a mesma que para um processo AR (1), ou seja, $|\phi| < 1$. Do mesmo modo, a condição de invertibilidade $|\theta| < 1$ vale aqui e implica que podemos escrever o processo na forma (10), com pesos $\pi_j = \theta^{j-1}(\phi - \theta)$, $j \geq 1$.

facv e fac

1. Para um processo $ARMA$(p,q) genérico a condição de estacionariedade é a mesma que para processos AR(p), ou seja, as raízes de $\phi(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário, e a condição de invertibilidade é a mesma que para processos MA(q), ou seja, as raízes de $\theta(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário.
2. Multiplicando-se (12), com $\mu = 0$, por $X_{t-\tau}$ e tomando-se esperanças, obtemos

$$\gamma_\tau = \phi_1\gamma_{\tau-1} + \phi_2\gamma_{\tau-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{\tau-p}\,, \quad \tau > q. \tag{15}$$

3. A conclusão é que as autocovariâncias (e, portanto, as autocorrelações que satisfazem equação similar) de lags $1, 2, \ \ldots, q$ serão afetadas pelos parâmetros de médias móveis, mas para $\tau > q$, elas comportam-se como nos modelos autorregressivos.

facv e fac

1. Para o caso do modelo ARMA (1,1), obtemos facilmente

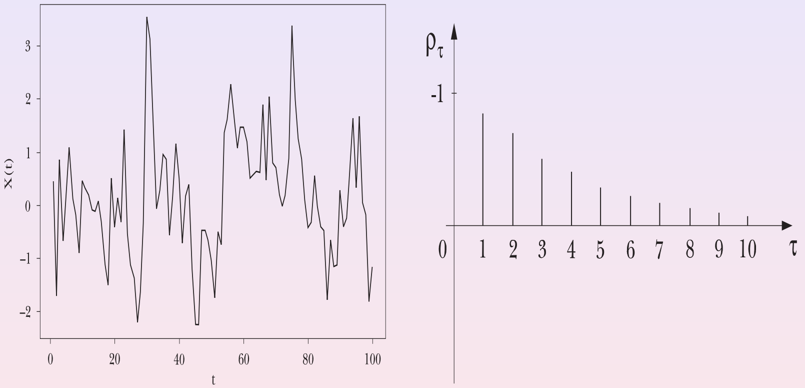
$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta}$$

e, para $\tau > 1$,

$$\rho_\tau = \phi\rho_{\tau-1}.$$

2. A Figura 2 apresenta 100 observações geradas de acordo com um processo ARMA (1,1), com $\phi = 0,8$, $\theta = 0,3$ e $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Na figura, temos também o gráfico da f.a.c.

Modelo ARMA (1,1)



(a) (b)

Figura 2: (a) Valores gerados de um modelo $ARMA(1,1)$ com $\phi = 0{,}8$ e $\theta = 0{,}3$; (b) Função de autocorrelação.

Modelo linear geral

1. Os exemplos AR, MA, ARMA são casos particulares do chamado modelo linear geral, que pode ser expresso na forma

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \tag{16}$$

no qual $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ e ψ_j são constantes satisfazendo $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$.

2. Essa condição é necessária para que a variância do processo seja finita e, neste caso,

$$\sigma_X^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2. \tag{17}$$

3. Também, vemos que $E\{X_t\} = 0$ e para $\tau > 0$,

$$\gamma_\tau = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j-\tau}, \tag{18}$$

admitindo-se que a série do segundo membro de (18). convirja para um valor finito.

4. Usando-se a desigualdade de Schwarz, obtemos que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Logo, essa é a condição de estacionariedade para o modelo linear..

Modelo quase-periódico

1. Considere o processo estocástico $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, definido por

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{i\lambda_k t}, \tag{19}$$

   na qual $Z_k = X_k + iY_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ são v.a. complexas.
2. Para que $X(t)$ seja um processo real é necessário que tenhamos $Z_{-k} = \overline{Z}_k$ e $\lambda_{-k} = -\lambda_k$. Vejamos sob qual condição o processo é estacionário.
3. Supondo que $E(Z_k) = 0$, $E\{|Z_k|^2\} = \sigma_k^2$ para todo k, temos que

$$E\{X(t)X(s)\} = \sum_j \sum_k E\{Z_j \overline{Z}_k\} e^{i\lambda_j t - i\lambda_k s},$$

   dado que o processo é real.

Modelo quase-periódico

1. Segue-se que

$$\gamma(t,s) = \sum_j \sigma_j^2 e^{i\lambda_j(t-s)} + \sum_{j\neq k}\sum E\{Z_j\overline{Z}_k\}e^{i\lambda_j t - i\lambda_k s};$$

   logo a autocovariância acima será um função de $|t-s|$ se $E\{Z_j\overline{Z}_k\} = 0,\ j \neq k$.

2. Assim, o processo é estacionário, com f.a.c.v.

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^2 e^{i\lambda_j \tau}, \tag{20}$$

   se

$$E\{Z_j\overline{Z}_k\} = 0\ , \quad j \neq k. \tag{21}$$

3. Dizemos que um processo $X(t)$ é *quase periódico* se ele puder ser escrito na forma (19) e as v.a. Z_j forem não correlacionadas, isto é, satisfizerem (21).

Referências

Morettin, P. A. (2014). *Ondas e Ondaletas*. Segunda edição. São Paulo: EDUSP.

Morettin, P. A. and Toloi, C. M. C. (2018). *Análise de Séries Temporais*. Terceira Edição. Blucher.

Percival, D. and Walden, A. (1993). *Spectral Analysis for Physical Applications*. Cambridge.