# MAE 5871: Análise Espectral de Séries Temporais

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
pam@ime.usp.br
http://www.ime.usp.br/∼ pam

## Aula 3

26 de agosto de 2021

# Sumário

## Definições

1. No caso de processos estocásticos, uma suposição normalmente feita é a de estacionariedade. Intuitivamente, um processo estocástico $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ é estacionário se ele se desenvolve no tempo, de modo que a escolha de uma origem dos tempos não seja importante. Em outras palavras, as características probabilísticas de $X(t+\tau)$, para todo $\tau \in \mathcal{T}$, são as mesmas de $X(t)$.
2. Duas formas de estacionariedade: fraca (ou ampla ou, ainda, de segunda ordem) e forte (ou estrita).
3. Um processo estocástico $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ diz-se estritamente estacionário se todas as suas distribuições finito dimensionais permanecem as mesmas sob translações do tempo, ou seja,

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1+\tau, \ldots, t_n+\tau) = F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n), \qquad (1)$$

para quaisquer $t_1, \ldots, t_n, \tau$ de $\mathcal{T}$.

## Definições

1. Isto significa, em particular, que todas as distribuições unidimensionais são invariantes sob translações do tempo; supondo-se que momentos de primeira e segunda ordem existam, a média $\mu(t)$ e a variância $\sigma^2(t)$ são constantes, isto é,
$$E\{X(t)\} = \mu(t) = \mu\,, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathcal{T}, \tag{2}$$
$$Var\{X(t)\} = \sigma^2(t) = \sigma^2\,, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathcal{T}. \tag{3}$$
2. Do mesmo modo, todas as distribuições bidimensionais dependem de diferenças de tempos. De fato, para $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$, $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 + t, t_2 + t)$ e fazendo $t = -t_2$, temos que
$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 - t_2, 0) = Cov\{X(t_1 - t_2), X(0)\}. \tag{4}$$
3. Na realidade, a covariância (4) é uma função de $|t_1 - t_2|$ e para isso basta fazer $t = -t_1$ acima.
Segue-se que podemos escrever a função de autocovariância de um processo estacionário forte ou estrito como
$$\gamma(\tau) = Cov\{X(t), X(t+\tau)\} = Cov\{X(0), X(\tau)\} \tag{5}$$
para $t, \tau \in \mathcal{T}$.

## Definições

1. Genericamente, de (1), segue-se que os momentos de ordem $n$ de $X(t)$, se existirem, dependem apenas das diferenças $t_j - t_1$, e são funções de $n-1$ argumentos.
2. É possível que momentos não existam, por exemplo, o caso de um processo de Cauchy, em que a média e variância não são finitas.
3. Como dissemos anteriormente, estaremos interessados em caracterizar os processos estocásticos por um número pequeno de funções de distribuição ou de momentos. Se nos restringirmos a momentos de primeira e segunda ordens, somos levados à seguinte definição:
4. Um processo estocástico $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ diz-se fracamente estacionário (ou estacionário de segunda ordem) se e somente se

   i) $E\{X(t)\} = \mu(t) = \mu$, *constante, para todo* $t \in \mathcal{T}$;

   ii) $E\{X^2(t)\} < \infty$, *para todo* $t \in \mathcal{T}$;

   iii) $\gamma(t_1, t_2) = Cov\{X(t_1), X(t_2)\}$ *é uma função apenas de* $|t_1 - t_2|$.

# Definições

1. A partir de agora, estaremos interessados principalmente nessa classe de processos, que denominaremos simplesmente de processos estacionários.
2. Note-se que, se $X(t)$ for estritamente estacionário, ele não necessita ser fracamente estacionário, pois a condição (ii) da definição 2.2 pode não estar satisfeita. Um processo tal que (ii) esteja satisfeita diz-se um processo de segunda ordem.
3. Um processo estocástico real $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ diz-se gaussiano se, para qualquer conjunto $t_1, \ldots, t_n$ de $\mathcal{T}$, as v.a. $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ têm uma distribuição normal n-variada.
4. Como um processo gaussiano, com variância finita, é determinado pelas médias e covariâncias, se ele for estacionário de segunda ordem, então será estritamente estacionário.

## Definições

1. No que segue usaremos a seguinte notação:
   se o parâmetro $t$ (tempo) for discreto, isto é, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots\}$, o processo será escrito $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, ao passo que se $t$ for contínuo, isto é, $t \in \mathbb{R}$, o processo será indicado por $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$.
2. A mesma convenção aplica-se aos momentos. Por exemplo, a função de autocovariância de um processo estacionário com tempo discreto será denotada por $\gamma_\tau$, ao passo que a de um processo com tempo contínuo será denotada por $\gamma(\tau)$.

# Propriedades da facv

1. Seja $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ um processo estacionário real, com tempo discreto, de média zero e função de autocovariância (facv) $\gamma_\tau = E\{X_t X_{t+\tau}\}$.
2. **Proposição 1.** A facv $\gamma_\tau$ satisfaz as seguintes propriedades:

   i) $\gamma_0 > 0$ ,
   ii) $\gamma_{-\tau} = \gamma_\tau$ ,
   iii) $|\gamma_\tau| \leq \gamma_0$ ,
   iv) $\gamma_\tau$ *é não negativa definida, no sentido em que*

   $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k \gamma_{\tau_j - \tau_k} \geq 0, \tag{6}$$

   *para quaisquer números reais* $a_1, \ldots, a_n$, *e* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *de* $\mathbb{Z}$.
3. A prova é fácil; ver o texto. Tipicamente, a facv de um processo estacionário tende a zero, para $|\tau| \to \infty$. Veja a Figura 1.

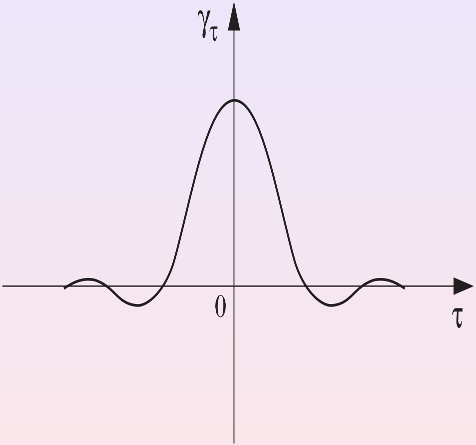



Figura 1: Comportamento típico da função de autocovariância de um processo estacionário.

# Função de autocorrelação

A função de autocorrelação (f.a.c.) do processo é definida por

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}, \quad \tau \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

e tem as propriedades de $\gamma_\tau$, sendo que $\rho_0 = 1$.

## Continuidade da facv

1. A continuidade de um processo estocástico tem que ser definida de maneira apropriada.
2. Seja $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ um processo de segunda ordem. Dizemos que $X(t)$ é contínuo em média quadrática no ponto $t_0$ se e somente se

$$\lim_{t \to t_0} E\{|X(t) - X(t_0)|^2\} = 0. \tag{8}$$

   Escreveremos $X(t) \to X(t_0)$ m.q ou $X(t) \stackrel{m.q}{\to} X(t_0)$.
3. A continuidade em m.q. de $X(t)$ está relacionada com a continuidade da f.a.c.v. $\gamma(\tau)$.

# Continuidade da facv

1. **Proposição 2.** A continuidade de $\gamma(\tau)$ para $\tau = 0$ implica a continuidade de $\gamma(\tau)$ para todo $\tau$.
   Prova: Usando a desigualdade de Schwarz para duas v.a., temos

$$|E\{[X(\tau+h) - X(\tau)][X(0)]\}|^2 \leq E\{|X(\tau+h) - X(\tau)|^2\}E\{|X(0)|^2\},$$

   que desenvolvida resulta

$$|\gamma(\tau+h) - \gamma(\tau)|^2 \leq 2\gamma(0)[\gamma(0) - \gamma(h)]$$

   e se $\gamma(\tau)$ for contínua na origem vem que, para $h \to 0$, o primeiro termo tende a zero e $\gamma(\tau)$ é contínua para todo $\tau$. $\square$

## Continuidade da facv

1. **Proposição 4.** Se $\gamma(\tau)$ for contínua, então $X(t)$ é contínuo em média quadrática.
2. Prova: Temos que

$$E\{|X(t+h) - X(t)|^2\} = 2\gamma(0) - 2\gamma(h)$$

e, para $h \to 0$, obtemos o resultado. $\square$

3. A continuidade de um processo em m.q. não implica que as trajetórias do processo sejam contínuas. Um exemplo ocorre com o processo de Poisson.

## Ergodicidade

1. Um conceito importante, mas difícil, é o de ergodicidade. Esperamos que, se a série temporal for suficientemente longa, a média amostral seja uma boa aproximação da média no *ensemble*, o mesmo valendo para outros parâmetros.
2. Formalmente, dizemos que $X_t$ é ergódico com respeito à média $\mu = E\{X_t\}$ se
$$\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} X(t,\omega) \stackrel{m.q.}{\rightarrow} \mu,$$
quando $m \to \infty$.
3. Ainda, $X_t$ é ergódico com respeito à autocovariância $\gamma_\tau$ se
$$\frac{1}{m-\tau}\sum_{t=1}^{m-\tau} X(t,\omega)X(t+\tau,\omega) \stackrel{m.q.}{\rightarrow} \gamma_\tau,$$
quando $m \to \infty$.

## ergodocidade

1. **Proposição 5.** O processo $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é ergódico com respeito à média $\mu$ se e somente se

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_\tau = 0.$$

2. Uma condição suficiente para que $X_t$ seja ergódico com respeito a $\mu$ é

$$\lim_{\tau\to\infty} \gamma_\tau = 0,$$

   e isso é satisfeito se as v.a.'s do processo separadas por $\tau$ são não correlacionadas, quando $\tau$ cresce.

3. Sejam $t$ e $\tau_0$ fixos e defina

$$\gamma_1(\tau) = E\{[X_{t+\tau_0+\tau} X_{t+\tau} - \gamma_{\tau_0}][X_{t+\tau_0} X_t - \gamma_{\tau_0}]\}.$$

   Se $X_t$ for estritamente ou fracamente estacionário, $\gamma_1(\tau)$ não depende de $t$. Então, temos o resultado seguinte.

# Ergodicidade

1. **Proposição 6.** *O processo* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *é ergódico com respeito a* $\gamma_\tau$ *se e somente se*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_1(\tau) = 0.$$

2. Uma condição suficiente para que $X_t$ seja ergódico com respeito a $\gamma_\tau$ é que

$$\lim_{\tau\to\infty} \gamma_1(\tau) = 0.$$

3. Também nesse caso, essa condição estará satisfeita se valores do processo suficientemente separados no tempo forem não correlacionados.

## Processos complexos

1. Em algumas situações é conveniente considerar processos estocásticos complexos, isto é, temos uma família $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$, onde para cada $t \in \mathcal{T}$, $X(t)$ é uma v.a. complexa. Ou seja, podemos escrever
$$X(t) = Y(t) + iZ(t),$$
em que $Y(t)$ e $Z(t)$ são processos estocásticos reais.
2. Nesse caso, $X(t)$ estará especificado se conhecermos as funções de distribuição das $2n$ v.a.'s reais $Y(t_1), \ldots, Y(t_n), Z(t_1), \ldots, Z(t_n)$, para qualquer conjunto de instantes de tempo $t_1, \ldots, t_n$ de $\mathcal{T}$.
3. Definimos a média de $X(t)$ por
$$E\{X(t)\} = E\{Y(t)\} + iE\{Z(t)\}, \tag{9}$$
e a variância por
$$Var\{X(t)\} = E\{|X(t) - E\{X(t)\}|^2\}. \tag{10}$$
Vemos, pois, que a média é um número complexo, mas a variância é um número real.

# Processos complexos

1. A f.a.c.v. de $X(t)$ é definida por

$$\gamma(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - E\{X(t_1)\}]\overline{[X(t_2) - E\{X(t_2)\}]}\}, \qquad (11)$$

   para $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$.

2. Se o processo complexo $X(t)$ for estacionário, então (9) e (10) serão constantes (a primeira complexa e a segunda real), e a f.a.c.v. (11) dependerá apenas de $|t_1 - t_2|$, de modo que podemos escrever

$$\gamma(\tau) = E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\}, \qquad (12)$$

   supondo a média zero. As propriedades de $\gamma(\tau)$, dadas pela Proposição 1, no caso real, são facilmente adaptadas para o caso complexo.

## Sequência aleatória

1. Consideremos $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ uma sequência de v.a. definidas no mesmo espaço amostral $\Omega$. Aqui, $\mathcal{T} = \{1, 2, \ldots\}$, e temos um processo com parâmetro discreto, ou uma sequência aleatória. Para todo $n \geq 1$, podemos escrever

$$P\{X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n\} = \tag{13}$$

$$= P\{X_1 = a_1\}P\{X_2 = a_2|X_1 = a_1\} \ldots P\{X_n = a_n|X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}\}. \tag{14}$$

2. Em (14), os $a_j$s representam estados do processo, e o espaço dos estados pode ser tomado como o conjunto dos reais. O caso mais simples é aquele em que temos uma sequência $\{X_n, n \geq 1\}$ de v.a. mutuamente independentes e, nesse caso, (14) fica

$$P\{X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\} \ldots P\{X_n = a_n\}. \tag{15}$$

# Ruído branco

1. Se as v.a. $X_1, X_2, \ldots$ tiverem todas a mesma distribuição, teremos, então, uma sequência de v.a. independentes e identicamente distribuídas (**i.i.d.**). Nesse caso, o processo $X_n$ é estacionário. Se $E\{X_n\} = \mu$, $\text{Var}\{X_n\} = \sigma^2$, para todo $n \geq 1$, então

$$\gamma_\tau = Cov\{X_n, X_{n+\tau}\} = \begin{cases} \sigma^2, \text{se } \tau = 0, \\ 0, \text{se } \tau \neq 0. \end{cases} \tag{16}$$

2. Segue-se que $\rho_\tau = 1$, para $\tau = 0$, e $\rho_\tau = 0$, caso contrário.

## Ruído branco

1. Dizemos que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é um ruído branco com tempo discreto se as v.a. $\varepsilon_t$ têm média zero, variância $\sigma^2$ e são não correlacionadas, isto é, $Cov\{\varepsilon_t, \varepsilon_s\} = 0, t \neq s$.
2. Esse processo é estacionário e a f.a.c.v. de $\varepsilon_t$ é dada por (16), com $\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2$.
3. Obviamente, se as v.a. $\varepsilon_t$ são independentes, elas também serão não correlacionadas. Uma sequência de v.a. *i.i.d.*, como definida acima, é chamada processo puramente aleatório.

- Notação:

$$\varepsilon_t \quad \sim \quad RB(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

# Passeio Aleatório

1. Considere uma sequência aleatória $\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$, de v.a. i.i.d. $(\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2)$. Defina a sequência
$$X_t = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_t. \tag{17}$$
2. Segue-se que $E(X_t) = t\mu_\varepsilon$ e $Var(X_t) = t\sigma_\varepsilon^2$, ou seja, ambas dependem de $t$.
3. Não é difícil mostrar que
$$\gamma_X(t_1, t_2) = \sigma_\varepsilon^2 \min(t_1, t_2)$$
e, portanto, a autocovariância de $X_t$ depende de $t_1$ e $t_2$.
4. O processo (17) é chamado passeio aleatório, e à medida que o tempo passa, $X_t$ tende a oscilar ao redor de $t\mu_\varepsilon$ com amplitude crescente. O processo é claramente não estacionário.
5. Observe que $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$; logo, dado o valor de $X_{t-1}$, o valor de $X_t$ dependerá apenas de $\varepsilon_t$. Como $\varepsilon_t = X_t - X_{t-1}$, esse processo apresenta incrementos independentes.

## Processo de Poisson

1. Suponha que estejamos interessados no número de eventos de certo tipo que ocorrem num intervalo de tempo $(0, t]$. Por exemplo, podemos contar o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central de atendimentos nesse intervalo, ou o número de partículas radioativas registradas por um contador Geiger etc. O intervalo $(0, t]$ não necessita ser um intervalo de tempo. Podemos estar interessados no número de defeitos de um fio a cada 100 m, ou no número de acidentes em um trecho de uma rodovia.
2. Denotando por $\{N(t), t \geq 0\}$ o número de eventos em $(0, t]$, dizemos que esse é um processo de Poisson com intensidade $\lambda$ se as condições seguintes forem satisfeitas:

(i) $N(0) = 0$;
(ii) para todas as escolhas de $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ em $(0, \infty)$, as v.a.'s $N(t_1) - N(t_0), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ são independentes;
(iii) para qualquer escolha de $t_1, t_2$ e $\tau$ positivos, as v.a.'s $N(t_2 + \tau) - N(t_1 + \tau)$ e $N(t_2) - N(t_1)$ têm a mesma distribuição;
(iv) para todos $s, t,\ s < t$, a v.a. $N(t) - N(s)$ tem uma distribuição de Poisson com média $\lambda(t - s)$, ou seja,

$$P\{N(t) - N(s) = k\} = \frac{e^{-\lambda(t-s)}[\lambda(t-s)]^k}{k!}, \qquad (18)$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

# Processo de Poisson

Segue-se que $E\{N(t) - N(s)\} = \text{Var}\{N(t) - N(s)\} = \lambda(t - s)$. O parâmetro $\lambda$ dá a taxa de ocorrência de eventos por unidade de tempo (ou outra medida). A Figura 2 ilustra uma trajetória típica de um processo de Poisson, que não é estacionário, mas tem *incrementos independentes e estacionários*. Temos que $\mu(t) = V(t) = \lambda t$ e $\gamma(t_1, t_2) = \lambda(t_1 \wedge t_2)$, com $t_1 \wedge t_2$ representando o mínimo entre $t_1$ e $t_2$.

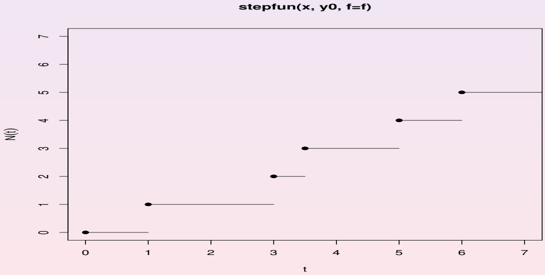



Figura 2. Trajetória típica de um processo de Poisson.

## Processo de Wiener

1. O movimento de uma partícula imersa num líquido foi analisada pelo botânico inglês Robert Brown, em 1827. O fenômeno foi estudado por A. Eisntein em 1905 e depois por N. Wiener e P. Lévy. Outros nomes usados para esse processo são Movimento Browniano e processo de Wiener-Lévy.
2. Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ a posição da partícula após $t$ unidades de tempo. O processo diz-se um **processo de Wiener** se:

   (i) $X(0) = 0$;
   (ii) para todo $t > 0$, $X(t) \sim N(0, t)$;
   (iii) o processo tem incrementos estacionários e independentes, no sentido de (ii) e (iii) do exemplo anterior

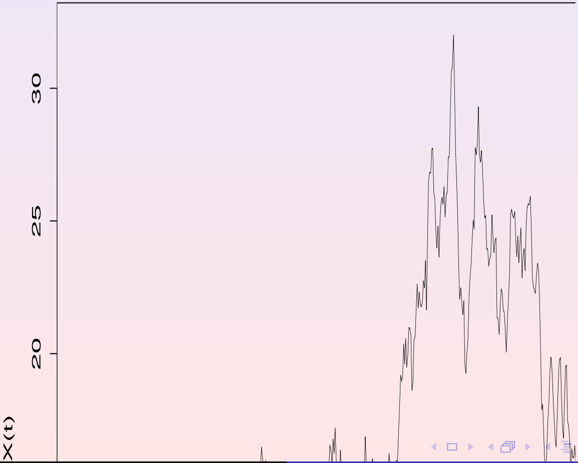
# Processo de Wiener

1. Para esse processo, $\mu(t) = 0$ e deixamos a cargo do leitor provar que $\gamma(t_1, t_2) = t_1 \wedge t_2$.
2. Também, o processo é gaussiano. De fato, como

$$\begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) - X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) \end{bmatrix}$$

   e como $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ são v.a.'s gaussianas independentes, então $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ tem uma distribuição gaussiana $n-$variada.
3. Uma realização típica de um proceso de Wiener é dada na Figura 3. A aparência é de uma curva serrilhada, e pode-se provar que, embora as trajetórias de um processo de Wiener sejam contínuas quase certamente, elas não têm derivadas em qualquer ponto.

# Processo de Wiener



## Processo autorregressivo

Dizemos que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é um processo autorregressivo de ordem $p$ e escrevemos $X_t \sim AR(p)$, se satisfizer à equação de diferenças

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t, \qquad (19)$$

onde $\mu, \phi_1, \ \ldots, \phi_p$ são parâmetros reais e $\varepsilon_t \ \sim \ RB(0, \sigma^2)$.

## Processo autorregressivo

Vamos definir o operador retroativo $B$, por $B^s X_t = X_{t-s}$, se $s \geq 1$. Então, (19) pode ser escrita

$$\phi(B)\tilde{X}_t = \varepsilon_t, \tag{20}$$

na qual $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$ é o operador autorregressivo de ordem $p$ e $\tilde{X}_t = X_t - \mu$. Suponha $\mu = 0$ de agora em diante.

# Processo AR(1)

1. Um caso particular importante é o processo $AR(1)$,
$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{21}$$
2. Aqui, $\phi(B) = 1 - \phi B$. Por substituições sucessivas, obtemos
$$X_t = \sum_{j=0}^{r} \phi^j \varepsilon_{t-j} + \phi^{r+1} X_{t-r-1}.$$
3. Se $X_t$ for estacionário, com variância finita $\sigma_X^2$, então
$$E[X_t - \sum_{j=0}^{r} \phi^j \epsilon_{t-j}]^2 = \phi^{2r+2} E\{X_{t-r-i}^2\} = \phi^{2r+2}\sigma_X^2.$$
4. Se $|\phi| < 1$, $\phi^{2(r+1)} \to 0$, quando $r \to \infty$, portanto, sob essa suposição, podemos escrever
$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}, \tag{22}$$

onde a convergência é em média quadrática.

# Processo AR(1)

1. Logo, a condição $|\phi| < 1$ é suficiente para $X_t$ ser estacionário.
2. Multiplicando ambos os membros de (21) por $X_{t-\tau}$ e tomando a esperança, obtemos

$$\gamma_\tau = \phi\gamma_{\tau-1} = \ldots = \phi^\tau \gamma_0.$$

3. Mas, de (22), obtemos

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \tag{23}$$

do que segue

$$\gamma_\tau = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^\tau \ , \quad \tau \geq 0.$$

4. Como $\gamma_\tau$ é simétrica, podemos escrever finalmente a f.a.c.v. de um processo $AR(1)$ como

$$\gamma_\tau = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^{|\tau|}, \quad \tau \in \mathbb{Z}. \tag{24}$$

# Processo AR(1)

A f.a.c. de $X_t$ é obtida de (23) e (24), ou seja,

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} = \phi^{|\tau|}, \quad \tau \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

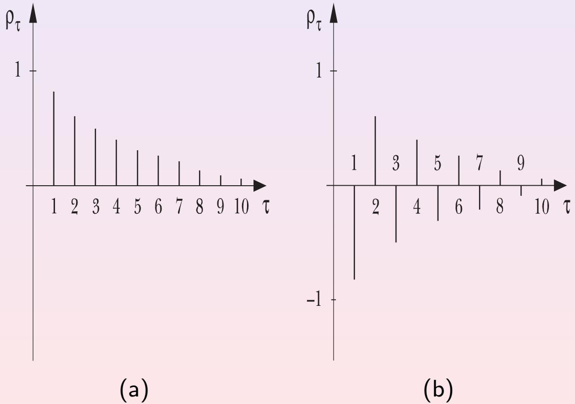



Figura 4: Função de autocorrelação de um $AR(1)$. (a) $\phi = 0{,}8$ (b) $\phi =$ - 0,8.

# AR estacionário

1. Pode-se demonstrar (Box et al., 1994) que a condição para que $X_t$ seja estacionário é que todas as raízes de $\phi(B) = 0$ estejam fora do círculo unitário.
2. Em particular, para $p = 1$, $\phi(B) = 1 - \phi B = 0$ implica $B = \phi^{-1}$, e a condição enunciada acarreta $|\phi| < 1$.
3. A facv de um processo AR(p) é dada por

$$\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \phi_2 \gamma_{\tau-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{\tau-p} \,, \quad \text{para} \quad \tau > 0. \qquad (26)$$

4. A mesma equação de diferenças é satisfeita por $\rho_\tau$, bastando dividir todos os termos de (26) por $\gamma_0$.

## Equaçoes de Yule-Walker

1. A solução geral dessa equação é dada por

$$\gamma_\tau = A_1 G_1^\tau + A_2 G_2^\tau + \ldots + A_p G_p^\tau, \tag{27}$$

onde os $G_i$s satisfazem

$$\phi(B) = \prod_{i=1}^{p} (1 - G_i B).$$

2. Como as raízes de $\phi(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário, devemos ter que $|G_i| < 1$, para todo $i = 1, \ldots, p$.
3. Se fizermos $\tau = 1, 2, \ldots, p$ em (27), obtemos

$$\mathbf{\Gamma}_p \boldsymbol{\phi}_p = \boldsymbol{\gamma}_p, \tag{28}$$

onde temos $\mathbf{\Gamma}_p = [\gamma_{ij}]$, $\gamma_{ij} = \gamma_{|i-j|}$ , $i, j = 1, \ldots, p$, $\boldsymbol{\phi}_p = (\phi_1, \ldots, \phi_p)'$ e $\boldsymbol{\gamma}_p = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)'$.

O conjunto de equações (28), chamadas de equações de Yule-Walker, pode ser utilizado para obter estimadores dos parâmetros $\phi_j$'s, substituindo-se as f.a.c.vs por suas estimativas. Esses estimadores são chamados estimadores de Yule-Walker.

# facv de AR(p)

Uma análise de (27) nos permite concluir que a f.a.c.v. de um processo autorregressivo de ordem $p$ é uma mistura de exponencias (correspondentes às raízes $G_i$ reais) e/ou senóides (correspondentes a pares de raízes complexas conjugadas) amortecidas.

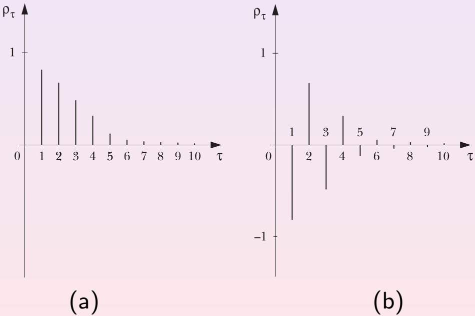



Figura 6: Função de autocorrelação de um modelo $AR(2)$.
(a) $\phi_1 = 0{,}5$, $\phi_2 = 0{,}3$ (b) $\phi_1 =$ - $0{,}5$, $\phi_2 = 0{,}3$.

# Referências

Morettin, P. A. (2014). *Ondas e Ondaletas*. Segunda edição. São Paulo: EDUSP.

Morettin, P. A. and Toloi, C. M. C. (2018). *Análise de Séries Temporais*. Terceira Edição. Blucher.

Percival, D. and Walden, A. (1993). *Spectral Analysis for Physical Applications*. Cambridge.