MAE 5871: Análise Espectral de Séries Temporais

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
pam@ime.usp.br
http://www.ime.usp.br/$\sim$ pam

Aula 1

18 de agosto de 2021

Sumário

Análise de Fourier

1. Análise de Fourier: bem conhecida e o conceito físico de frequência é o ponto fundamental. Suas origens remontam a J.B. Fourier, num trabalho sobre a condução do calor, apresentado como manuscrito ao Institut de France, em 1807, e depois publicado em 1822 (Fourier, 1822) e suas aplicações são numerosas.
2. Podemos mesmo dizer que vivemos em um "mundo senoidal", pois quase toda a tecnologia em comunicações (como a HDTV-*high definition television*, por exemplo), é baseada na Análise de Fourier. De acordo com Meyer (1993), a análise de Fourier pode ser vista como **o** algoritmo a ser usado quando tratamos com processos estocásticos estacionários, pois essa análise é a ferramenta ideal para analisar dados obtidos de tais processos.
3. Mas para certos tipos de séries observadas, como as séries temporais categorizadas, outros tipos de análise podem ser mais apropriados. Nesse caso, por exemplo, a análise de Walsh-Fourier pode ser relevante, veja Morettin (1974,1981) ou Stoffer et al. (1988).

Análise de ondaletas

1. Análise de ondaletas: é conduzida no domínio do tempo-escala, portanto apropriada para analisar processos não estacionários. Como há várias bases de ondaletas, não se tem somente uma análise de ondaletas (como no caso da análise de Fourier, em que se tem somente uma base ortogonal), mas várias análises ou algoritmos, uma para cada base escolhida. Um problema relevante e difícil é a escolha da base de ondaletas para ser usada com um conjunto particular de dados
2. As ondaletas seguiram, também, um longo caminho, desde que Haar introduziu seu conjunto de funções ortogonais em 1910. Somente na década de 80 a utilidade das ondaletas foi reconhecida, com os trabalhos de Grossmann, Morlet, Mallat, Meyer e outros. Para uma visão desses trabalhos pioneiros, veja Heil e Walnut (1989, 2006), Meyer (1993) e Hubbard (1996).

Exemplo 1

1. A Figura 1 apresenta o gráfico de 20 dias de observações de marés em Ubatuba, São Paulo, de 01/01/1981 a 20/01/1981. São 480 valores
2. Há alguns comentários que podem ser feitos sobre esses dados. Primeiro, eles foram obtidos discretizando-se, em intervalos de uma hora, uma curva contínua feita num equipamento de medição chamado marégrafo. Esse equipamento foi colocado num ponto específico do oceano, próximo de Ubatuba, SP.
3. Se ele fosse colocado num ponto geográfico diferente, obteríamos uma curva similar àquela da Figura 1, mas não a mesma. Dizemos que essas são *trajetórias* ou *realizações* ou, ainda, *séries temporais* de um mesmo processo estocástico. Denotaremos a série temporal da Figura 1.1 por $\{X_t, t = 1, 2, \ \ldots, n\}$, onde, neste caso, $n = 480$ e X_t denota o valor (em cm) da altura da maré no instante t, dado em hora.

Exemplo 1

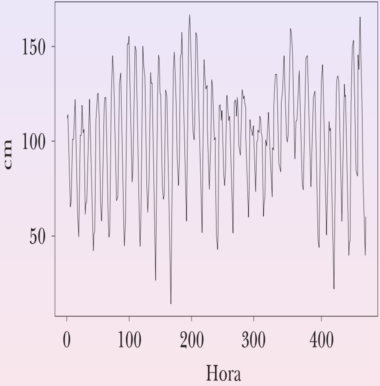

Figura 1: Dados horários da série de nível do mar obtidos em Ubatuba, SP.

Definição formal

Definição 1. *Seja $\mathcal{T}$ um conjunto arbitrário. Um processo estocástico é uma família $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$, tal que, para cada $t \in \mathcal{T}$, $X(t)$ é uma variável aleatória.*

Nessas condições, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias (v.a.), que se supõem definidas num mesmo espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Vamos supor, também, que as v.a. envolvidas sejam reais.
O conjunto $\mathcal{T}$ é normalmente considerado como o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots\}$, ou o conjunto dos reais $\mathbb{R}$.

Como para cada $t \in \mathcal{T}$, $X(t)$ é uma v.a. definida sobre Ω, na realidade, $X(t)$ é uma função de dois argumentos, $X(t, \omega)$, $t \in \mathcal{T}$, $\omega \in \Omega$. A Figura 2 ilustra essa interpretação de um processo estocástico.

Definição formal

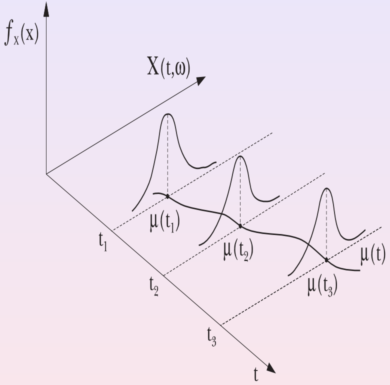

Figura 2: Um processo estocástico interpretado como uma família de variáveis aleatórias.

Definiçaõ formal

1. Por outro lado, para cada $\omega \in \Omega$, fixado, vamos obter uma função de t, ou seja, uma realização ou trajetória do processo. Veja a Figura 3. Vamos designar as realizações do processo por $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t)$ etc.
2. O conjunto de todas as trajetórias é chamado ensemble. Observamos que cada realização do processo é uma função de t, não aleatória, e para cada t fixo, $X(t)$ é um número real.
3. Uma maneira de visualizar a distribuição de probabilidades de $X(t, \omega)$, para t fixo, é considerar a proporção de trajetórias que passam por uma "janela"de amplitude Δ. Tal proporção será $f_X(x).\Delta$. É a mesma idéia para construir um histograma para a distribuição de valores de uma v.a.

Definição formal

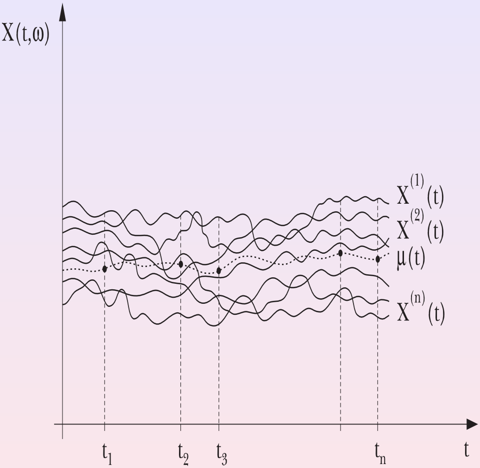

Figura 3: Um processo estocástico interpretado como uma família de trajetórias.

Definição formal

1. O conjunto dos valores de $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ é chamado espaço dos estados, S, do processo estocástico, e os valores de $X(t)$ podem ser chamados estados.
2. Se o conjunto $\mathcal{T}$ for finito ou enumerável, como $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, diz-se processo com parâmetro ou tempo discreto. Se $\mathcal{T}$ for um intervalo de $\mathbb{R}$, teremos um processo com parâmetro ou tempo contínuo.
3. O espaço dos estados também pode ser discreto ou contínuo. No primeiro caso, $X(t)$ pode representar uma contagem, como o número de chamadas que chegam a uma central telefônica durante um período de duas horas. No segundo caso, $X(t)$ representa uma medida que varia continuamente, como a voltagem, a altura de marés, a temperatura do ar etc.

Especificação de um mprocesso estocástico

1. Sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n$ elementos quaisquer de $\mathcal{T}$ e consideremos

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n\}. \tag{1}$$

2. Então, o processo estocástico $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ estará especificado se conhecermos as distribuições finito-dimensionais (1), para todo $n \geq 1$.
3. Isso significa que, para $n = 1$, conhecemos as distribuições unidimensionais da v.a. $X(t_1), t_1 \in \mathcal{T}$; para $n = 2$, conhecemos as distribuições bidimensionais da v.a. $X(t_1), X(t_2), t_1, t_2 \in \mathcal{T}$, e assim por diante. As funções de distribuição (1) devem satisfazer às duas condições seguintes:

   (i) *Condição de simetria*: para qualquer permutação $j_1, \ldots, j_n$, dos índices $1, 2, \ldots, n$, temos

$$F(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}; t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}) = F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n). \tag{2}$$

   (ii) *Condição de compatibilidade*: para $m < n$,

$$F(x_1, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty; t_1, \ldots, t_m, \ldots, t_n) =$$
$$= F(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_m). \tag{3}$$

Especificação de um mprocesso estocástico

1. O lado esquerdo de (3) deve ser entendido como

$$\lim_{x_{m+1}, \ \ldots, x_n \to \infty} F(x_1, \ \ldots, x_m, x_{m+1}, \ \ldots, x_n; t_1, \ \ldots, t_n).$$

2. Pode-se demonstrar que qualquer conjunto de funções de distribuição da forma (1), satisfazendo as condições (2) e (3), define um processo estocástico $X(t)$ sobre $\mathcal{T}$. Esse resultado é conhecido como *teorema da extensão de Kolmogorov*.

3. Contudo, o conhecimento de todas essas distribuições finito-dimensionais é muito difícil de ocorrer na prática, senão impossível. O que se faz é estudar certas características associadas a (1) e que sejam simples de calcular e interpretar.

Momentos

1. Usualmente, o que se faz é restringir o estudo a momentos de baixa ordem. Em particular, para a classe dos processos que vai nos interessar, os chamados processos estacionários, consideraremos momentos de primeira e segunda ordem.
2. A função média, ou simplesmente média de $X(t)$, é dada por

$$\mu(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x; t), \tag{4}$$

enquanto a função de autocovariância de $X(t)$ é definida como

$$\gamma(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} - E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}, \quad t_1, t_2 \in \mathcal{T}. \tag{5}$$

3. Observe que $\mu(t)$ é uma função de $t \in \mathcal{T}$, e que $\gamma(t_1, t_2)$ depende de dois argumentos, t_1 e t_2. Em particular, se $t_1 = t_2 = t$, (5) nos fornece

$$\gamma(t, t) = Var\{X(t)\} = E\{X^2(t)\} - E^2\{X(t)\}, \tag{6}$$

que é a (função) variância do processo $X(t)$, e que será indicada por $\sigma^2(t)$.

Momentos

1. Observemos também que, na prática, teremos que estimar as quantidades $\mu(t), \sigma^2(t)$ e $\gamma(t_1, t_2)$.
2. Na Figura 3, vemos que uma maneira de fazê-lo é considerar um número m de trajetórias $X^{(1)}(t), \ldots, X^{(m)}(t)$ e utilizá-las para estimar os parâmetros acima. Por exemplo, podemos estimar a média no instante t por
$$\hat{\mu}(t) = \frac{X^{(1)}(t) + \ldots + X^{(m)}(t)}{m}.$$
3. O problema é que usualmente temos uma só trajetória do processo, observada entre dois instantes de tempo. Voltaremos a esse assunto mais tarde.

Referências

Meyer, Y. (1993). *Wavelets: Algorithms and Applications*. Philadelphia, SIAM.

Morettin, P. A. (1974). Walsh function analysis of a certain class of time series. *Stochastic Processes and Their Applications*, **2**, 183–193.

Morettin, P. A. (2014). *Ondas e Ondaletas*. Segunda edição. São Paulo: EDUSP.

Stoffer, D. S.; Scher, M. S.; Richardson, G. A.; Day, N. L. and Coble, P. A. (1988). A Walsh-Fourier analysis of the effects of moderate maternal alcohol consumption on neonatal sleep-state cycling". *Journal of the Americal Statistical Association*, **83**, 954–963.