Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

SÉRIES

EXEMPLOS CLÁSSICOS

1. **A série harmônica, $\sum \frac{1}{n}$, diverge**. Para a 2^n-ésima soma parcial de $\sum \frac{1}{n}$ obtemos, $s_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+........+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+......\frac{1}{2^n}) > 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+.....\frac{2^n-2^{n-1}}{2^n} = 1+n\frac{1}{2}$.

2. A **série geométrica** $\sum\limits_0^\infty z^n, z \in \mathbb{C}$ converge absolutamente se $|z| < 1$, $\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1-z}$, e diverge se $|z| \geq 1$ pois, neste caso, $\lim z^n \neq 0$.

3. A **série** $\sum \frac{1}{n^p}$, pelo critério da integral, converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

4. A **série alternada**, derivada da harmônica, $\sum \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$ é, pelo critério de Leibiniz, convergente.

5. **Série não comutativamente convergente** Seja $s = \sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$,

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} .... ,$$

$$\frac{s}{2} = \sum_1^\infty -\frac{(-1)^n}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + ...,$$

e reescrevendo esta última como (é fácil ver que podemos),

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + ... ,$$

somando as séries para s e $\frac{s}{2}$ obtemos,

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + ...$$

Que é um rearranjo da série original com valor diferente pois, veremos, $s = \ln 2$.
Obs: Escrevendo $s = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $\frac{s}{2}$ na forma $\frac{s}{2} = \sum_1^\infty b_n$, $b_n = 0$, se n é ímpar e, $b_n = -\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n}$, se n é par, temos que $s + \frac{s}{2} = \sum_1^\infty c_n$, $c_n = +\frac{1}{n}$, se n é ímpar e, para n par, $c_n = 0$, se $\frac{n}{2}$ é ímpar e $c_n = -\frac{1}{\frac{n}{2}}$ se $\frac{n}{2}$ é par. Assim, a série apresentada, onde os valores nulos não estão presente, corresponde a $\sum c_n$, em que tais valores estão presentes.

6. O critério da razão aplicado a $\sum\limits_{0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ fornece $\lim|\frac{z^{n+1}n!}{z^n(n+1)!}| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$ e portanto, a série é convergente $\forall z \in \mathbb{C}$. Na seção exponencial real provamos, utilizando a fórmula de Taylor e $\lim \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a \in \mathbb{R}$, que $e^x = \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

7. **Existência do limite da raíz e não o da razão**: sejam $a,\ b > 0,\ a \neq b$, e $(x_n) = (a, ab, a^2b, a^2b^2, a^3b^2, a^3b^3, ...)$. Então, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, se n é par e $\frac{x_{n+1}}{x_n} = b$ se n é ímpar.

Porém, sendo $x_n = (ab)^{\frac{n}{2}}$ se n é par e $x_n = (ab)^{\frac{n-1}{2}}a$ se n é ímpar, temos que $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}$, se n é par e, $\sqrt[n]{x_n} = (ab)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}\sqrt[n]{a} = \sqrt{ab}\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[2n]{ab}}$, se n é ímpar. Então, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}$.

Supondo $a < b < 1$ temos, $x_n \leq (bb)^{\frac{n}{2}} = b^n$, se n é par e $x_n \leq (bb)^{\frac{n-1}{2}} b = b^n$ se n é ímpar. Logo, pelo critério da comparação $\sum x_n$ converge.

$$(8) \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} ..... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... \ , \ |x| \leq 1,$$

,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + ...(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1} + ... \quad .$$

Solução Lembrando $\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ e a fórmula para a soma de uma PG, temos

$$1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \quad ; \quad 1 + r + r^2 + ... + r^n + \frac{r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} \ , \quad (r \neq 1),$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} \ , \ t \in \mathbb{R} \ ,$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} .... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt \ , \ x \in \mathbb{R} \quad .$$

Concluímos mostrando que para $|x| \leq 1$ a integral tende a zero:

$$|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt\ | \leq |\int_0^x t^{2(n+1)}\, dt| \ \leq \ |\frac{x^{2n+3}}{2n+3}| \ \leq \ \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad .$$

$$(9) \qquad ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... \ , \ -1 < \ x \leq \ 1$$

$$ln\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + (-1)^n \frac{1}{n+1} + ... \quad .$$

Solução: Da progressão $1 - t + t^2 - t^3 + ...(-t)^n = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$, $t \neq -1$, obtemos

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + ...(-t)^n + \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \ , \quad t \neq -1 \quad ,$$

a qual, integrando nos dá, para $x \in (-1, 1]$

$$ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\, dt.$$

Concluímos mostrando que a integral I, para $-1 < x \leq 1$, tende a zero.

Caso $0 \leq x \leq 1$. Logo, se $0 \ \leq \ t \ \leq \ x \ \leq \ 1$ então $1 \leq 1 + t$ e

$$|I| = |\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\, dt| \ \leq \ |\int_0^x t^{n+1}\, dt| = |\frac{x^{n+2}}{n+2}| \ \leq \ \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \ .$$

Caso $-1 < x < 0$. Logo, se $-1 \ < \ x \ \leq \ t \leq 0$ então $0 \ < \ 1 + x \ \leq \ 1 + t \ \leq 1$, $\frac{1}{1+t} \ \leq \ \frac{1}{1+x}$ e, $|I| \ \leq \ \frac{1}{1+x}|\frac{x^{n+2}}{n+2}| \ \leq \ \frac{1}{(1+x)(n+2)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

8. Pela fórmula de Taylor para a função $sen\,(x)$ na origem temos, para $x \in \mathbb{R}$,

$$sen\,x = sen(0) \; + sen'(0)x \; + sen''(0)\frac{x^2}{2!} + ... + \; sen^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \; sen^{(k+1)}(\overline{x})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\,,$$

para algum $\overline{x}$ entre 0 e x. As derivadas sucessivas de $sen(x)$ são: $sen'(x) = \cos(x)$, $sen^{(2)}(x) = -sen(x)$, $sen^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $sen^{(4)}(x) = sen(x)$,..., e assim, $sen'(0) = 1$, $sen^{(2)}(x) = 0$, $sen^{(3)}(x) = -1$, $sen^{(4)}(x) = 0$,... . Consequentemente,

$$sen\,x = \; x \; - \frac{x^3}{3!} \; + \frac{x^5}{5!}..... \; + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \; sen^{(2n+2)}(\overline{x})\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

Como é óbvio, $|sen^{(2n+2)}(\overline{x})\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}| \; \leq \; \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$. Em geral, se $|x| \leq R$, $\frac{R^N}{N!}$ é uma sequência convergente a zero. Logo,

$$sen(x) = x - \; \frac{x^3}{3!} + \; \frac{x^5}{5!} - \; \frac{x^7}{7!} + ... + \; (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \; + ... \;, \forall\, x \in \mathbb{R}\;.$$

9. Similarmente temos, $\cos' x = -sen\,x$, $\cos'' x = -\cos x$, $cos^{(3)} x = sen\,x$, $\cos^{(4)} x = \cos x$, $\cos 0 = 1$, $\cos' 0 = 0$, $\cos'' 0 = -1$, $\cos^{(3)} 0 = 0$ e $\cos^{(4)} 0 = 1$. Consequentemente,

$$\cos(x) = 1 \; - \frac{x^2}{2!} + \; \frac{x^4}{4!} + ... + \; (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., \forall\, x \in \mathbb{R}\;.$$