Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES E SÉRIES DE POTÊNCIAS

I - SEQUÊNCIAS DE FUNÇÕES

1. **Definição** Uma sequência de funções, (f_n), $f_n : X \to \mathbb{K}$, **converge uniformemente** a $f : X \to \mathbb{K}$ se, $\forall \epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,, \forall n \geq N,\ \forall x \in X$.
   Obs Se (f_n) converge uniformemente a f, em X, então $\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in X$.

2. **Teorema 1** Se (f_n) é uma sequência de funções, em X, contínuas em x_0 e convergindo uniformemente a $f : X \to \mathbb{K}$ então, f é contínua em x_0.

   Prova Seja $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$. Por hipótese, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in X$. Assim, como f_N é contínua, $\exists \delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$ então $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$. Logo, $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon + \epsilon + \epsilon$ ∎

3. **Corolário 1** Se (f_n) é uma sequência de funções contínuas, em X, convergindo uniformemente a $f : X \to \mathbb{K}$ então f é contínua.
   Prova Imediata consequência do teorema acima ∎

4. **Teorema 2** Se (f_n) é uma sequência de funções contínuas em $[a.b] \subset \mathbb{R}$, a valores reais e convergindo uniformemente a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ então,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

   Prova Pelo corolário 1, f é contínua e, assim,integrável como toda f_n. Dado $\epsilon > 0$, por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,, \forall x \in [a, b]$. Logo, se $n \geq N$,

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b \epsilon\, dx = \epsilon(b - a) \ \blacksquare$$

5. **Teorema 3** Seja $(f_n) \subset C^1([a, b], \mathbb{R})$ tal que (f'_n) converge uniformemente a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e (f_n) converge simplesmente a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então, F é derivável e $F' = f$. Isto é,

$$\left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x).$$

   Prova Pelo $1^{\underline{o}}$ Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt\,,\ \forall x \in [a, b]\ .$$

   Pelas hipóteses e pelo teorema 2, tomando o limite para $n \to +\infty$, temos

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt\,.$$

   Logo, pelo $2^{\underline{o}}$ Teorema Fundamental do Cálculo, F é derivável e $F' = f$ ∎

6. **Critério de Cauchy** (para convergência uniforme de uma sequência de funções) A sequência (f_n) converge uniformemente a f, em X, se, e só se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, $\forall n, m \geq N, \forall x \in X$.

   Prova: ($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ dado pela convergência uniforme. Então, se $n, m \geq N$ e $x \in X$, temos $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ e $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$. Portanto,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \ .$$

   ($\Leftarrow$) Neste caso, $\forall x \in X$, a sequência $(f_n(x))$ é de Cauchy e, convergente. Seja $f(x) = \lim_{m \to +\infty} f_m(x)$. Dado $\epsilon > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $(*)$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, $\forall n, m \geq N$, $\forall x \in X$. Tomando o limite em $(*)$ para $m \to +\infty$ temos $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$, $\forall n > N$, $\forall x \in X$ ■

II - SÉRIES DE FUNÇÕES

7. **Definição** Dada (f_n) uma sequência de funções, em X, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ é a série de funções cujas somas parciais são as funções $s_n = f_1 + ... + f_n = \sum_{i=0}^{n} f_i : \ X \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

8. **Definição** A série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge, em X, à função $s : X \to \mathbb{K}$ se, para cada $x \in X$ temos, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = s(x)$.

9. **Definição** Dada a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, em X, a função $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ definida sobre o conjunto dos pontos em que a série de funções converge é a **soma** da série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

10. **Definição** A série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, em X, **converge uniformemente** a $s : X \to \mathbb{K}$ se a sequência (de funções) das somas parciais, (s_n), $s_n = f_1 + ... + f_n$, converge uniformemente a $s : X \to \mathbb{K}$.

11. **Teorema 4 (Integração termo a termo)** Seja $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in [a, b]$, uma série de funções em $C([a, b], \mathbb{R})$, uniformemente convergente. Então, $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx \ .$$

    Prova Consequência imediata do corolário 1 e do teorema 2 ■

12. **Teorema 5 (Derivação termo a termo)** Seja $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in [a, b]$, uma série de funções de classe C^1, a valores reais, tal que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a, b]$. Então, $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e,

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \, , \forall x \in [a, b] \ .$$

    Prova Segue do teorema 3, aplicado à sequência das somas parciais, $s_n = f_1 + ... + f_n$ ■

13. **Critério de Cauchy** (para convergência uniforme de uma série de funções) A série de funções $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, em X, converge uniformemente a $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ se, e só se, $\forall \epsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum\limits_{k=0}^{m} f_k(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)| < \epsilon$, $\forall n, m \geq N$, $\forall x \in X$.
Prova: Segue do critério de Cauchy para sequências de funções aplicado à sequência (s_n) das somas parciais da série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ pois, $|\sum\limits_{k=0}^{m} f_k(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)| = |s_m(x) - s_n(x)|$ ■

14. **Teste M de Weierstrass** Seja $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ uma série de funções, em X, tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n \in \mathbb{R}^+ \, , \forall n \in \mathbb{N} \, , \forall x \in X \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} M_n < \infty \; .$$

Então, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente, em X, à função $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
Prova: Pelo critério de Cauchy para séries, dado $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$ e $p \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots.. + M_{n+p} < \epsilon$. Logo, a sequência (s_n) das somas parciais de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ satisfaz: se $n > m > N$ então,

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots. + f_n(x)| < M_{m+1} + M_{m+2} + \ldots.M_n < \epsilon \; .$$

Tomando o limite na expressão acima, para $m \to +\infty$, $|s_n(x) - s(x)| \leq \epsilon \, , \forall n > N \, , \forall x \in X$ ■

III - SÉRIES DE POTÊNCIAS

15. **Definição** Dada $(a_n) \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ é a série de potências com coeficientes (a_n), centrada em z_0, ou em volta de z_0.

16. **Teorema 1** Seja $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, centrada na origem e convergente se $z = w \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

    (a) A série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolutamente se $|z| < |w|$.

    (b) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ converge absolutamente se $|z| < |w|$.

    Prova Como $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ converge, $\lim a_n w^n = 0$ e $\exists \, M > 0$ tal que $|a_n w^n| \leq M \, , \forall \, n$. Logo,

$$|a_n z^n| = |a_n w^n| \, |\frac{z}{w}|^n \;\leq M |\frac{z}{w}|^n \qquad\qquad |n a_n z^{n-1}| = \frac{1}{|z|} n |a_n w^n| \, |\frac{z}{w}| \;\leq \frac{M}{|z|} n |\frac{z}{w}|^n \;\; , z \neq 0 \, .$$

Sendo $0 < r = |\frac{z}{w}| < 1$, $\sum r^n < \infty$ e, pelo critério da raíz, $\sum n r^n < \infty$, segue a tese ■

17. **Teorema 2** Seja $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ uma série de potências em $\mathbb{C}$, centrada na origem e consideremos $r = \frac{1}{\lim sup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]$; $r = +\infty$ se $\lim sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ e $r = 0$ se $\lim sup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$.

(a) Se $|z| < r$ a série converge absolutamente.

(b) Se $|z| > r$ a série diverge.

(c) Se $|z| = 1$ o critério não decide sobre a convergência ou divergência.

(d) A série converge uniformemente no disco $D(0\,;r_1)\,,\forall\ r_1\,,0 < r_1 < r$.

Prova Para sequências em $\mathbb{R}$, o $\lim sup$ é o valor máximo para o qual há subsequência convergindo. Logo, se $\lim sup \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1$, para $\lambda > 0$ tal que $\lim sup \sqrt[n]{|a_n z^n|} < \lambda < 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N$ então $\sqrt[n]{|a_n z^n|} < \lambda$ e $|a_n z^n| < \lambda^n$ e portanto, a série converge. Finalmente, $\lim sup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \lim sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ se, e só se, $|z| < r$.

Se $\lim sup \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$, para $1 < \lambda < \lim sup \sqrt[n]{|a_n z^n|}$ existe uma subsequência (a_{n_k}) com $\sqrt[n_k]{|a_{n_k} z^{n_k}|} > \lambda > 1$ e $|a_{n_k} z^{n_k}| > \lambda^{n_k}$ e, a série diverge. Ainda, $\lim sup \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$ se, e só se, $|z| > r$. Item (d) segue do teste M pois, $\sum |a_n z^n| \leq \sum |a_n| r_1^n < \infty\,, \forall z \in D(0;r_1)$ ■

Observação Se $(a_n) \subset \mathbb{C}^*$ e existir $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ então $\exists \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ e $r = \frac{1}{\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

18. **Definição** Dada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $r = \frac{1}{\lim sup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]$ é o **raio de convergência** da série.

19. **Observação** As séries $\sum\limits^{+\infty} a_n z^n$ e $\sum\limits^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ tem igual raio de convergência.

20. **Teorema** Seja $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, com raio de convergência $r > 0$. Temos,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}\,, \quad \forall z \in\ B(0;r) = \{w : |w| < r\}\ .$$

Prova Mostremos que se $I(h) = \frac{f(z+h)\ -\ f(z)}{h} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$, $h \in \mathbb{C}^*$, então $\lim\limits_{h\to 0} I(h) = 0$. Escrevamos $I = I_1 + I_2 + I_3$, soma das três parcelas, em ordem de surgimento, abaixo,

$$I = [\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}] + [\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}]$$

$$+[\sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}] = \ I_1 +\ I_2 +\ I_3.$$

Iniciemos por I_1, fixando w, $|z| < |w| < r$. Se $0 < |h| < |w| - |z|$ então $|z + h| < |w|$ e,

$$|\frac{(z+h)^n - z^n}{h}| = |(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2} z + ... + (z+h) z^{n-2} + z^{n-1}| \ \leq\ n|w|^{n-1}.$$

Logo, $|a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}| \ \leq\ n|a_n||w|^{n-1}$. Sendo, pelo Teorema 1, $\sum\limits^{+\infty} n|a_n w|^{n-1} < \infty$, para $N >>$ temos $\sum\limits_{N+1}^{+\infty} n|a_n w|^{n-1} < \epsilon$ e, portanto, $|I_1| \ = |\sum\limits_{N+1}^{+\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}| <\ \epsilon$, se $|h| < |w| - |z|$.

Para I_3 é óbvio, devido à convergência de $\sum\limits^{+\infty} n a_n z^{n-1}$, que, se $N >>$ então $|I_3| < \epsilon$.

Por último, para N tal que $|I_1| < \epsilon$ e $|I_3| < \epsilon$, sendo $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n$ um polinômio, logo derivável, temos que para $|h| <<$, $|I_2| = |\sum\limits_{n=0}^{N} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum\limits_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}| < \epsilon$. Logo, se $|h| <<$, $|I| \ \leq\ |I_1| + |I_2| + |I_3| < 3\epsilon$ ■