Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

SÉRIES E SOMAS EM ÁLGEBRAS: $C([a,b])$, $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, etc.

O PRODUTO DE SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Abaixo, X é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial normado com produto tal que $|xy| \le |x|\,|y|\,, \forall x, y \in \mathbb{X}$, e com toda as sequências de Cauchy convergindo. Exemplos: o espaço de funções contínuas $C([a,b])$ com norma do sup, espaços de matrizes quadradas reais ou complexas, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc.

1. **Associatividade para Séries**. Se $\sum^{+\infty} x_n$ converge a x, a convergência é associativa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = (x_1 + ... + x_{n_1}) + ... + (x_{n_{p-1}+1} + ... + x_{n_p}) + ... \; .$$

Uma família em X, indexada em I, I um conjunto de índices qualquer, é uma função $x : I \to X$, denotada por (x_i) ou $(x_i)_I$. Toda sequência é uma família.

2. **Somabilidade:** A família (x_n) é **somável**, com soma $x \in X$, se $\forall\ \epsilon > 0$ existe $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$, F_ϵ finito, tal que para todo $F \subset \mathbb{N}$, F finito e $F \supset F_\epsilon$,

$$(*) \quad |x - \sum_F x_n| < \epsilon.$$

Notação: $\sum_{\mathbb{N}} x_n = x$. Ainda, (x_n) é **absolutamente somável** se existe $M > 0$ tal que $\sum_{n\in F} |x_n| \;\le\; M$, $\forall F \subset \mathbb{N}$, F finito. Temos, $\sum |x_n| = sup\ \{\sum_F |x_n| :\ F \text{ finito}\}$.
O conjunto das sequências somáveis sobre X é um espaço vetorial.

3. Se $\sum_{\mathbb{N}} x_n = x$ e $|\sum_F x_n - z| \le M$, (z e M fixos) $\forall F \subset \mathbb{N}$, F finito, então, $|x - z| \le M$.
Em particular temos, $|\sum_{\mathbb{N}} x_n| \le \sum |x_n|$.

4. A família (x_n) satisfaz a **condição de Cauchy** se dado $\epsilon > 0$ existe $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$, F_ϵ finito, tal que para todo subconjunto finito $F' \subset \mathbb{N}$, disjunto de F_ϵ temos,

$$|\sum_{F'} x_n| < \epsilon \; .$$

(a) Se (x_n) satisfaz a condição de Cauchy, a sub-família $(x_n)_{n\in J}$, $J \subset \mathbb{N}$, também.

(b) Toda sequência somável satisfaz a condição de Cauchy.

Prova: O ítem (a) é trivial.
(b) Dado $\epsilon > 0$, seja x a soma, F_ϵ dado pela somabilidade e $F \subset I$, disjunto de F_ϵ. Então,

$$|\sum_F x_n| \le \quad |\sum_{F\cup F_\epsilon} x_n - x| \;+\; |x - \sum_{F_\epsilon} x_n| < \epsilon + \epsilon \quad \blacksquare$$

Obs: Se (x_n) satisfaz a condição de Cauchy então $I_n = \{i \in \mathbb{N} : |x_i| > \frac{1}{n}\}$ é finito.

5. (**O Critério de Cauchy**) (x_n) é somável se, e só se, satisfaz a condição de Cauchy.
Prova: A 'ida' já foi provada quando da definição da condição de Cauchy.
($\Leftarrow$) Seja I_n como na observação acima e $y_n = \sum\limits_{I_n} x_i$. Dado $\epsilon > 0$, existe F_ϵ contido em $\mathbb{N}$ e finito, tal que se $F \subset \mathbb{N}$, F finito e $F \cap F_\epsilon = \emptyset$,
$$|\sum_F x_i| < \epsilon \ .$$
Para N tq. $F_\epsilon \subset I_N$ e $m > n \geq N$, $F_\epsilon \subset I_N \subset I_n \subset I_m$, $F = I_m - I_n \subset (F_\epsilon)^c$ e
$$|y_m - y_n| = |\sum_{I_m} x_i - \sum_{I_n} x_i| = |\sum_F x_i| < \epsilon \ .$$
Logo, $\exists \ \lim y_m = x \in X$, $|x - y_n| \leq \epsilon, \forall n \geq N$. Provemos $\sum\limits_I x_i = x$. Se $F \supset I_N$, $F' = F - I_N \subset (F_\epsilon)^c$ e portanto,
$$|x - \sum_F x_i| = |x - \sum_{I_N} x_i - \sum_{F'} x_i| \leq |x - y_N| + |\sum_{F'} x_i| < \epsilon \ + \ \epsilon \ \blacksquare$$
A seguir temos um teorema que, em $\mathbb{K}$, a prova utilizou a ordem em $\mathbb{R}$. Abaixo a prova vale em $\mathbb{K}$-espaços vetoriais normados completos (sequências de Cauchy convergentes).

6. **Teorema** Toda sequência (x_n) absolutamente somável é somável.
Prova Utilizemos o critério de Cauchy. Se $\Sigma|x_i| = sup\{\Sigma_F|x_i| : F \text{ é finito}\} = M < \infty$, dado $\epsilon > 0$ seja F_ϵ finito tal que $M - \epsilon < \sum\limits_{F_\epsilon} |x_i| \leq M$. Então, se F é finito e $F \cap F_\epsilon = \emptyset$,
$$M - \epsilon \ < \ \sum_{F_\epsilon} |x_i| \ \leq \ \sum_{F_\epsilon} |x_i| + \sum_F |x_i| \leq M \ ,$$
donde, $|\sum\limits_F x_i| \leq \ \sum\limits_F |x_i| = (\sum\limits_F |x_i| + \sum\limits_{F_\epsilon} |x_i|) - \sum\limits_{F_\epsilon} |x_i| \leq M - (M - \epsilon) = \epsilon \ \ \blacksquare$
Observação A 'volta' não vale, em geral, se o espaço não é $\mathbb{K}$.

7. **Associatividade da Somabilidade** Seja (x_n) somável com soma x e $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, partição de $\mathbb{N}$. Então, $(x_i)_{i\in J_\lambda}$ é somável $(\forall \lambda \in \Lambda)$ e, se $\sum\limits_{J_\lambda} x_i = y_\lambda$, (y_λ) é somável com soma x:
$$\sum x_n = \sum_\Lambda (\sum_{J_\lambda} x_i) \ .$$
Prova Afirmação 1: Para todo $J \subset \mathbb{N}$, $(x_n)_J$ é somável.
Prova: Seja $\epsilon > 0$ e $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$ como na condição de Cauchy para (x_n). Então, $F_\epsilon^J = F_\epsilon \cap J$ é tal que se $F^J \subset J$ é finito e disjunto de F_ϵ^J então $F^J \cap F_\epsilon = \emptyset$ e, $|\sum\limits_{F_\epsilon^J} x_n| < \epsilon$. Logo, a família $(x_n)_J$ satisfaz a condição de Cauchy e é, somável.

Afirmação 2: Se I_1e I_2 formam uma partição de $\mathbb{N}$, $y_1 = \sum_{I_1} x_n$ e $y_2 = \sum_{I_2} x_n$ estão bem definidos e $y_1 + y_2 = x$. A prova é simples.

Afirmação 3: $y_\lambda = \sum_{J_\lambda} x_i$ é bem definido, já vimos, e $(y_\lambda)_\Lambda$ satisfaz a condição de Cauchy.
Prova: Dado $\epsilon > 0$ seja F_ϵ como na condição de Cauchy para $(x_n)_\mathbb{N}$. Consideremos $G_\epsilon = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \Lambda$ tais que $F_\epsilon \subset J_{\lambda_1} \cup ... \cup J_{\lambda_n}$. Se $G \subset \Lambda$ é finito e $G \cap G_\epsilon = \emptyset$, temos:

$$\sum_G y_\lambda = \sum_G \sum_{J_\lambda, \lambda \in G} x_i = \sum_{\bigcup_G J_\lambda} x_i \ ,$$

e, $\forall\ \mathcal{G}$ finito em $\bigcup_G J_\lambda$ temos $\mathcal{G} \cap F_\epsilon = \emptyset$; logo, $|\sum_{\mathcal{G}} x_i| < \epsilon$ e, pelo item 3 acima,

$$|\sum_G y_\lambda| = |\sum_G \sum_{J_\lambda, \lambda \in G} x_i| \leq \epsilon \ .$$

Pelo critério de Cauchy existe $\Sigma_\Lambda y_\lambda = y$.

Afirmação 4: $y = x$.
Prova: Dado $\epsilon > 0$ sejam $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$ e $G_\epsilon \subset \Lambda$ finitos e tq: $\forall F$ e $\forall G$ finitos, $F \supset F_\epsilon$, $G \supset G_\epsilon$,

$$|\sum_F x_i - x| < \epsilon \quad , \quad |\sum_G y_\lambda - y| < \epsilon \ .$$

Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tais que $F_\epsilon \subset J_{\lambda_1} \cup .... \cup J_{\lambda_n}$ e $G = \{\lambda'_1, ..., \lambda'_m\}$. Podemos supor $\{\lambda_i\}_1^n = \{\lambda'_j\}_1^m$. Pelo item 3, na expressão à esquerda e desenvolvendo a outra temos,

$$|\sum_{\cup_i^n J_{\lambda_i}} x_i - x| \leq \epsilon \quad , \quad |\sum_i^n \sum_{J_{\lambda_i}} x_i - y| < \epsilon$$

Pela associatividade para Λ finito (afirmação 2), concluímos que $\sum_{\cup_i^n J_{\lambda_i}} x_i = \sum_i^n \sum_{J_{\lambda_i}} x_i$.
Logo, $|x - y| \leq 2\epsilon$ ■

8. **Teorema (Produto de Séries)** Sejam $\sum^\infty x_n = x$ e $\sum^\infty y_m = y$ séries absolutamente convergentes em $\mathbb{K}$. A família $\{x_n y_m\}$ é absolutamente somável (logo, somável) e,

$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}^{*} x_n y_m \ = \ (\sum^\infty x_n)(\sum^\infty y_m) \ .$$

(A) Dada uma ordem arbitrária (permutação) em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a série $\Sigma x_n y_m$ satisfaz :

(i) é absolutamente e comutativamente convergente a xy.

(ii) todo rearranjo, finito ou não (total associatividade), converge absolutamente a xy.

(B) O produto de Cauchy das séries dadas é a série obtida pela associação :

$$\sum_{n=0}^\infty \Big(\sum_{p=0}^n x_p\, y_{n-p}\Big) \ = \sum_{n=0}^\infty \sum_{i+j=n} x_i y_j = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}^{*} x_n y_m \ .$$

Obs: Este produto surge no cálculo dos coeficientes da multiplicação de séries de potências.

9. **A Exponencial de uma Matriz** ,

10. Seja $M_n = M_n(\mathbb{K})$ a álgebra das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes em $\mathbb{K}$. A exponencial de uma matriz $A \in M_n$ é dada por

$$e^A = \sum_0^\infty \frac{A^m}{m!}.$$

(a) A definição é bem dada.

(b) Se A e B comutam então $e^{A+B} = e^A e^B$.

(c) Para toda $A \in M_n$, e^A é inversível e $(e^A)^{-1} = e^{-A}$; $e^0 = I$.

(d) Se $W \in M_n$ é inversível então, $e^{W^{-1}AW} = W^{-1}\, e^A\, W$, $\forall\, A \in M_n$.

(e) É de classe C^∞ a aplicação $\exp : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ definida por,

$$\exp(X) = \sum_0^\infty \frac{X^m}{m!} \ .$$

(f) A função $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) = e^{tA} \in M_n$ é derivável e $f'(t) = Ae^{tA}$.

(g) Para toda $X \in M_n$, $\det(e^X) = e^{(TrX)}$, sendo $Tr(X)$ o traço da matriz X

Observação: Preferindo, resolva apenas em $\mathbb{R}$. Utilize, ou não, a equivalência entre a norma $||\,.\,||_2$ em $\mathbb{R}^{n^2}$ e a norma operador $||\,.\,||_{op}$, identificando M_n com $L(\mathbb{K}^n)$: dados T e S em $\in L(\mathbb{K}^n)$, $TS = T \circ S\ \in L(\mathbb{K}^n)$ e $||TS|| \ \leq\ ||T||\,||S||$.
Notação: $||X||_2 \ \leq\ \alpha\,||X||_{op}$ e $||X||_{op} \ \leq\ \beta\,||X||_2$, α e β positivos.
Sugestão: Direto em $\mathbb{C}$, utilizando a norma operador.

Resolução:

(a) Para $A \in M_n(\mathbb{C}^n)$, com a norma operador é claro que a série $\sum \frac{A^n}{n!}$ é uniformemente absolutamente convergente sobre os compactos.

(e) As derivadas de X^N, $X \in M_n(\mathbb{C})$ são uniformemente limitadas em $|X| \leq M$.

Para $A(t)$ e $B(t)$ funções de $\mathbb{R}$ em $M_n(\mathbb{C})$ temos $\frac{d}{dt}A(t)B(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$. Para $E_{rs} = [\delta_{rs}] \in M_n(\mathbb{R})$, E_{rs} e iE_{rs} , $1 \leq r, s \leq n$, formam uma base de $M_n(\mathbb{C})$. Chamemo-as $E_j\,, 1 \leq j \leq 2n^2$. Temos $X^N = X.....X$, é função de $2n^2$ variáveis, cada entrada um polinômio. Derivando na direção E_j, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial E_j}(X^N) = \sum_{p=0}^{p=N-1} X^p E_j X^{N-p-1}.$$

(A indução) Se $f(x) = f_1(X).......f_N(X)$ é um produto matricial, tal que $f_i(X)$ é X ou uma matriz constante. A derivada parcial na direção E_{ij} é dada por

$$\frac{\partial}{\partial E_j}f(X) = \sum_{r=1}^{r=N} f_1(X)...\frac{d}{dt}f_r(X + tE_j)|_{t=0}....f_N(X).$$

Então, uma derivada parcial de ordem 1 é soma de N parcelas de representação igual a f e assim, uma de ordem 2 têm N^2 parcelas na soma e a de ordem k, N^k parcelas nas quais $|E_j| \leq 1$ e, para o fator X, $|X| \leq M$. Logo, para a derivada $\frac{\partial^k}{\partial X^\alpha}$, $|\alpha| = k$,

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left| \frac{\partial^k}{\partial X^\alpha} (\frac{X^N}{N!}) \right| \ \leq \ \sum_{N=0}^{\infty} N^k \frac{M^N}{N!} .$$

A série numérica acima é convergente (teste da razão), a das derivadas converge uniformemente e absolutamente sobre os compactos. Logo, a exponencial é $\mathcal{C}^\infty$.

(f) Temos,

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = e^{tA} \left(\frac{e^{hA} - I}{h} \right) = e^{tA} \left[A + \frac{hA^2}{2!} + ... + \frac{h^{N-1}A^N}{N!} + ... \right] .$$

A série na expressão acima converge a A, para $h \to 0$.

(g) Definindo para $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \det(e^{tX})$ temos

$$f(t+s) = \det(e^{tX+sX}) = \det(e^{tX} e^{sX}) = \det(e^{tX}) \det(e^{sX}) = f(t)f(s) .$$

As funções $\mathcal{C}^\infty$ tais que $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s), \forall\, t, s$, são dadas por $\varphi(t) = e^{\lambda t}$. Logo, $f(t) = \det(e^{tX}) = e^{\lambda t}$, $\lambda = f'(0)$. Por outro lado,

$$e^{tX} = I + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + ... = I + tX + t^2 F_{_X}(t) ,$$

onde $F_{_X} = F_{ij}(t)$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ em M_n. Assim,

$$\det(e^{tX}) = \det[\delta_{ij} + tx_{ij} + t^2 F_{ij}] .$$

O determinante é multilinear e o desenvolvimento de $\det[\delta_{ij} + tx_{ij} + t^2 F_{ij}]$ pelas colunas (todas soma de três 'sub-colunas') é um polinômio em t e, termo independente $\det[\delta_{ij}] = 1$. Pondo t^2 em evidência, temos a parcela $t^2 g(t)$, g um polinômio. O termo de grau um só surge se na expansão há uma única 'sub-coluna' multiplicada por t, e as demais, colunas de I. Há n possibilidades. Se a primeira coluna está multiplicada por t, as demais são as segunda, terceira,... colunas de I. O determinante desta primeira matriz é, expandindo pela primeira linha, tx_{11}. Para as demais a argumentação é análoga e obtemos tx_{22}, $...tx_{nn}$

Logo, $f(t) = \det(e^{tX}) = 1 + Tr(X)t + t^2 g(t)$ e portanto, $\lambda = f'(0) = Tr(X)$ ■