Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

NOTAS

SEQUÊNCIAS

1. **Definição** Seja $X \subset \mathbb{R}$, X não vazio. Temos,

   (a) $M \in \mathbb{R}$ é um majorante para X se $x \leq M, \forall x \in X$.

   (b) $\beta \in \mathbb{R}$ é um supremo de X se β é um majorante e, se M é majorante de X, $\beta \leq M$.

   O supremo de X, se existir, é único. Analogamente define-se minorante e ínfimo. Segue o enunciado clássico do Axioma do Supremo, equivalente ao apresentado na Lista 1.

2. **Axioma do Supremo** Se $X \subset \mathbb{R}$, é não vazio e limitado superiormente, X tem supremo.
   Prova: Sejam $x \in X$ e M um majorante. Definamos duas sequências em $\mathbb{R}$, $(x_n) \subset X$, crescente, e (y_n) de majorantes e decrescente, tais que $(*)$ $\quad |y_n - x_n| \leq \frac{|y_{n-1} - x_{n-1}|}{2^{n-1}}, n \geq 1$.

   Passo 1: sejam $x_1 = x$ e $y_1 = M$, a afirmação é válida para $n = 1$. Passo 2: suponhamos escolhidos $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ segundo $(*)$. Seja $\beta = \frac{x_n + y_n}{2}$. Se β não majora X, existe $x' \in X$, $\beta < x'$, pomos $x_{n+1} = x'$ e $y_{n+1} = y_n$. Se majora , pomos $x_{n+1} = x_n$ e $y_{n+1} = \beta$.

   O par $(x_n), (y_n)$ satisfaz (*) e, pela forma fraca do axioma do supremo, ambas convergem. Seja $\alpha = \lim x_n$ e $\beta = \lim y_n$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M - x_1}{2^{n-1}} = 0$ então $\alpha = \beta$. Não existe, é claro, $x \in X$, $x > \beta = \lim y_n$, e assim β é majorante e não há majorante de X menor que $\beta = \lim x_n$ ■

   Segue, sobre sequências, resultados importantes para o estudo de séries.

3. **Definição** Dada a sequência $a = (a_n) \subset \mathbb{K}$, e uma coleção infinita de números naturais, $n_1 < n_2 < n_3 < ..... < n_k < n_{k+1} ....$, a sequência (b_k), $b_k = a_{n_k}$, é uma subsequência de (a_n).

4. **Proposição** Se (a_n) converge a L e (a_{n_k}) é uma sua subsequência, (a_{n_k}) converge a L.
   Prova: Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ com $|a_n - L| < \epsilon$, $n \geq N$. Se k_0 é tal que $n_{k_0} > N$ então, para $k > k_0$, temos $n_k > n_{k_0}$ e $|a_{n_k} - L| < \epsilon$ ■

5. **Lema 1** Dada a sequência $(a_n) \subset \mathbb{K}$, $L \in \mathbb{K}$ é limite de uma sua subsequência, se, e só se, $\forall\, \epsilon > 0$, há uma quantidade infinita de índices $n \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$; isto é, se quaisquer que sejam $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n > n_0$ tal que $a_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.
   Prova A 'ida' é óbvia. A volta é fácil (exercício).
   Dizemos que L, como acima, é um **ponto, ou valor, de aderência** da sequência (x_n).

6. **Teorema 1** Toda sequência em $\mathbb{K}$, limitada, admite subsequência convergente.

   Prova: Seja $(x_n) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$ e $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leq x_n$ para uma infinidade de índices$\}$, isto é, $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \forall\, m\, \exists\, n > m$ tal que $\alpha \leq x_n\}$. É óbvio que $a \in A$ e b majora A. Pelo axioma do supremo $\exists\, \beta$, supremo de A. Dado $\epsilon > 0$, para infinitos índices temos $\beta - \epsilon \leq x_n$, senão $\beta \leq \beta - \epsilon$ ↯ Na outra ponta, não há infinitos índices tais que $\beta + \epsilon < x_n$, senão $\beta + \epsilon \in A$ ↯ Logo, para infinitos índices $x_n \in (\beta - \epsilon, \beta + \epsilon)$ e, pelo Lema 1, há subsequência convergente.

   Em $\mathbb{C}$, sequências (z_n) limitadas geram duas em $\mathbb{R}$, $(Re\, z_n)$ e $(Im\, z_n)$, limitadas. Para $(Re\, z_{n_k})$ convergente, $(Im(z_{n_k}))$ tem subsequência convergente indexada por $I \subset \mathbb{N}$. Sob tal índexação as subsequências de $(Re(z_n))$, $Im(z_n)$ e (z_n) convergem $\blacksquare$

7. **Corolário** $(x_n) \subset \mathbb{K}$ converge se, e só se, o limite das subsequências convergentes é único.

   Prova: $(\Rightarrow)$ Segue da proposição.

   $(\Leftarrow)$ Seja p tal limite. Afirmação: (x_n) converge a p. Caso contrário, existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}, \exists\, n > m$, com $|x_n - p| > \epsilon$. Por indução, é trivial, há uma subsequência (x_{n_k}), $|x_{n_k} - p| > \epsilon$, que não têm, é óbvio, subsequência convergente a p. Porém, por ser limitada, têm subsequência convergente, que é subsequência de (x_n), e então o limite é p ↯

8. **Definição** Uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{K}$ é uma **sequência de Cauchy** se para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon, \forall\; n, m \geq N$.

9. **Proposição** Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{K}$ convergente é de Cauchy.

   Prova: Seja $p = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dado $\epsilon > 0$, arbitrário, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq N$. Logo, para $n, m \geq N$ temos $|x_n - x_m| \leq |x_n - p| + |p - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ $\blacksquare$

   O principal resultado nesta seção é que em $\mathbb{K}$ toda sequência de Cauchy é convergente. Em $\mathbb{R}$, tal teorema é equivalente ao Axioma do Supremo e portanto, não é válido em $\mathbb{Q}$.

10. **Teorema 2** Toda sequência de Cauchy, $(x_n) \subset \mathbb{C}$, é convergente.

    Prova: Façamo-la em $\mathbb{C}$. Afirmação: (x_n) é limitada. Seja N tal que $|x_n - x_m| < 1$ se $n, m \geq N$. Logo, se $n \geq N$, $|x_n - x_N| < 1$ e x_n pertence ao disco $D(x_N; 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_N| \leq 1\}$. Fora do disco há finitos pontos, contidos em um disco de raio R', seja $R = max(R', |x_N| + 1)$. É fácil ver que $(x_n) \subset D(0; R)$.

    Pelo teorema 1, existe (x_{n_k}) subsequência convergente a p. Afirmação: $\lim x_n = p$. Dado $\epsilon > 0$, existe N tal que $|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$, se $n, m \geq N$ e, $k_0 \in \mathbb{N}$ com $|x_{n_k} - p| < \frac{\epsilon}{2}$, se $k \geq k_0$. É possível, e escolhemos, $n_{k'}$ tal que $k' \geq k_0$ e $n_{k'} \geq N$. Assim, para $n \geq N$, $|x_n - p| \leq |x_n - x_{n_{k'}}| + |x_{n_{k'}} - p| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$ $\blacksquare$

11. **Exercícios**

    (a) Se $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^2} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^3} = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$, $\forall p \in \mathbb{N}$.
    Sugestão: Binômio de Newton.

    (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$.
    Sugestão: Para $n_0 \in \mathbb{N}$, $\frac{n_0}{a} > 2$. Escreva $\frac{n!}{a^n} = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \ldots\ldots$

Seja (x_n) em $\mathbb{R}$ e limitada; digamos, $\alpha \leq x_n \leq \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Consideremos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Temos $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset .... \supset X_n \supset ......$ Definindo $a_n = inf\, X_n$, $b_n = sup\, X_n$ temos:

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq .... \leq a_n \leq .... \leq b_n \leq ....b_2 \leq b_1 \leq \beta \quad .$$

As sequências (a_n) e (b_n) são limitadas e, respectivamente, crescente e decrescente e portanto, convergem. Dizemos que $a = \lim a_n$ e $b = \lim b_n$ são, respectivamente, o **limite inferior** e o **limite superior** de (x_n) e os denotamos por:

$$a = lim\, inf\, x_n \qquad , \qquad b = lim\, sup\; x_n \quad .$$

12. **Teorema 3** Seja (x_n) uma sequência limitada. Então, $lim\, inf x_n$ é o **menor valor de aderência** de (x_n) e $lim\, sup\; x_n$ é o **maior valor de aderência**.

    Prova Mostremos que $a = lim\, inf\, x_n$ é valor de aderência. Apliquemos o lema 1. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}, n_1 > n_0$, tal que $a - \epsilon < a_{n_1} \leq a < a + \epsilon$. Como $a_{n_1} = inf\, X_{n_1} < a + \epsilon$, existe $n \geq n_1$ tal que $a_{n_1} \leq a_n < a + \epsilon$ e portanto, $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

    Afirmação: se $c < a$, c não é valor de aderência. Como $c < a = lim\, inf\, x_n$ existe n_0 tal que $c < a_{n_0} = inf\, X_{n_0}$ e assim, para todo $n \geq n_0$ temos, $c < a_{n_0} \leq x_n$. Donde, $x_n \in [a_{n_0}, +\infty], \forall n \geq n_0$. Logo, não existe subsequência de (x_n) convergindo a c. O caso $lim\, sup\; x_n$ é redutível ao caso $\lim\, inf\, x_n$ bastando trocar (x_n) por $(-x_n)$ $\blacksquare$

13. **Corolário** Dada (a_n) em $\mathbb{R}$ e limitada, (a_n) converge se, e só se, $\lim\, inf\, x_n = lim\, sup\; x_n$.

14. **Teorema 4** Seja (a_n) uma sequência limitada em $(0, +\infty)$. Temos,

$$lim\, inf\, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim\, inf\, \sqrt[n]{a_n} \leq lim\; sup\, \sqrt[n]{a_n} \leq lim\; sup\, \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad .$$

    Em particular, existindo $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe também $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ e, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}$.

    Prova Basta provar a desigualdade $\lim\; sup\, \sqrt[n]{a_n} \leq\; lim\; sup\, \frac{a_{n+1}}{a_n}$ pois assim, para a sequência $(\frac{1}{a_n})$, teremos $\lim\; sup \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \leq \lim\; sup\, \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Consequentemente, das igualdades, $\lim\; sup \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\lim\;\, inf\, \sqrt[n]{a_n}}$ e $\lim\; sup\, \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{\lim\, inf \frac{a_{n+1}}{a_n}}$ segue a desigualdade sobre $lim\, inf$.

    É suficiente mostrarmos que se $c > q = lim\; sup\, \frac{a_{n+1}}{a_n}$ então $lim\; sup\, \sqrt[n]{a_n} \leq c$. Dado $c > q$, o maior valor de aderência de $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que, $n > p \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c$. Logo, para $n > p$,

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} \leq c\, , \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \leq c, ..., \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq c \quad .$$

    Multiplicando estas desigualdades membro a membro obtemos $\frac{a_n}{a_p} \leq c^{n-p} = \frac{c^n}{c^p}$. Pondo $k = \frac{a_p}{c^p}$ vemos que k independe de n e, $a_n \leq k\, c^n, \forall n > p$. Assim, $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{k}\, c, \forall n > p$. Portanto, como $\lim \sqrt[n]{k} = 1$, $\lim sup\, \sqrt[n]{a_n} \leq \lim\, sup(\sqrt[n]{k}\, c) = \lim \sqrt[n]{k} c = c$ $\blacksquare$

    Teorema 4 nos será útil também para determinarmos o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ em que uma série de potências, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, (a_n) uma sequência em $\mathbb{K}$, converge.