GABARITO P2 - CÁLCULO I

Licenciatura Física - Diurno

30 de junho de 2008

Professor Oswaldo Rio Branco

1 - Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1}$.

Solução:

(i) $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$.

(iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2}\frac{4+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0^+$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2}\frac{4+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0^-$.

(iv) $f'(x) = -\frac{4x^2+10x+4}{(x^2-1)^2}$, com raízes do numerador: $x = -2$ e $x = \frac{1}{2}$. Logo, se $x \neq \pm 1$,

$f' < 0$ ($f \searrow$) em $(-\infty, -2)$, $f' > 0$ ($f \nearrow$) em $(-2, \frac{1}{2})$ e $f' < 0$ ($f \searrow$) em $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

(v) Temos $f'' = \frac{(x^2-1)[8x^3+30x^2+24x]}{(x^2-1)^4}$. Analizemos o sinal de $g(x) = 8x^3 + 30x^2 + 24x + 10$. Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, o sinal no resultado de acordo com o sinal em ∞, g têm ao menos uma raíz real; $g(0) = 10$; $g'(x) = 24x^2 + 60x + 24 = 24(x+2)(x+\frac{1}{2})$.
Sendo $g(-2)$ e $g(-\frac{1}{2})$ positivos, g só cortará o eixo x uma vez, e para $x < -2$. Sendo $g(-3) < 0$ a raíz, α, está entre -3 e -2. Logo, $g(x) < 0$ se $x < \alpha$ e $g(x) > 0$ se $x > \alpha$. Assim,

$f'' < 0$ em $(-\infty, \alpha)$, $f'' > 0$ em $(\alpha, -1)$, $f'' < 0$ em $(-1, 1)$ e $f'' > 0$ em $(1, +\infty)$.

(vi) Como -1 e $+1$ α é o único ponto de inflexão. A única raíz de f é $-\frac{5}{4}$, e $f(0) = -5$.

(2) Determine os pontos (a, b) sobre a curva $y = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 8x + 12$ tais que a reta tangente em (a, b) seja paralela à reta $8x - y + \pi = 0$.

Resolução: Temos, m_T o coeficiente angular da tangente, é 8. Resolvamos a equação $4x^3 + 6x^2 - 4x + 8 = 8$. Isto é, $2x(2x^2 + 3x - 2) = 0$; logo, $x = 0$, $x = -2$ e $x = \frac{1}{2}$.
Os pontos são: $(0, 12)$, $(-2, -12)$ e $(\frac{1}{2}, 16 - \frac{3}{16})$.

(3) Determine a área da região entre os gráficos de $y = x^3 - x$, $y = sen\pi x$, $-1 \leq x \leq 1$.

Solução Temos funções ímpares e intervalo de integração simétrico em relação à origem. Basta calcular a área correspondente ao semi-eixo positivo. Em $[0,1]$, $sen\pi x \geq 0$ e $x(x^2-1) \leq 0$. Sendo A a área procurada temos:

$$A = 2[\int_0^1 sen\pi x\, dx - \int_0^1 (x^3 - x)dx] = 2[-\frac{cos\pi x}{\pi}|_0^1 - (\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2})|_0^1] =$$

$$= 2[-\frac{1}{\pi}(cos\pi x)|_0^1 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})] = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} \ .$$

(4) Calcule $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\, dx$.

Resolução: Dividindo os polinômios temos,

$$\frac{x^5+x+1}{x^3-8} = x^2 + \frac{8x^2+x+1}{x^3-8} = x^2 \ + \ \frac{8}{3}\frac{3x^2}{x^3-8} \ + \ \frac{x+1}{x^3-8},$$

$$\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3}ln|x^3-8| \ + \ \int \frac{x+1}{x^3-8}\, dx \ .$$

Notando que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, e determinando A, B e C tais

$$\frac{x+1}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} \ + \ \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \ ,$$

obtemos $A = 1/4$, $B = -1/4$ e $C = 0$. Assim,

$$\int \frac{x+1}{x^3-8}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\, dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{(x+1)^2+3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}ln|x-2| - \frac{1}{4}\left[\int \frac{x+1}{(x+1)^2+3}\, dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+3}\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}ln|x-2| - \frac{1}{8}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+3}\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2+3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}ln|x-2| \ - \ \frac{1}{8}ln[(x+1)^2+3] \ + \ \frac{1}{12}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx \ .$$

Calculemos a última integral,

$$\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx \ = \sqrt{3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx = \sqrt{3}arctg(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) \ + \ C \in \mathbb{R} \ .$$

Assim, obtemos:

$$\frac{x^3}{3} \ + \ \frac{8}{3}ln|x^3-8| \ + \ \frac{1}{4}ln|x-2| \ - \ \frac{1}{8}ln[(x+1)^2+3] \ + \ \frac{\sqrt{3}}{12}arctg(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) \ + \ C \in \mathbb{R} \ ,$$

ou, simplificando,

$$\frac{x^3}{3} \ + \ \frac{35}{12}ln|x-2| \ + \ \frac{61}{24}ln(x^2+2x+4) \ + \ \frac{\sqrt{3}}{12}arctg(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) \ + \ C \in \mathbb{R} \ ,$$