APOIO 3 - CÁLCULO I

Licenciatura Física - Diurno

1º SEMESTRE de 2008

Professor Oswaldo Rio Branco

(1) - Provemos: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + c,\ x \in (-1, +1),\ c \in \mathbb{R}$.

A função seno, definida no intervalo fechado $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ a valores em $[-1\,, +1]$, é inversível e sua inversa é denominada função arcoseno:

$$\arcsin : [-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}],\ \ \theta = \arcsin x\ .$$

Resolução 1.

Temos, $\sin \arcsin(x) = x, \forall x \in (-1, +1)$ e, derivando ambos os lados pela regra da cadeia,

$$(*) \qquad \sin'(\arcsin(x))\arcsin'(x) = 1\ ,$$

mas, $\sin'(\arcsin(x)) = \cos(\arcsin(x))$ e, se $\theta = \arcsin(x)$, temos $\sin\theta = x$ e $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$. Logo, $\sin'(\arcsin(x)) = \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ e, substituindo em $(*)$, encontramos a fórmula $\sqrt{1-x^2}\arcsin'(x) = 1$; donde,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

e completamos a primeira resolução.

Resolução 2.

Procedamos a substituição $x = \sin\theta\ ,\ \theta \in (\,-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Temos $\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta,\ \ dx = cos\theta\, d\theta$ e, substituindo (note que $cos\theta > 0$),

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} d\theta = \int \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} d\theta = \int d\theta = \theta + c = \arcsin x + c \quad \blacksquare$$

2 - Computemos $\int \sqrt{1-x^2}dx$. Seja $x = \sin\theta\ ,\ x \in (\,-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. Então $dx = \cos\theta d\theta$ e,

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int |cos\theta| \cos\theta d\theta = \int \cos^2\theta d\theta\ .$$

Mas, $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ e substituido na equação temos,

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{1}{2}(\theta + \frac{sen2\theta}{2}) + C\ , C \in \mathbb{R}\ .$$

Por relações trigonométricas temos (lembremos, $\cos\theta > 0$): $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$ e $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2x\sqrt{1-x^2}$. Protanto, concluímos (verifique derivando o resultado):

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\ ) + C, C \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

3 - Cálculo de $\int \sec\theta d\theta$.

Resolução 1. Tornemos o resultado natural. É claro que

$$(tg\theta + sec\theta)' = sec^2\theta + sec\theta tg\theta = sec\theta(tg\theta + sec\theta),$$

logo, $sec\theta = \frac{(tg\theta+sec\theta)'}{tg\theta+sec\theta}$ e $\int \sec\theta d\theta = \int \frac{(tg\theta+sec\theta)'}{tg\theta+sec\theta} d\theta$.

Fazendo então a substituição $u(\theta) = tg\theta + sec\theta$ temos, $\frac{du}{d\theta} = sec^2\theta + sec\theta tg\theta$. Assim, $u'(\theta) = (sec^2\theta + sec\theta tg\theta)d\theta$ e ainda,

$$\int \frac{(tg\theta + sec\theta)'}{tg\theta + sec\theta} d\theta = \int \frac{u'(\theta)}{u(\theta)} d\theta \ .$$

Mas, é fácil verificar a fórmula $\int \frac{u'(\theta)}{u(\theta)} d\theta = ln|u(\theta)| + C$ e então concluímos:

$$\int \sec\theta d\theta = \int \frac{u'(\theta)}{u(\theta)} d\theta = ln|u(\theta)| + C = ln|tg\theta + sec\theta| + C$$

Resolução 2. Encadeemos os resultados: (i) $tg'\theta = \sec^2\theta$, (ii) $\sec'\theta = \sec\theta tg\theta$ e, por último, a fórmula de fácil verificação (verifique):

$$(iii) \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + C \ , \ C \in \mathbb{R} \ .$$

Escrevamos então, por (i) e (ii),

$$\sec\theta = \frac{\sec\theta(sec\theta + tg\theta)}{sec\theta + tg\theta} = \frac{sec^2\theta + sec\theta tg\theta}{tg\theta + sec\theta} = \frac{(tg\theta + sec\theta)'}{tg\theta + sec\theta} \ ;$$

e assim, escrevendo $f(\theta) = tg\theta + tg\theta$ e utilizando (iii), temos

$$\int \sec\theta d\theta = \int \frac{(tg\theta + sec\theta)'}{tg\theta + sec\theta} d\theta = \int \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} d\theta \ = ln|f(\theta)| = ln|tg\theta + sec\theta| \ \blacksquare$$

4 - $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + cos\theta}\, d\theta$.

Temos: $0 \leq 1 + cos\theta \leq 2$ e a função $1 + cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, assume valores em $[0, 2]$ duas vezes; uma p/ $\theta \in [0, \pi]$ e outra p/ $\theta \in [\pi, 2\pi]$; em $[0, \pi]$ decresce de 2 a 0, em $[\pi, 2\pi]$ cresce de 0 a 2.

Podemos separar em duas integrais ou, melhor, calcular uma e multiplicar por 2 (justifique). Racionalizemos multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{1 - cos\theta}$:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + cos\theta}\, \frac{\sqrt{1 - cos\theta}}{\sqrt{1 - cos\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - cos^2\theta}}{\sqrt{1 - cos\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{|sen\theta|}{\sqrt{1 - cos\theta}}\, d\theta \ .$$

Logo,

$$I = 2\int_0^{\pi} \frac{|sen\theta|}{\sqrt{1 - cos\theta}}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \frac{sen\theta}{\sqrt{1 - cos\theta}}\, d\theta = 2(1 - cos\theta)^{\frac{1}{2}}|_0^{\pi} \ .$$

Por substituição ($u = 1 - cos\theta$, $du = sen\theta d\theta$), ou diretamente, 'enxergando a óbvia resposta',

$$I = 4(1 - cos\theta)^{\frac{1}{2}}|_0^{\pi} = 4[\sqrt{2} - (0) = 4\sqrt{2} \ \blacksquare$$

5 - $\int \sec^3\theta\, d\theta =$