APOIO 1 - CÁLCULO I -

Licenciatura Física - Diurno

1º SEMESTRE de 2008

Professor Oswaldo Rio Branco

Raízes de um Polinômio com Coeficientes Inteiros

Para pesquisarmos as possíveis raízes inteiras, ou racionais, de um polinômio P com coeficientes inteiros contamos com o resultado abaixo que afirma que uma raíz inteira, se existir, divide o termo independente e uma raíz racional, se existir, deve ser procurada entre os números da forma $\frac{p}{q}$, p e q inteiros e primos entre si, tais que p divide o termo independente e q divide o termo dominante.

Proposição Seja $P = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$ um polinômio de grau n com coeficientes, $a_i,\ 0 \leq i \leq n$, inteiros. Temos os resultados abaixo.

(i) Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ é raíz então $\alpha | a_o$.

(ii) Se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ mdc(p,q) = 1$, é raíz então p divide a_o e q divide a_n.

Demonstração

(i) Segue de $P(\alpha) = 0$ que $a_n\alpha^n\ +\ ....\ +\ a_1\alpha = -a_o$. Logo,

$$\alpha(a_n\alpha^{n-1}\ + ...\ +\ a_2\alpha\ +\ a_1) = -a_o$$

e portanto $\frac{a_o}{\alpha} \in \mathbb{Z}$ pois a_i e α^j são inteiros, $\forall\ i$, $\forall\ j$, e $\frac{a_o}{\alpha} = -(a_n\alpha^{n-1}\ + ...\ +\ a_2\alpha\ +\ a_1)$. Isto é, α divide a_o.

(ii) Neste caso temos, $P(\alpha) = 0$, donde

$$a_n\frac{p^n}{q^n} +\ .....+\ a_1\frac{p}{q}\ +\ a_o = 0$$

e, multiplicando por q^n,

$$(*)\quad a_n p^n\ + ...\ + a_1 p q^{n-1} = -a_o q^n\ .$$

Assim, colocando p em evidência temos $p(a_n p^{n-1} + ... + a_1 q^{n-1}) = -a_o q^n$. Logo, p divide $a_o q^n$ e portanto, como $mdc(p,q) = 1$, p divide a_o.

Analogamente, por $(*)$, temos

$$a_{n-1}p^{n-1}q + ... +\ a_1 p q^{n-1} + a_o q^n = -a_n p^n\ ,$$

e assim, pondo q em evidência, temos $q(a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_o q^{n-1}) = -a_n p^n$. Consequentemente q divide $a_n p^n$ e então, como $mdc(p,q) = 1$, segue que q divide a_n $\blacksquare$

Fórmulas trigonométricas

Verifique as fórmulas abaixo, assumindo ou a fórmula 1 ou a 2, que podem ser encontradas em livros de segundo grau. Mantenha-as consigo e familiarize-se. A terceira é útil para a demonstração das propriedades de reflexão das cônicas : parábola, elipse e hipérbole. As fórmulas 6, 7, 11 e 12 aparecem naturalmente quando da mudança de variável visando o cômputo de determinadas integrais. As demais surgem em inúmeras situações, sendo fundamentais quando do estudo das séries de Fourier, que se trata da aproximação de uma função periódica qualquer por uma soma de funções trigonométricas.

1. $cos(\alpha+\beta) = \ cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$
2. $sen(\alpha+\beta) = \ sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha$
3. $tg(\alpha+\beta) = \ \frac{tg\alpha \ + \ tg\beta}{1 \ - \ tg\alpha tg\beta}$
4. $sec^2\theta = \ 1 \ + \ tg^2\theta$
5. $cossec^2\theta = \ 1 \ + \ cotg^2\theta$
6. $cos2\theta = \ cos^2\theta - sen^2\theta$
7. $sen2\theta = \ 2sen\theta cos\theta$
8. $cos^2\theta = \ \frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{2}cos2\theta$
9. $sen^2\theta = \ \frac{1}{2} \ - \ \frac{1}{2}cos2\theta$
10. Fórmulas de prostaférese (transformam produto em adição ou subtração)

(a) $sen\alpha cos\beta = \ \frac{1}{2}[\ sen(\alpha+\beta) \ + \ sen(\alpha-\beta)\ ]$

(b) $cos\alpha cos\beta = \ \frac{1}{2}[\ cos(\alpha+\beta) \ + \ cos(\alpha-\beta)\ ]$

(c) $sen\alpha sen\beta = \ \frac{1}{2}[\ cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)\ ]$

11. $senx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 \ + \ tg^2\frac{x}{2}}$, se $cos\frac{x}{2} \neq 0$
12. $cosx = \frac{1 \ - \ tg^2\frac{x}{2}}{1 \ + \ tg^2\frac{x}{2}}$, se $cos\frac{x}{2} \ \neq 0$.

Progressão Geométrica

Dado $r > 0$ consideremos a soma $S_n = 1 + \ .... \ + \ r^{n-1}$, a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão r. Multiplicando S_n por r temos $rS_n = r + \ .... + r^{n-1} + r^n$ e portanto, $S_n - rS_n = 1 - r^n$. Assim, pondo S_n em evidência obtemos a fórmula

$$(*) \quad S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} \ , r \neq 1 \ .$$

Tal fórmula é extremamente útil e dela podemos obter convergência de séries, identidades polinomiais, identidades algébricas, etc.

(1) Apliquemo-la em polinômios. Considerando x uma variável real temos, por (*), que

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + \ .... \ + \ x^{n-1}, \ x \neq 1 \ ,$$

e assim,

$$(**) \quad x^n - 1 = (x - 1)(1 + x \ + \ .... \ + x^{n-1}), \forall \ x \in \mathbb{R} \ .$$

(2) Identidade algébrica: sejam a e b dois números reais, $a \neq b$, por (*) temos

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= a^n[\ 1 - (\frac{b}{a})^n \ ] = a^n(1 - \frac{b}{a})[\ 1 + \ .... \ + (\frac{b}{a})^{n-1} \ ] = \\ &= (a - b)a^{n-1}[\ 1 + \ .... + \ \frac{b^i}{a^i} \ + \ .... \ + \ (\frac{b}{a})^{n-1} \ ] \ = \\ &= (a - b)[\ a^{n-1} + \ .... + \ a^{n-1-i}b^i \ + \ .... \ + \ b^{n-1} \ ] \\ &= (a - b)(a^{n-1} + \ a^{n-2}b \ + \ ..... \ + \ ab^{n-2} \ + \ b^{n-1}) \end{aligned}$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + \ a^{n-2}b \ + \ ..... \ + \ ab^{n-2} \ + \ b^{n-1}) \ .$$

(3) Calculemos a série geométrica de razão r, $-1 < r < 1$. Observemos que $r^n \to 0$ quando $n \to +\infty$, isto é, r^n tende a zero quando n tende a mais infinito ou, em símbolos,

$$\lim_{n \to +\infty} r^n = 0 \ .$$

Logo, as somas parciais da série geométrica

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} r^n = 1 + \ r + \ + r^n \ + \ ....$$

são as somas finitas de uma progressão geométrica de razão r, $S_n = 1 + \ r \ + \ .... \ + \ r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ e, como é natural, definimos

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} r^n = \lim_{n \to +\infty} S_n \ .$$

Portanto, temos

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} r^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \ ,$$

pois r^{n+1} tende a zero quando n tende a $+\infty$.

Por exemplo, temos

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} (\frac{1}{2})^n = 2 \ .$$

Exercício extra A equação geral de uma reta no plano cartesiano é: $D : ax + by + c = 0$; a ou b não nulo. Dado um ponto $P_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, a distância de P_o à reta D é :

$$|PD| = \frac{|\ ax_o \ + \ by_o \ + \ c\ |}{\sqrt{a^2+b^2}} \ .$$

Prova Seja m_r o coeficiente angular de uma reta r qualquer. As retas, designadas por S, perpendiculares à reta D, tem coeficiente angular m_S tal que $m_S.m_D = -1$. Logo, utilizando o parametro d, uma equação geral de tais retas é:

$S \ : \ -bx + ay + d = 0, \ d \in \mathbb{R}$.

Entre tais retas perpendiculares a D queremos a que passe por $P_o = (x_o, y_o)$. Isto é, $-bx_o + ay_o + d = 0$ e, portanto, determinamos $d = bx_o - ay_o$. Temos então a reta

$$S_{P_o} \ : -bx + ay + (bx_o - ay_o) = 0$$

Para determinarmos o ponto $P_1 = (x_1, y_1) = D \cap S_{P_o}$ resolvemos o sistema:

$$(*) \begin{cases} ax + by = -c \\ -bx + ay = ay_o - bx_o \ , \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a, a segunda por $-b$, e então somando-as temos :
$x_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(b^2x_o - aby_o - ac)$ e,
agora, multiplicando a primeira por b e a segunda por a e somando-as concluímos :
$y_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-abx_o + a^2y_o - bc)$.

Computemos agora o quadrado da distância de $P_o = (x_o, y_o)$ a $P_1 = (x_1, y_1)$:
$|P_oP_1|^2 = (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 =$
$= [\ x_o \ - \ \frac{1}{a^2+b^2}(\ b^2x_o - aby_o - ac\ )\ ]^2 \ + \ [\ y_o \ - \ \frac{1}{a^2+b^2}(\ -abx_o + a^2y_o - bc\ )\ ]^2 =$
$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\ (\ a^2x_o + aby_o \ + \ ac\ )^2 \ + \ (\ abx_o \ + \ b^2y_o + bc\ )^2\ ] =$
$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\ a^2(ax_o \ + \ by_o \ + \ c)^2 \ + \ b^2(ax_o \ + \ by_o \ + \ c)^2\ ] =$
$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\ (a^2+b^2)\ (ax_o \ + \ by_o \ + \ c)^2\ ] =$
$= \frac{(ax_o \ + \ by_o \ + \ c)^2}{a^2+b^2}$, donde segue a tese.

segunda prova Reescrevendo (*) na notação matricial temos:

$$(**) \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix} .$$

É fácil constatar que dada uma matriz inversível,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

sua inversa é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução de (*) é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix}.$$

Logo, $x_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-ac - aby_o + b^2x_o)$ e $y_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-bc + a^2y_o - abx_o)$ e a demonstração segue como a anterior ■