Exercício $2(c)$ **- Elipse :** $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$

Este é apenas um resumo, com comentários, da solução. Façam um esboço da elipse, mostrando o centro, os focos, semi-eixos, vértices e retas diretrizes.

Temos, $4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) - 32 = 4(x-1)^2 + 3(y+2)^2 - 48$. E assim, a quádrica dada é a elipse

$$\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1 \quad .$$

Logo, o centro é $C = (1, -2)$, o semi- eixo maior é $b = 4$, o semi-eixo menor é $a = \sqrt{12}$ e, ainda, $c^2 = b^2 - a^2 = 16 - 12 = 4$, o que implica $c = 2$.

Portanto, os focos são $F_1 = (1, -4)$ e $F_2 = (1, 0)$ e os vértices são
$V_1 = (1 - \sqrt{12}, -2)$, $\qquad V_2 = (1 + \sqrt{12}, -2)$,
$V_3 = (1, 2)$ $\quad$ e $\qquad V_4 = (1, -6)$.

A excentricidade é $e = \frac{c}{b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

As retas diretrizes são $y - (-2) = y + 2 = \pm\frac{b}{e} = \pm\frac{4}{1/2} = \pm 8$. Logo,
$D_1 \ : y = -10$ $\quad$ e $\qquad D_2 \ : y = 6$; fim do exercício.

Não é mister efetuarmos as verificações visto que todos os resultados estão já provados na teoria mas em um primeiro contato com este tópico é prudente faze-las, até mesmo para melhor compreensão da teoria. Apresentarei as então uma para cada caso: parábola, elipse e hipérbole.

Mostremos que P satisfaz a equação dada se e somente se $|PF_2| = e|PD_2|$. Notemos que esta segunda equação é equivalente a $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = e|y - 6|$, $e = \frac{1}{2}$, a qual, elevando ao quadrado, é equivalente a

$4(x-1)^2 + 4y^2 = (y-6)^2 = y^2 - 12y + 36$

ou,

$4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 4 + 36 = 0$, que é a equação da elipse dada.

Observando que escolhemos o foco mais próximo à reta diretriz vemos que uma outra possibilidade para escrevermos a equação da elipse , utilizando a outra reta diretriz, é
$|PF_1| = e|PD_1|$, pois desenvolvendo tal equação obtemos

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} = \frac{1}{2}|y + 10|$

ou,

$4(x-1)^2 + 4(y+4)^2 = y^2 + 20y + 100$. Isto é,

$4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 + 32y + 64 = y^2 + 20y + 100$, que é a equação da dada elipse.

Também obtemos a equação da elipse através da soma das distância aos focos:

$|PF_1| + |PF_2| = 2b$. Isto é, $\sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 8$ pois passando o segundo radical para o segundo membro e então elevando ao quadrado concluímos que

$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 64 - 16\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + (x-1)^2 + y^2$ e desta obtemos,

$8y + 16 = 64 - 16\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ou,

$16\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 48 - 8y$, que simplificando resulta : $2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 6 - y$; mais uma vez elevando ao quadrado chegamos à equação

$4[(x-1)^2 + y^2] = 36 - 12y + y^2$ e, finalmente, expandindo esta temos mais uma vez a equação da elipse $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y = 32$ $\blacksquare$

Exercício extra A equação geral de uma reta no plano cartesiano é: $D : ax + by + c = 0$; a ou b não nulo. Dado um ponto $P_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, a distância de P_o à reta D é :

$$|PD| = \frac{|\ ax_o\ +\ by_o\ +\ c\ |}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

Prova Seja m_r o coeficiente angular de uma reta r qualquer. As retas, designadas por S, perpendiculares à reta D, tem coeficiente angular m_S tal que $m_S.m_D = -1$. Logo, utilizando o parametro d, uma equação geral de tais retas é:
$S\ :\ -bx + ay + d = 0,\ d \in \mathbb{R}$.

Entre tais retas perpendiculares a D queremos a que passe por $P_o = (x_o, y_o)$. Isto é, $-bx_o + ay_o + d = 0$ e, portanto, determinamos $d = bx_o - ay_o$. Temos então a reta

$$S_{P_o}\ : -bx + ay + (bx_o - ay_o) = 0$$

Para determinarmos o ponto $P_1 = (x_1, y_1) = D \cap S_{P_o}$ resolvemos o sistema:

$$(*) \begin{cases} ax + by = -c \\ -bx + ay = ay_o - bx_o\ , \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a, a segunda por $-b$, e então somando-as temos :
$x_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(b^2x_o - aby_o - ac)$ e,
agora, multiplicando a primeira por b e a segunda por a e somando-as concluímos :
$y_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-abx_o + a^2y_o - bc)$.

Computemos agora o quadrado da distância de $P_o = (x_o, y_o)$ a $P_1 = (x_1, y_1)$:
$|P_oP_1|^2 = (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 =$
$= [\ x_o\ -\ \frac{1}{a^2+b^2}(\ b^2x_o - aby_o - ac\ )\ ]^2\ +\ [\ y_o\ -\ \frac{1}{a^2+b^2}(\ -abx_o + a^2y_o - bc\ )\ ]^2 =$
$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\ (\ a^2x_o + aby_o\ +\ ac\ )^2\ +\ (\ abx_o\ +\ b^2y_o + bc\ )^2\ ] =$
$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\ a^2(ax_o\ +\ by_o\ +\ c)^2\ +\ b^2(ax_o\ +\ by_o\ +\ c)^2\ ] =$
$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\ (a^2+b^2)\ (ax_o\ +\ by_o\ +\ c)^2\ ] =$
$= \frac{(ax_o\ +\ by_o\ +\ c)^2}{a^2+b^2}$, donde segue a tese.

segunda prova Reescrevendo (*) na notação matricial temos:

$$(**)\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix}.$$

É fácil constatar que dada uma matriz inversível,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

sua inversa é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{AD - BC}\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução de (*) é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix}.$$

Logo, $x_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-ac - aby_o + b^2x_o)$ e $y_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-bc + a^2y_o - abx_o)$ e a demonstração segue como a anterior $\blacksquare$

Exercício 3 - Hipérbole - Dada a quádrica $xy = 1$ e efetuando a rotação R_θ, $\theta = \frac{\pi}{4}\ rad$, temos

$$\begin{cases} x &= ucos\theta - vsen\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v) \\ y &= usen\theta + vcos\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \ . \end{cases}$$

Tal rotação em notação matricial é descrita como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Logo, de $xy = 1$ obtemos $u^2 - v^2 = 2$ e assim a equação reduzida da hipérbole:

$$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1 \ .$$

Neste caso temos $a = b = \sqrt{2}$ e a hipérbole é dita equilátera.

O centro é $C = (0,0)$ e, de $c^2 = a^2 + b^2$, temos $c = 2$.

Consequentemente, os focos são, nas coordenadas u e v, $f_1 = (-2,0)$ e $f_2 = (2,0)$ e, nas coordenadas cartesianas x e y, $F_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $F_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Os vértices são, nas coordenadas u e v, $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$ e,
nas coordenadas x e y: $V_1 = (-1,-1)$ e $V_2 = (1,1)$.

A excentricidade é $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

As assíntotas são, nas coordenadas u e v, as bissetrizes $v = \pm\ u$; as quais correspondem, nas coordenadas x, y, aos eixos Ox e Oy : $v = u$ a $x = 0$ e, $v = -u$ a $y = 0$.

As retas diretrizes são, nas coordenadas u e v,
$d_1 : u = -\frac{a}{e} = -\ 1$ e $d_2 : u = +\frac{a}{e} = +\ 1$;
as quais correspondem, respectivamente, nas coordenadas x e y às retas (verifique)
$D_1 : y = -x - \sqrt{2}$ e $D_2 : y = -x + \sqrt{2}$; fim do exercício.

Verificações Mostremos que a equação $xy = 1$ é equivalente a $|PF_1| = e|PD_1|$ ou seja, utilizando as coordenadas u e v provemos que $u^2 - v^2 = 2$ é equivalente a $|Pf_1| = e|Pd_1|$.

Temos que esta última, $\sqrt{(u+2)^2 + v^2} = \sqrt{2}|u+1|$, é equivalente a
$(u+2)^2 + v^2 = 2(u+1)^2$

ou, expandindo,

$u^2 + 4u + 4 + v^2 = 2u^2 + 4u + 2$

que é exatamente a equação da hipérbole nas coordenadas u e v.

Uma outra prova pode ser obtida utilizando as coordenadas x e y. Utilizemos que a distância de um ponto $P_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ à reta $D :\ ax + by + c = 0$, a ou b não nulo, é dada por:

$$|P_oD| = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ .$$

Assim, $|PF_1| = e|PD_1|$ é equivalente a $\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}\frac{|x+y+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}$, a qual equivale a

$(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2 = (x+y+\sqrt{2})^2$, ou seja, expandindo esta,

$x^2+2\sqrt{2}x+2+y^2+2\sqrt{2}y+2 = x^2+y^2+2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+2xy$; isto é,

$2 = 2xy$, que é a equação dada: $xy = 1$. Analogamente prova-se que $|PF_2| = e|PD_2|$ (verifique).

Verifiquemos que a quádrica $xy = 1$ é também dada pelas equações $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$. Elevando estas duas últimas equações ao quadrado temos que elas são equivalentes às equações

$\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2} = \pm 2\sqrt{2} + \sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2}$,

com os sinais correspondentes (de forma natural); e estas equivalentes às,

$(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2 = 8 \pm 4\sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2} + (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2$,

expandindo e cancelando obtemos

$2\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y = 8 \pm 4\sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} - 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y$ e,

isolando o radical no segundo membro e dividindo por 4 temos

$\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y - 2 = \pm\sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2}$

estas duas equações são equivalentes a uma única equação:

$|\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y - 2| = \sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2}$

agora, dividindo por $\sqrt{2}$ e elevando ao quadrado vemos que esta última equivale a

$(x+y-\sqrt{2})^2 = (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2$,

a qual expandindo escrevemos

$x^2+y^2+2-2\sqrt{2}\,x-2\sqrt{2}\,y+2xy = (x^2-2\sqrt{2}\,x+2)+(y^2-2\sqrt{2}\,y+2)$ e então,

observando que os termos variáveis, não mistos, se cancelam chegamos à equação

$2+2xy = 2+2$,

que é justamente a equação inicial $xy = 1$ ■

Exercício 7 (2) - Parábola : $y^2 = 36x$. A menos dos eixos trocados esta equação está em sua forma padrão.

Assim, temos $p = 9$, o eixo de simetria é o eixo Ox, o foco é $F = (9,0)$, a reta diretriz é $D : x = -9$ e o vértice é $O = (0,0)$. Mostremos que a equação $|PD| = |PF|$ define a parábola. Reescrevendo $|PD| = |PF|$ obtemos $|x+9| = \sqrt{(x-9)^2+y^2}$, a qual é equivalente a $|x+9|^2 = (x-9)^2+y^2$;

isto é, expandindo,

$x^2+18x+81 = x^2-18x+81+y^2$ ou ainda, $36x = y^2$ ■

Exercício 5 (g) - Parábola : $x^2+2xy+y^2+8x-8y=\sqrt{2}$ **.** Eliminemos o termo misto efetuando a rotação R_θ , onde $cotg2\theta=\frac{A-C}{B}=0$; isto é, $\theta=\frac{\pi}{4}$. Em notação matricial temos,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} .$$

De tal equação matricial obtemos os sistemas de transformações de coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u'-v') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u'+v') \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x+y = \sqrt{2}\,u' \\ x-y = -\sqrt{2}\,v' . \end{cases}$$

Rescrevendo a equação da parábola obtemos $(x+y)^2+8(x-y)=\sqrt{2}$; e desta, mudando as variáveis, deduzimos $(\sqrt{2}u')^2-8\sqrt{2}v' = \sqrt{2}$ e então concluímos: $2u'^2-8\sqrt{2}v' = \sqrt{2}$. Logo, simplificando, chegamos à equação $\sqrt{2}u'^2-8v'=1$ a qual, pela translação

$$\begin{cases} u = u' \\ v = v' + \frac{1}{8} , \end{cases}$$

torna-se $v=\frac{\sqrt{2}}{8}u^2$ ou, em forma padrão, $u^2=4\sqrt{2}v$.

Nas coordenadas u e v o eixo de simetria é o eixo v, isto é, $u=0$, o vértice é $(0,0)$, o foco é $f=(0,\sqrt{2})$ e a reta diretriz é $d: v=-\sqrt{2}$.

Nas coordenadas u', v' o eixo de simetria é $v'=-\frac{1}{8}$, o vértice é $(0,-\frac{1}{8})$, o foco é $f'=(0,\sqrt{2}-\frac{1}{8})$ e a reta diretriz é $d': v'=-\sqrt{2}-\frac{1}{8}$.

Nas coordenadas x e y o eixo de simetria é $r:\ y-x=-\frac{\sqrt{2}}{8}$, o vértice é $V=(\frac{\sqrt{2}}{16},-\frac{\sqrt{2}}{16})$, o foco é $F=(\frac{\sqrt{2}}{16}-1, 1-\frac{\sqrt{2}}{16})$ e, sendo $y-x=\sqrt{2}\,v'$, a reta diretriz é $D:\ y-x=-2-\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Verificação : temos que $|PD|=|PF|$ se e somente se $|PD|^2=|PF|^2$ ou seja,
$\left(\frac{|y\ -\ x\ +\ 2\ +\ \frac{\sqrt{2}}{8}|}{\sqrt{1^2+1^2}} \right)^2 = [\ x+(1-\frac{\sqrt{2}}{16})\ ]^2\ +\ [\ y-(1-\frac{\sqrt{2}}{16})\ ]^2$
isto é,
$\frac{1}{2}[\ y^2\ +\ x^2\ +\ (2+\frac{\sqrt{2}}{8})^2\ -\ 2xy\ +\ 2y(2+\frac{\sqrt{2}}{8})-2x(2+\frac{\sqrt{2}}{8})\ ] =$
$x^2\ +\ 2x(1-\frac{\sqrt{2}}{16})\ +\ (1-\frac{\sqrt{2}}{16})^2\ +\ y^2\ -\ 2y(1-\frac{\sqrt{2}}{16})\ +\ (1-\frac{\sqrt{2}}{16})^2$
ou ainda,
$y^2\ +\ x^2\ +\ (2+\frac{\sqrt{2}}{8})^2-2xy\ +\ 2y(2+\frac{\sqrt{2}}{8})\ -\ 2x(2+\frac{\sqrt{2}}{8}) =$
$=\ 2x^2\ +\ 2y^2+\ 4x(1-\frac{\sqrt{2}}{16})-\ 4y(1-\frac{\sqrt{2}}{16})\ +\ 4(1-\frac{\sqrt{2}}{16})^2,$
que reescrevemos como
$y^2\ +\ x^2\ +\ 4(1+\frac{\sqrt{2}}{16})^2-2xy+\ 4y\ +\frac{\sqrt{2}}{4}y-4x-\frac{\sqrt{2}}{4}x =$
$=\ 2x^2\ +\ 2y^2\ +\ 4x-\frac{\sqrt{2}}{4}x\ -\ 4y\ +\ \frac{\sqrt{2}}{4}y\ +\ 4(1-\frac{\sqrt{2}}{16})^2$
e então, passando o primeiro membro para o segundo, concluímos que
$x^2\ +\ 2xy\ +\ y^2\ +\ 8x\ -\ 8y\ +\ 4(1-\frac{\sqrt{2}}{16})^2\ -\ 4(1+\frac{\sqrt{2}}{16})^2=0,$
a qual é a equação da quádrica dada pois
$4(1-\frac{\sqrt{2}}{16})^2\ -\ 4(1+\frac{\sqrt{2}}{16})^2=-8\frac{\sqrt{2}}{16}-8\frac{\sqrt{2}}{16}=-\sqrt{2}$ ■

Exercício 4 - Elipse : $17x^2 \ - \ 12xy \ + \ 8y^2 \ - \ 80 = 0$.

O ângulo de rotação θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, é dado por $cotg 2\theta = \frac{A-C}{B} = -\frac{3}{4}$.

Logo, de $cossec^2 2\theta = 1 \ + \ cotg^2 2\theta = \frac{25}{16}$ e pela relação trigonométrica fundamental segue

$$sen^2 2\theta = \frac{16}{25} \quad , \quad cos^2 2\theta = \frac{9}{25}$$

e, devido à escolha de θ ,

$$sen 2\theta = \frac{4}{5} \quad , \quad cos 2\theta = -\frac{3}{5} \ .$$

Assim, de $-\frac{3}{5} = \ cos 2\theta \ = \ cos^2\theta - sen^2\theta \ = \ 1 - 2sen^2\theta$, temos :

$$sen^2\theta = \frac{4}{5} \quad , \quad cos^2\theta = \frac{1}{5}$$

,

e portanto, devido à escolha de θ,

$$sen\theta = 2\frac{\sqrt{5}}{5} \quad e \quad cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \ .$$

Para esboçarmos a quádrica é útil calcularmos a tangente de θ. Neste caso temos,

$$tg\theta = 2 \ .$$

A transformação $R_\theta = R_\theta(x, y)$ é dada pela equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -2\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 2\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} =$$

Pelas fórmulas sintéticas para a mudança de coeficientes quando de uma rotação:

$$\begin{cases} A' = Acos^2\theta + \frac{B}{2} sen 2\theta + Csen^2\theta \\ B' = (C - A) sen 2\theta + Bcos 2\theta \\ C' = Asen^2\theta - \frac{B}{2} sen 2\theta + Ccos^2\theta \\ D' = Dcos\theta + Esen\theta \\ E' = -Dsen\theta + Ecos\theta \\ F' = F \ ; \end{cases}$$

temos $D' = E' = 0$, $B' = 0$, $F' = -80$ e, ainda,

$A' = \frac{17}{5} - \frac{24}{5} + \frac{32}{5} \ = \ 5$ e $C' = \frac{28}{5} + \frac{24}{5} + \frac{8}{5} = 20$.

Efetuando a rotação a curva passa a ser descrita por $5u^2 + \ 20v^2 = \ 80$ ou, ainda,

$$\frac{u^2}{4^2} + \frac{v^2}{2^2} = 1 \ ,$$

que é a equaçao em forma padrão de uma elipse.

Nas coordenadas u e v o centro é $(0, 0)$, o semi-eixo maior, ao logo do eixo u, é $a = 4$, o semi-eixo menor, ao longo do eixo v, é $b = 2$.

Ainda mais, $c^2 = 16 - 4 = 12$ e então, $c = 2\sqrt{3}$. Logo, os focos são, nas coordenadas u e v,

$$f_1 = (2\sqrt{3}, 0) \quad , \quad f_2 = (-\,2\sqrt{3}, 0)\ .$$

As coordenadas dos focos, no sistema x, y, são dadas por

$$F_i \equiv \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pm\,2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} \pm\,2\sqrt{3} \\ \pm\,4\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

e assim, correspondendo f_i a F_i, $i = 1, 2$, e também os sinais, temos

$$F_1 = (\ \frac{2}{5}\sqrt{15}\ ,\ \frac{4}{5}\sqrt{15}\ ) \quad F_2 = (\ -\ \frac{2}{5}\sqrt{15}\ ,\ -\ \frac{4}{5}\sqrt{15}\ )\ .$$

A excentricidade é :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

As retas diretrizes são, nas coordenadas u e v,

$$d_1 : u = \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad , \quad d_2 : u = -\frac{8\sqrt{3}}{3}\ .$$

Obs Estou utilizando a notação segundo a qual a diretriz d_i é a mais próxima ao foco f_i.
No sistema x , y, as coordenadas da reta diretriz d_1 passam a ser dadas por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{8\sqrt{3}}{3} \\ v \end{bmatrix}, v \in \mathbb{R}\ ,$$

sendo que tal equação matricial é equivalente ao sistema linear 2x2

$$\begin{cases} \sqrt{5}\ x = \ \frac{8\sqrt{3}}{3} - \ 2v \\ \sqrt{5}\ y \ = \ \frac{16\sqrt{3}}{3} + \ v\ , \end{cases}$$

o qual é então resolvido, nas incógnitas x e y, ao eliminarmos a variável v; o que é obtido ao multiplicarmos a segunda equação por 2 e então somando-a com a primeira equação:

$$\sqrt{5}\ x \ + \ 2\sqrt{5}\ y \ = \ \frac{40\sqrt{3}}{3}\ .$$

Assim, temos que a reta diretriz D_1 é dada por

$$D_1 : x + 2y = \frac{8\sqrt{15}}{3}\ .$$

Verificação Mostremos que $|PF_1| = e|PD_1|$ equivalente a $17x^2 \ - \ 12xy \ + \ 8y^2 \ - \ 80 = 0$.

Elevando ao quadrado ambos os membros temos $|PF_1|^2 = \frac{3}{4}|PD_1|^2$, e expandindo obtemos:

$$(\ x - \frac{2}{5}\sqrt{15}\ )^2 \ + \ (\ y - \frac{4}{5}\sqrt{15}\ )^2 \ = \ \frac{3}{4}(\frac{|x + 2y - \frac{8\sqrt{15}}{3}|^2}{1 + 2^2})\ ,$$

o que equivale a,

$$20(x^2 - \frac{4}{5}\sqrt{15}\ x + \frac{12}{5} + y^2 - \frac{8}{5}\sqrt{15}\ y + \frac{48}{5}) = 3(x^2 + 4y^2 + \frac{320}{3} + 4xy - \frac{16\sqrt{15}}{3}\ x - \frac{32\sqrt{15}}{3}\ y);$$

isto é,

$$20x^2 - 16\sqrt{15}\ x + 48 + 20y^2 - 32\sqrt{15}\ y + 192 = 3x^2 + 12y^2 + 320 + 12xy - 16\sqrt{15}\ x - 32\sqrt{15}\ y;$$

que é, após os devidos cancelamentos, a equação original ■

IMPORTANTE Fácilmente computamos os coeficientes, evitando tantos cálculos trigonométricos, se a equação da quádrica não apresenta termos de grau 1; isto é, quando $D = E = 0$.

Sendo este o caso, temos que para toda rotação os coeficientes D' e E' serão também nulos (vide fórmulas para os coeficientes) e o coeficiente F não muda.

Aplicando a rotação que elimina o termo misto, o coeficiente B' é também nulo.

Por último, e mais importante, os coeficientes A' e C' podem ser calculados trivialmente (mesmo se houver termo de grau 1) aplicando a Proposição 0.2 (v. notas p. 49).

Proposição Os coeficientes A' e C' para a específica rotação que elimina o termo misto são raízes do polinômio característico associado a quádrica,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} A-\lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A+C)\lambda - \frac{\Delta}{4}, \quad \Delta = B^2 - 4AC \ .$$

Observação Se houver termos de grau 1, é conveniente : primeiro, eliminá-los (se possível) e em seguida o termo misto. Assim procedendo evitamos vários cálculos trigonométricos.

Assim, no exercício 4 ($17x^2 - 12xy + 8y^2 - 80 = 0$) temos :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 17-\ \lambda & -6 \\ -\ 6 & 8-\ \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda + 100.$$

Para determinarmos as raízes escrevemos :
$\lambda^2 - 25\lambda \ + \ 100 = (\lambda - \frac{25}{2})^2 - \frac{625}{4} + 100$. Logo, temos
$(\lambda - \frac{25}{2})^2 = \frac{225}{4} = \frac{9\times 25}{4}$; e portanto, extraindo a raíz quadrada,
$|\lambda - \frac{25}{2}| = \frac{15}{2}$; donde concluímos que
$\lambda = \frac{25}{2} \pm \frac{15}{2}$ e, finalmente, $\lambda = 5$ ou $\lambda = 20$.

Assim, determinamos quais são as raízes e agora precisamos saber qual delas é A' (ou C'). Utilizemos a relação, também à página 49

$$cos 2\theta = \frac{A-C}{A'-C'} \ ,$$

que informa: se 2θ pertence ao primeiro quadrante ($cos2\theta > 0$) a diferença $A'-C'$ terá o mesmo sinal que a diferença $A - C$ e dizemos que a "ordem"é preservada ; isto é, se A é menor (ou maior) que C então A' é menor (ou maior) que C', respectivamente. Analogamente, temos : se 2θ pertence ao segundo quadrante ($cos2\theta < 0$) então esta "ordem"é invertida.

Retornemos ao exercício.

Como já vimos, $cos2\theta = -\frac{3}{5}$ e , ainda, $A = 17$ e $C = 8$. Logo, como devemos ter

$$-\frac{3}{5} = \frac{9}{A'-C'} \ ,$$

segue que $A' = 5$ e $C' = 20$ $\blacksquare$

(5) (a) $x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$ (resolução iniciando com translação)

Como $\Delta = B^2 - 4AC \neq 0$, podemos (v. notas, pp. 50, 51) eliminar os termos de grau 1 com uma translação. Aqui, apresento matricialmente os cálculos e enfatizo a utilidade do discriminante tanto para a translação como para a identificação da quádrica.

Seja $Q(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3y - 6$, x e y reais.

Substituindo $u' = x - h$ e $v' = y - k$, temos

$(u'+h)^2 + (u'+h)(v'+k) + (v'+k)^2 - 3(v'+k) - 6 =$

$u'^2 + u'v' + v'^2 + (2h+k)u' + (h+2k-3)v' + (h^2 + hk + k^2 - 3k - 6)$,

e em notação matricial, sendo M a matriz associada à quádrica (v. notas, p. 49),

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

impomos (v. notas, p. 51),

$$2M \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

determinando $h = -1$, $k = 2$. Assim, o centro é $C = (-1, 2)$ e $Q(h,k) = Q(-1,2) = -9$.

Observação Apesar de ser mais fácil resolver diretamente o sistema linear (assim procedi)

$$\Sigma \ : \ \begin{cases} 2h + k &= 0 \\ h + 2k &= 3 \ , \end{cases}$$

é útil, ao menos uma vez, perceber que Σ têm solução única (i.e., a translação existe e é única) se, e somente se, seu discriminante ($B^2 - 4AC$), definido como o determinante da matriz ($2M$) associada ao sistema, é não nulo. Com a mesma matriz determinamos (i) a translação (se possível), (ii) os coeficientes A' e C' ao eliminarmos o termo misto e (iii) a natureza da curva. São iguais, o discriminante de Σ, o determinante de $2M$ e o discriminante da quádrica (Δ).

Nas coordenadas u' e v' a equação é:

$$u'^2 \ + \ u'v' \ + \ v'^2 \ - \ 9 = 0 \ .$$

Para escrevermos esta nas coordenadas u e v, sem termo misto, determinamos as raízes de

$$p(\lambda) = det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4}.$$

Portanto, se $p(\lambda) = 0$ então $|\lambda - 1| = \frac{1}{2}$, o que implica $\lambda - 1 = \pm \ \frac{1}{2}$.

As raízes de $p(\lambda)$, A' e C', são $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$. Para distingui-las observemos que (v. notas, pp. 49):

$$A' - C' = (A - C)cos2\theta + Bsen2\theta;$$

como $A - C = 0$, $cotg2\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $B = 1$, temos : $A' - C' = 1$; e então, $A' = \frac{3}{2}$ e $C' = \frac{1}{2}$.

Nas coordenadas u e v, a equação da quádrica é:

$$\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 = 9 \ ,$$

e na forma padrão,

$$\frac{u^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{v^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1 \ .$$

O semi-eixo maior está sobre o eixo v e mede $b = 3\sqrt{2}$ e, o menor sobre u e mede $a = \sqrt{6}$; ainda, $c^2 = b^2 - a^2 = 18 - 6 = 12, \quad c = 2\sqrt{3}$, $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \frac{b}{e} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = 3\sqrt{3}$.
Compondo translação e rotação a mudança de coordenadas do sistema uv para o sistema xy é:

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

ou ainda, em outra apresentação (é útil utilizarmos ambas, dependendo da oportunidade),

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Os focos são, em uv, $f_1 = (0, -2\sqrt{3})$ e $f_2 = (0, 2\sqrt{3})$; as coordenadas, F_1, de f_1 em xy são:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} \end{bmatrix};$$

e portanto temos $F_1 = (\sqrt{6} \ - 1, 2 - \sqrt{6})$ e, analogamente, $F_2 = (-1 - \sqrt{6} \ , 2 + \sqrt{6})$.

Em uv as diretrizes são $d_1 : v = -3\sqrt{3}$ e $d_2 : v = 3\sqrt{3}$; D_1, as xy coordenadas de d_1, são:

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ y-2 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ -3\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} u+3\sqrt{3} \\ u-3\sqrt{3} \end{bmatrix};$$

isto é, $(x+1) - (y-2) = 3\sqrt{6}$. Logo, as diretrizes em xy são:

$D_1 : x - y + 3 - 3\sqrt{6} = 0$ e, analogamente, $\quad D_2 : x - y + 3 + 3\sqrt{6} = 0$.

Verificação Mostremos que a quádrica é dada por $|PF_1| = e|PD_1|$.

Elevando ao quadrado temos
$(x + 1 - \sqrt{6})^2 + (y - 2 + \sqrt{6})^2 = \frac{2}{3} \frac{|x \ - \ y \ + \ 3 \ - \ 3\sqrt{6}|^2}{2}$ ou,
$3[(x^2 \ + \ 2(1 - \sqrt{6})x \ + \ (1 - 2\sqrt{6} + 6)] \ + \ 3[(y^2 \ + \ 2(\sqrt{6} - 2)y \ + \ (4 - 4\sqrt{6} \ + \ 6)] =$
$= x^2 \ + \ y^2 \ + \ (9 - 18\sqrt{6} + 54) \ - \ 2xy \ + \ 6(1 - \sqrt{6})x \ - \ 6(1 - \sqrt{6})y,$
que agrupando obtemos
$2x^2 \ + \ 2y^2 \ + \ 2xy \ + \ 0x \ + \ [6(\sqrt{6} - 2) \ + \ 6(1 - \sqrt{6})]y = (63 - 18\sqrt{6}) - 3(7 - 2\sqrt{6}) - 3(10 - 4\sqrt{6})$;
isto é, $2x^2 + 2y^2 + 2xy - 6y = 12$ ■

(5)(e) $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$ **.** (resolução iniciando com translação)
Sendo $\Delta = (24)^2 - 4 \times 11 \times 4 = 400 > 0$, a quádrica é ou degenerada ou uma hipérbole.
Translação Sejam $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3y - 6$, $x = u' + h$ e $y = v' + k$. Substituindo temos $11u'^2 - 24u'v' + 4v'^2 + (22h - 24k + 30)u' + (-24h + 8k + 40)v' + Q(h, k) = 0$.
O sistema $22h - 24k + 30 = 0$, $-24h + 8k + 40 = 0$ é equivalente ao sistema $11h - 12k = -15$, $-3h + k = -5$ cuja solução é: $(h, k) = (3, 4)$. Notemos: $Q(3, 4) = 80$
Rotação Obtivemos a quádrica $11u'^2 - 24u'v' + 4v'^2 + 80 = 0$, e rotacionando-a adequadamente eliminamos o termo misto, obtendo uma quádrica com coeficientes A' e C' raízes de

$$p(\lambda) = det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 11 - \lambda & -12 \\ -12 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda - 100.$$

De $p(\lambda) = (\lambda - \frac{15}{2})^2 - \frac{225}{4} - 100 = (\lambda - \frac{15}{2})^2 - \frac{625}{4} = 0$ temos $|\lambda - \frac{15}{2}| = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}$; donde, $\lambda = \frac{15}{2} \pm \frac{25}{2}$. Logo, as raízes de $p(\lambda)$ são -5 e 20.
Para distingui-las observemos que $cotg2\theta = \frac{A-C}{B} = -\frac{7}{24} < 0$; logo, pela escolha de θ, $cos2\theta < 0$ e, então, de $cos2\theta = \frac{A-C}{A'-C'} = \frac{7}{A'-C'}$ concluímos, $A' - C' < 0$ e, portanto, $A' = -5$ e $C' = 20$.
Empregando a rotação obtemos $-5u^2 + 20v^2 + 80 = 0$, no sistema uv, cuja forma padrão é (**hipérbole**) $\frac{u^2}{4^2} - \frac{v^2}{2^2} = 1$.
Elementos: $a = 4$, $b = 2$, $c^2 = a^2 + b^2 = 20$, $c = 2\sqrt{5}$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{a}{e} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$;
ainda, no sistema uv temos, centro $(0, 0)$ e eixo u $(v = 0)$ como eixo principal;
focos: $f_1 = (-2\sqrt{5}, 0)$ e $f_2 = (2\sqrt{5}, 0)$; vértices : $(-4, 0)$ e $(4, 0)$;
diretrizes: $d_1 : u = -\frac{8\sqrt{5}}{5}$ e $d_2 : u = +\frac{8\sqrt{5}}{5}$; assíntotas: $v = -\frac{1}{2}u$ e $v = \frac{1}{2}u$.
Para esboçar a quádrica : temos (v. notas p.50), $cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \frac{7/24}{\sqrt{1+\frac{49}{576}}}) = \frac{9}{25}$, $cos\theta = \frac{3}{5}$, $sen\theta = \frac{4}{5}$ e $tg\theta = \frac{4}{3}$.
Compondo translação e rotação a transformação do sistema uv para o sistema xy é :

$$\begin{bmatrix} x - 3 \\ y - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3u - 4v \\ 4u + 3v \end{bmatrix}$$

ou,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3u - 4v \\ 4u + 3v \end{bmatrix},$$

ou ainda, reescrevendo em notação para sistemas,

$$\begin{cases} 5(x - 3) &= 3u - 4v \\ 5(y - 4) &= 4u + 3v \ . \end{cases}$$

Via matrizes e/ou sistema, segundo a preferência, temos, nas **coordenadas** xy,
centro $C = (3, 4)$;
eixo principal $(v = 0)$: substituindo $v = 0$ em Σ,

$$\Sigma \quad \begin{cases} 5(x - 3) &= 3u \\ 5(y - 4) &= 4u \end{cases}$$

temos $\frac{5}{3}(x-3) = \frac{5}{4}(y-4)$, que implica $y = \frac{4}{3}x$.
focos ($u = \mp 2\sqrt{5}$): os focos são dados por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \mp 6\sqrt{5} \\ \mp 8\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

isto é, $F_1 : (3 - \frac{6\sqrt{5}}{5}, 4 - \frac{8\sqrt{5}}{5})$ e $F_2 = (3 + \frac{6\sqrt{5}}{5}, 4 + \frac{8\sqrt{5}}{5})$;
vértices ($u = \mp 4$) : $V_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $V_2 = (\frac{27}{5}, \frac{36}{5})$
diretrizes ($u = \mp \frac{8\sqrt{5}}{5}$) : substituindo em Σ temos,

$$\begin{cases} 5(x-3) = \mp \frac{24\sqrt{5}}{5} - 4v \\ 5(y-4) = \mp \frac{32\sqrt{5}}{5} + 3v \end{cases},$$

multiplicando a primeira equação acima por 3, a segunda por 4, e então somando-as obtemos $15(x-3) + 20(y-4) = \mp 40\sqrt{5}$ e , dividindo por 5, temos as diretrizes,
$D_1 : 3x + 4y - 25 + 8\sqrt{5} = 0$ e $D_2 : 3x + 4y - 25 - 8\sqrt{5} = 0$;
assíntotas ($v = \mp \frac{1}{2}u$) : substituindo em Σ temos dois sistemas,

$$\begin{cases} 5(x-3) = 3u - (-2u) = 5u \\ 5(y-4) = 4u - \frac{3}{2}u = \frac{5}{2}u \end{cases},$$

e

$$\begin{cases} 5(x-3) = 3u - (2u) = u \\ 5(y-4) = 4u + \frac{3}{2}u = \frac{11}{2}u \end{cases},$$

do primeiro obtemos $\frac{5(x-3)}{5} = \frac{2}{5} \times 5(y-4)$ ou, $x - 3 = 2(y-4)$;
e do segundo, $5(x-3) = \frac{2}{11} \times 5(y-4)$ ou, $11(x-3) = 2(y-4)$, donde, as assíntotas
$x - 2y + 5 = 0$ e $11x - 2y - 25 = 0$.

Verificação Desenvolvendo o quadrado da equação $|PF_1| = e|PD_1|$ temos:
$(x - 3 + \frac{6\sqrt{5}}{5})^2 + (y - 4 + \frac{8\sqrt{5}}{5})^2 = \frac{5}{4}\frac{|3x + 4y - 25 + 8\sqrt{5}|^2}{3^2+4^2}$
isto é,
$20[x^2 + 9 + \frac{36}{5} - 6x + \frac{12\sqrt{5}}{5}x - \frac{36\sqrt{5}}{5}] + 20[y^2 + 16 + \frac{64}{5} - 8y + \frac{16\sqrt{5}}{5}y - \frac{64\sqrt{5}}{5}] =$
$= 9x^2 + 16y^2 + (-25 + 8\sqrt{5})^2 + 24xy + 6(-25 + 8\sqrt{5})x + 8(-25 + 8\sqrt{5})y,$
a qual, agrupando os termos, é
$11x^2 - 24xy + 4y^2 + [20(-6 + \frac{12\sqrt{5}}{5}) - 6(-25 + 8\sqrt{5})]x + [20(-8 + \frac{16\sqrt{5}}{5}) - 8(-25 + 8\sqrt{5})]y +$
$+ [20(9 + \frac{36}{5} - \frac{36\sqrt{5}}{5} + 16 + \frac{64}{5} - \frac{64\sqrt{5}}{5}) - (625 - 400\sqrt{5} + 320)] = 0$,
que simplificando obtemos,
$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$ ■

Obs : Uma outra apresentação para a mudança de coordenadas (a qual prefiro): transladando pelo vetor $(3,4)$ e rotacionando pelo ângulo $\theta = arctg(\frac{4}{3})$, a mudança de variáveis do sistema uv para o sistema xy é dada por,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Exercício 5(b): $x^2-10xy+y^2+x+y+1=0$. Temos que $\Delta = 96 > 0$. Logo, a quádrica, se não degenerada, é uma hipérbole.
Translação Sejam $x = u'+h$ e $y = v'+k$. Substituindo-as na quádrica os termos de grau 1 tornam-se $(2h-10k+1)u'$ e $(-10h+2k+1)v'$ e, para eliminá-los, determinamos $(h,k) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$. Sendo $P(x,y) = x^2-10xy+y^2+x+y+1$ o polinômio associado à quádrica temos $P(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}) = \frac{9}{8}$ e passamos a analisar

$$u'^2 - 10u'v' + v'^2 + \frac{9}{8} = 0 \ .$$

Rotação Rotacionando mudamos a um sistema uv em que $B' = 0$ e os coeficientes A' e C' são raízes do polinômio característico associado à quádrica dada,

$$p(\lambda) = det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 25.$$

Logo, A' e C' são 6 e -4. Para distingui-las observemos que $cotg2\theta = 0$; logo, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $cos2\theta = 0$ e $sen2\theta = 1$. Assim, de $A'-C' = (A-C)cos2\theta + Bsen2\theta$ (v. p. 49), temos $A'-C' = -10$ e, portanto, $A' = -4$ e $C' = 6$. Em uv a equação é $6u^2 - 4v^2 + \frac{9}{8} = 0$, que tem forma padrão,
Hipérbole: $\frac{1}{(\frac{3\sqrt{2}}{8})^2}u^2 - \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2}v^2 = 1$.

Elementos: Para identificarmos o eixo principal de uma hipérbole, na forma padrão, não é relevante qual dos números a e b ($\frac{\sqrt{3}}{4}$ e $\frac{3\sqrt{2}}{8}$, neste caso) é maior mas, qual parcela é subtraída pois ao esta se anular determinamos os vértices e o eixo principal, que os contém.
Temos, no sistema uv, **eixo principal:** u $(v=0)$ e **centro** $=(0,0)$; e ainda,
$a = \frac{3\sqrt{2}}{8}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $c^2 = a^2+b^2 = \frac{15}{32}$, $c = \frac{\sqrt{30}}{8}$, $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{3}$, e $\frac{a}{e} = \frac{3\sqrt{30}}{40}$.
Ainda, no **sistema uv** temos,
focos : $f_1 = (-\frac{\sqrt{30}}{8}, 0)$ e $f_2 = (\frac{\sqrt{30}}{8}, 0)$; vértices: $(-\frac{3\sqrt{2}}{8}, 0)$ e $(\frac{3\sqrt{2}}{8}, 0)$;
diretrizes : $d_1 : u = -\frac{3\sqrt{30}}{40}$ e $d_2 : u = -\frac{3\sqrt{30}}{40}$; assíntotas : $v = -\frac{\sqrt{6}}{3}u$ e $v = \frac{\sqrt{6}}{3}u$.
Para esboçar a quádrica : temos $cos\theta = sen\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Compondo translação e rotação a transformação do sistema uv para o sistema xy é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

ou,

$$\Sigma \begin{cases} \sqrt{2}(x-\frac{1}{8}) &= u-v \\ \sqrt{2}(y-\frac{1}{8}) &= u+v \ , \quad (u,v \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Via matrizes e/ou sistema, segundo a conveniência ou preferência, temos nas **coordenadas xy**,
centro $C = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$;
eixo principal ($v=0$): substituindo $v=0$ em Σ, temos $y = x$;
focos:($f_i = (\mp\frac{\sqrt{30}}{8}, 0)$ e F_i correspondendo a f_i) $F_1 = (\frac{1-\sqrt{15}}{8}, \frac{1-\sqrt{15}}{8})$ e $F_2 = (\frac{1+\sqrt{15}}{8}, \frac{1+\sqrt{15}}{8})$;
vértices : $V_1 = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ e $V_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;
diretrizes : ($u = \mp\frac{3\sqrt{30}}{40}$) sustituindo em Σ temos

$$\begin{cases} \sqrt{2}(x-\frac{1}{8}) &= \mp\frac{3\sqrt{30}}{40} - v \\ \sqrt{2}(y-\frac{1}{8}) &= \mp\frac{3\sqrt{30}}{40} + v \ , \quad (v \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

logo, somando as equações e então dividindo por $\sqrt{2}$ e, em seguida, simplificando o termo independente obtemos (D_i correspondendo a d_i)

$\mathbf{D_1}: x + y - \frac{5-3\sqrt{15}}{20} = 0$ e $\mathbf{D_2}: x + y - \frac{5+3\sqrt{15}}{20} = 0$;

assíntotas : ($v = \mp \frac{\sqrt{6}}{3}u$) substituindo em Σ temos,

$$\begin{cases} \sqrt{2}(x - \frac{1}{8}) & = u \pm \frac{\sqrt{6}}{3}u \\ \sqrt{2}(y - \frac{1}{8}) & = u \mp \frac{\sqrt{6}}{3}u \end{cases}$$

que separamos em dois sistemas,

$$\Sigma_1 \begin{cases} \sqrt{2}(x - \frac{1}{8}) & = u + \frac{\sqrt{6}}{3}u = \frac{3+\sqrt{6}}{3}u \\ \sqrt{2}(y - \frac{1}{8}) & = u - \frac{\sqrt{6}}{3}u = \frac{3-\sqrt{6}}{3}u \end{cases}$$

e

$$\Sigma_2 \begin{cases} \sqrt{2}(x - \frac{1}{8}) & = u - \frac{\sqrt{6}}{3}u = \frac{3-\sqrt{6}}{3}u \\ \sqrt{2}(y - \frac{1}{8}) & = u + \frac{\sqrt{6}}{3}u = \frac{3+\sqrt{6}}{3}u \ , \end{cases}$$

e, eliminando u, temos por solução de tais sistemas no plano xy, respectivamente,

$\frac{3}{3+\sqrt{6}}\sqrt{2}(x - \frac{1}{8}) = \frac{3}{3-\sqrt{6}}\sqrt{2}(y - \frac{1}{8})$ e $\frac{3}{3-\sqrt{6}}\sqrt{2}(x - \frac{1}{8}) = \frac{3}{3+\sqrt{6}}\sqrt{2}(y - \frac{1}{8})$

ou, respectivamente,

$\frac{1}{3+\sqrt{6}}(x - \frac{1}{8}) = \frac{1}{3-\sqrt{6}}(y - \frac{1}{8})$ e $\frac{1}{3-\sqrt{6}}(x - \frac{1}{8}) = \frac{1}{3+\sqrt{6}}(y - \frac{1}{8})$

ou, ainda respectivamente,

$(3 - \sqrt{6})(x - \frac{1}{8}) = (3 + \sqrt{6})(y - \frac{1}{8})$ e $(3 + \sqrt{6})(x - \frac{1}{8}) = (3 - \sqrt{6})(y - \frac{1}{8})$,

que resultam, finalmente e respectivamente, nas assíntotas

$(3 - \sqrt{6})x - (3 + \sqrt{6})y + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$ e $(3 + \sqrt{6})x + (3 - \sqrt{6})y - \frac{3}{4} = 0$.

Verificação Mostremos que $|PF_1| = e|PD_1|$.

Elevando ao quadrado temos,

$(x - \frac{1-\sqrt{15}}{8})^2 + (y - \frac{1-\sqrt{15}}{8})^2 = \frac{15}{9}\frac{|x + y - \frac{5-3\sqrt{15}}{20}|^2}{2} = \frac{5}{6}|x + y - \frac{5-3\sqrt{15}}{20}|^2$

ou

$6[x^2 - \frac{1-\sqrt{15}}{4}x + (\frac{1-\sqrt{15}}{8})^2] + 6[y^2 - \frac{1-\sqrt{15}}{4}y + (\frac{1-\sqrt{15}}{8})^2] =$

$= 5[x^2 + y^2 + (\frac{5-3\sqrt{15}}{20})^2 + 2xy - \frac{5-3\sqrt{15}}{10}x - \frac{5-3\sqrt{15}}{10}y]$,

cujo desenvolvimento é,

$6x^2 - \frac{3(1-\sqrt{15})}{2}x + 6(\frac{1-\sqrt{15}}{8})^2 + 6y^2 - \frac{3(1-\sqrt{15})}{2}y + 6(\frac{1-\sqrt{15}}{8})^2 =$

$= 5x^2 + 5y^2 + 5(\frac{5-3\sqrt{15}}{20})^2 + 10xy - \frac{5-3\sqrt{15}}{2}x - \frac{5-3\sqrt{15}}{2}y$;

logo, agrupando segundo as variáveis temos,

$x^2 - 10xy + y^2 + [-\frac{3(1-\sqrt{15})}{2} + \frac{5-3\sqrt{15}}{2}]x + [-\frac{3(1-\sqrt{15})}{2} + \frac{5-3\sqrt{15}}{2}]y +$

$+ 12(\frac{1-\sqrt{15}}{8})^2 - 5(\frac{5-3\sqrt{15}}{20})^2 = 0$;

basta agora observar que,

$-\frac{3(1-\sqrt{15})}{2} + \frac{5-3\sqrt{15}}{2} = 1$

e, finalmente,

$12(\frac{1-\sqrt{15}}{8})^2 - 5(\frac{5-3\sqrt{15}}{20})^2 = 1$.

exercício 5(f) : $19x^2 + 6xy + 11y^2 - 26x + 38y + 31 = 0$ (resolução elementar)
Sendo $\Delta 36 - (4 \times 19 \times 11) < 0$ temos que a quádrica é ou degenerada ou uma elipse.
Translação Adotando a mudança de coordenadas $x = u' + h$, $y = v' + k$, os termos de grau 1 tornam-se $(38h + 6k - 26)u'$ e $(6h + 22k + 38)v'$ e para anulá-los determinamos $h = 1$ e $k = -2$.
A quádrica é então expressa por
$19u'^2 + 6u'v' + 11v'^2 - 10 = 0$.
Rotação Pela mudança,

$$\begin{cases} u' = ucos\theta - vsen\theta \\ v' = usen\theta + vcos\theta, \end{cases}$$

temos
$19(ucos\theta - vsen\theta)^2 + 6(ucos\theta - vsen\theta)(usen\theta + vcos\theta) + 11(usen\theta + vcos\theta)^2 - 10 = 0$,
que expandindo e reagrupando resulta,
$(19cos^2\theta + 3sen2\theta + 11sen^2\theta)u^2 + (-19sen2\theta + 6cos^2\theta - 6sen^2\theta + 11sen2\theta)uv +$
$+ (19sen^2\theta - 3sen2\theta + 11cos^2\theta)v^2 - 10 = 0$,
que, para eliminar o terrmo misto, impomos $6cos2\theta - 8sen2\theta = 0$; logo, $cotg2\theta = \frac{4}{3}$. Consequentemente, temos : $cossec^2 2\theta = \frac{25}{9}$, $sen^2 2\theta = \frac{9}{25}$, $cos^2 2\theta = \frac{16}{25}$, $cos2\theta = \frac{4}{5}$, $sen2\theta = \frac{3}{5}$
$cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$, $cos\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $sen\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $tg\theta = \frac{1}{3}$.
Simplificamos então a equação para $20u^2 + 10v^2 - 10 = 0$, cuja forma padrão é

$$\frac{u^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} + v^2 = 1 \ ,$$

que representa uma elipse com **elementos** : semi-eixo maior, $b = 1$; semi-eixo menor, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $e = \frac{c}{b} = c = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Tendo, nas **coordenadas** uv, centro : $(0, 0)$;
focos : $f_1 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $f_2 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$; diretrizes : $d_1 : v = -\frac{b}{e} = -\sqrt{2}$ e $d_2 : v = \sqrt{2}$.
A mudança de coordenadas do sistema uv para o sistema xy é dada por,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Com os elementos acima e sabendo que $tg\theta = \frac{1}{3}$, torna-se fácil esboçar a elipse.

Exercício extra (não existe translação que elimine os termos de grau 1) :

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 5x - 5y + 2 = 0 \ .$$

Neste caso temos $\Delta = B^2 - 4AC = 36 - 4 \times 1 \times 9 = 0$ (quádrica degenerada ou uma parábola). Procurando uma translação dada por $x = u' + h$ e $y = v' + k$ obtemos :
$u'^2 - 6u'v' + 9v'^2 + (2h - 6k + 5)u' + (-6h + 18k - 5)v' + P(h,k)$,
com $P(h,k) = h^2 - 6hk + 9k^2 + 5h - 5k + 2 = 0$.
Para eliminarmos os termos de grau 1 devemos resolver o sistema,

$$\begin{cases} 2h - 6k = -5 \\ -6h + 18k = 5, \end{cases}$$

o qual é impossível (somando o triplo da primeira equação com a segunda temos $0 = -15 + 5$).

Como Δ é invariante por rotações ($\Delta = 0$) ao eliminarmos o termo misto teremos uma equação $A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0$, com discriminante $\Delta' = A'C'$ nulo; assim, ou $A' = 0$ ou $C' = 0$. Efetuemos então a rotação,

$$\begin{cases} x = ucos\theta - vsen\theta \\ y = usen\theta + vcos\theta. \end{cases}$$

Substituindo temos
$(ucos\theta - vsen\theta)^2 - 6(ucos\theta - vsen\theta)(usen\theta + vcos\theta) + 9(usen\theta + vcos\theta)^2 +$
$+ 5(ucos\theta - vsen\theta) - 5(usen\theta + vcos\theta) + 2 =$
$= (cos^2\theta - 6sen\theta cos\theta + 9sen^2\theta)u^2 + (sen^2\theta + 6sen\theta cos\theta + 9cos^2\theta)v^2 +$
$+ (-2sen\theta cos\theta - 6cos^2\theta + 6sen^2\theta + 18sen\theta cos\theta)uv +$
$+ (5cos\theta - 5sen\theta)u + (-5sen\theta - 5cos\theta)v + 2 = 0.$

Impondo o termo misto nulo temos: $8sen2\theta - 6cos2\theta = 0$; donde, $cotg2\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.
Assim, $cossec^2 2\theta = 1 + cotg^2 2\theta = \frac{25}{9}$, $sen^2 2\theta = \frac{9}{25}$, $cos^2 2\theta = \frac{16}{25}$,
$sen2\theta = \frac{3}{5}$, $cos2\theta = \frac{4}{5}$, $cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2} = \frac{9}{10}$, $sen^2\theta = \frac{1}{10}$, $sen\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $cos\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Identificando os coeficientes, a quádrica nas coordenadas uv é dada por:
$(\frac{9}{10} - \frac{9}{5} + \frac{9}{10})u^2 + (\frac{1}{10} + \frac{9}{5} + \frac{81}{10})v^2 + (\frac{24}{5} - \frac{24}{5})uv + (\frac{15\sqrt{10}}{10} - \frac{5\sqrt{10}}{10})u + (-\frac{5\sqrt{10}}{10} - \frac{15\sqrt{10}}{10})v + 2 = 0$,
ou, $10v^2 + \sqrt{10}u - 2\sqrt{10}v + 2 = 0$,
ou, completando o quadrado,
$(\sqrt{10}v - 1)^2 + \sqrt{10}u + 1 = 0$, que é uma parábola.

Para vizualizá-la esboçe o sistema uv, obtido rotacionando o canônico por $\theta = arctg\frac{1}{3}\ rad$, no sentido anti-horário. Em seguida, mudando as variáveis para

$$\begin{cases} u' = \sqrt{10}(u + \frac{1}{\sqrt{10}}) \\ v' = \sqrt{10}(v - \frac{1}{\sqrt{10}}), \end{cases}$$

obtemos a parábola, $u' = -v'^2$ que é de fácil identificação pois:
(1) o centro do sistema de coordenadas $u'v'$ corresponde ao ponto $(u_o, v_o) = (\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, no sistema uv (esboce), e
(2) esta mudança é uma translação, seguida de uma homotetia (uma 'mudança de escala', neste caso a constante de proporcionalidade é $\sqrt{10}$).
Para o esboço note que a mudança de escala, como cumpre ser, não afeta o 'formato' da parábola, ou de qualquer curva.
Assim, o sistema $u'v'$ está centrado em (u_o, v_o) e os eixos u' e v' são, respectivamente, paralelos e com mesma direção e sentido que os eixos u e v (pois $\sqrt{10} > 0$).

Esboce os três sistemas utilizados. Observe que no **sistema** $u'v'$ a parábola tem a concavidade voltada 'à esquerda', o foco é dado por $(\frac{-1}{4}, 0)$ e a reta diretriz é dada por $u' = \frac{1}{4}$.