Séries

Expansão Binária

1. **Expansão na base** 2 Para $x \in (0,1]$ temos as propriedades abaixo:

   (a) Existe uma única sequência (a_n) não eventualmente nula $(\forall p, \exists\, n > p,\, a_n \neq 0)$ binária, $a_n = 0$ ou $a_n = 1$, com $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$. Isto é, uma única expansão infinita (não finita).

   (b) Se $x \in J = \{\frac{p}{2^n}\,;\; p\,, n \in \mathbb{N}, p < 2^n\}$, há uma expansão finita $(\exists N \mid a_n = 0 \text{ se } n \geq N)$ e uma infinita, com (a_n) eventualmente igual a 1 $(\exists N \;\text{ tal que } a_n = 1, \forall n \geq N)$.

   (c) Se x têm expansão finita, ou (a_n) é eventualmente 1 mas não igual a (1), $x \in J$.

   (d) A expansão finita é única.
   Sugestão: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Prova:

(a) Sejam $I_1 = (0, \frac{1}{2}]$ e $J_1 = (\frac{1}{2}, 1]$. Se $x \in I_1$ pomos $a_1 = 0$ e, se $x \in J_1$, $a_1 = 1$. Logo, $0 \leq x - \frac{a_1}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Suponhamos definidos $a_1, ..., a_n \in \{0,1\}$ tais que para todo j, $\;1 \leq j \leq n$, existe um único i, $0 \leq i \leq 2^j - 1$, satisfazendo:

$$\frac{i}{2^j} \;<\; \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_j}{2^j} \quad \leq \; x \;\; \leq \frac{i+1}{2^j}\,,\; 0 \;\leq\; i \;\leq 2^j - 1\,.$$

Na etapa n, $\exists i_o$, $\;\frac{i_o}{2^n} < \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} \;\leq\; x \;\leq\; \frac{i_o+1}{2^n}$, $\;i_o \leq 2^n - 1$, e considerando $n+1$,

$$\left(\frac{i_o}{2^n}, \frac{i_o+1}{2^n}\right] = \left(\frac{2i_o}{2^{n+1}}, \frac{2i_o+1}{2^{n+1}}\right] \cup \left(\frac{2i_o+1}{2^{n+1}}, \frac{2i_o+2}{2^{n+1}}\right] = I_n \cup J_n\,;$$

e reescrevendo $2i_o + 2 = (2i_o + 1) + 1$: $\;2i_o + 1 \leq 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$, com I_n e J_n na disjunção $(0,1] = \bigcup(\frac{i}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^{n+1}}]$, $\;0 \leq i \leq 2^{n+1} - 1$.

Pondo $a_{n+1} = 0$, se $x \in I_n$, e $a_{n+1} = 1$ se $x \in J_n$, temos $\frac{i}{2^{n+1}} \;<\; \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \;\leq\; x \;\leq\; \frac{i+1}{2^{n+1}}$ para um único i, $\;0 \;\leq\; i \;\leq 2^{n+1} - 1$. Portanto, $0 \leq x - \frac{a_1}{2} - .... - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ e $\;x \;=\; \sum \frac{a_n}{2^n}$.

Infinitude da expansão: supondo, por absurdo, que $\exists N$ tal que $a_n = 0, \forall n \geq N$, temos $x \in (\frac{i}{2^N}, \frac{i+1}{2^N}]$ e, para $n = N + m$, $\;\; x \in \;(\frac{i}{2^N}, \frac{i}{2^N} + \frac{1}{2^{N+m}}]$, para todo m ↯

Unicidade (expansão infinita): segue da construção e por indução. Dadas duas para x, elas tem mesmo termo inicial, senão x pertenceria a intervalos distintos. Cancelando-o e multiplicando as expansões por dois, recaímos no caso anterior.

Obs: se $x = \frac{p}{2^n}$, $\;1 \leq p < 2^n$, na etapa n, $x \in \left(\frac{p-1}{2^n}, \frac{p}{2^n}\right]$ e, da etapa $n+1$ adiante, $a_k = 1$.

Exemplo: $\frac{7}{16} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + ...$ e identificamos $\frac{7}{16}$ com $(0,1,1,0,1,1,1,1,...,1,...)$.

(b) Mostremos por indução em n, para $1 \leq p < 2^n$, que existe a expansão $\frac{p}{2^n} = \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n}$.

Se $n = 1$ é óbvio: $p = 1$ e $a_1 = 1$.

(Hipótese de Indução) Supondo o resultado para n, seja $\frac{p}{2^{n+1}}$, $1 \leq p < 2^{n+1}$.

Se p é par, $p = 2N \Rightarrow 2N < 2^{n+1}$, $N < 2^n$, $\frac{p}{2^{n+1}} = \frac{N}{2^n}$ e, por hipótese, $\frac{N}{2^n} = \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n}$.

Se p é ímpar, $p = 2N + 1 \Rightarrow \frac{2N+1}{2^{n+1}} = \frac{N}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$; ainda, $2N + 1 < 2^{n+1} \Rightarrow N < N + \frac{1}{2} < 2^n$ e então, para $\frac{N}{2^n}$ é válida a hipótese de indução.

Seja $x = \frac{a_1}{2} + ... + \frac{1}{2^n}$, $a_i = 0, 1$. Temos, $\frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+j}} + ... = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + ...\right) = \frac{1}{2^n}$.

(c) Se $x = \frac{a_1}{2} + ... + \frac{1}{2^n}$ então $x = \frac{(2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + ... + 2a_{n-1} + 1)}{2^n}$ e

$$p = 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + ... + 2a_{n-1} + 1 \leq 1 + 2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1 < 2^n \ .$$

Se $x = \left(\frac{a_1}{2} + ... + \frac{1}{2^{N-2}}\right) + \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}} ... + ... \frac{1}{2^{N+M}} + ...$; então, $x = \left(\frac{1}{2^j} + ... + \frac{1}{2^{N-2}}\right) + \frac{1}{2^{N-1}} \in J$.

(d) Basta analisarmos: $\frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = \frac{b_1}{2} + ... \frac{b_n}{2^n}$, $n \geq 2$. Suponhamos, por absurdo, $a_1 \neq b_1$; digamos $a_1 = 1$ e $b_1 = 0$. Então,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n} = x \quad = \quad y = \frac{b_2}{2^2} + ... \frac{b_n}{2^n} \leq \frac{1}{2^2} + ... \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2},$$

e portanto, $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}$ $\lightning$ Logo, descartando $a_1 = b_1$ temos

$$\frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = \frac{b_2}{2^2} + ... + \frac{b_n}{2^n}.$$

Multiplicando por dois recaímos no caso anterior e: $a_2 = b_2$. Por indução, $a_i = b_i, \forall i$.