ADIÇÃO DE VETORES: PROPRIEDADES

MAT105 - Geometria Analítica - Instituto de Geociências

1^o semestre de 2011

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1 Regra do Paralelogramo. *Vale a propriedade abaixo:*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \ .$$

Prova. Esboce uma figura apropriada no espaço abaixo.

Por hipótese, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas. Suponhamos o caso em que estas retas são distintas. O caso em que elas são coincidentes é trivial e é deixado ao leitor.

Consideremos também a reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Seja $X_1 \in \overleftrightarrow{AC}$ o pé da perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AC}$ que passa por B e $h_1 = |\overline{BX_1}|$ o comprimento da altura do triângulo retângulo $\Delta(AX_1B)$ em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Seja $X_2 \in \overleftrightarrow{AC}$ o pé da perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AC}$ que passa por D e $h_2 = |\overline{DX_2}|$ o comprimento da altura do triângulo retângulo $\Delta(CX_2D)$ em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$.

- **Passo 1.** $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ têm mesma direção.

  Pelo Teorema de Tales os ângulos $B\hat{A}X_1$ e $D\hat{C}X_2$) são congruentes. Logo, os triângulos retângulos $\Delta(AX_1B)$ e $\Delta(CX_2D)$ têm ângulos correspondentes congruentes. Então, como estes triângulos tem respectivas hipotenusas, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, com mesmo comprimento (isto é, $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$) segue que tais triângulos são congruentes. Consequentemente temos,

  $$h_1 = h_2 \ .$$

  Portanto, a reta $\overleftrightarrow{BD}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$ e os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ têm mesma direção.

- **Passo 2.** $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ têm mesmo módulo.

  Pelo Teorema de Tales os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$ são congruentes e, considerando a reta $\overleftrightarrow{BC}$, os ângulos $A\hat{C}B$ e $C\hat{B}D$ também são congruentes. Então, os triângulos $\Delta(ABC)$ e $\Delta(BCD)$ são semelhantes e possuem um lado comum: $\overline{BD}$. Portanto, os triângulos $\Delta(ABC)$ e $\Delta(BCD)$ são congruentes e temos $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$.

- **Passo 3.** $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ têm mesmo sentido.

  Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, unindo as extremidades iniciais e finais de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$, não se intersectam pois as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas não coincidentes e então não concorrentes$\blacksquare$

2 Definição. *Dado um vetor* $\overrightarrow{u}$ *e um vetor* $\overrightarrow{v}$ *consideramos um representante de* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, *e um representante de* $\overrightarrow{v}$ *com origem* B *igual a extremidade final de* $\overrightarrow{u}$. *Seja* C *a extremidade final de* $\overrightarrow{v}$. *Logo,* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. *Então, a* **soma de** $\vec{u}$ **com** $\vec{v}$ *(nesta ordem) é o vetor* $\overrightarrow{AC}$. *Notação:*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\ .$$

3 Propriedades da Adição de Vetores. *São válidas as propriedades:*

(1) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ *(***Associativa***)*

(2) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ *(***Comutativa***)*

(3) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ *(***Elemento Neutro***)*

(4) $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ *(***Elemento Oposto***)*

Prova.

(1) Escrevamos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CD}$. Então, pela definição da soma vetorial,

$$\begin{cases} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \\ \\ \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}\ . \end{cases}$$

(2) Esboce uma figura apropriada no espaço abaixo.

Indiquemos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. Indiquemos também $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AX}$.
Como $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{BC}$, pela regra do paralelogramo temos

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XC} \qquad \text{(donde segue, } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XC}\text{).}$$

Concluímos então:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \\ \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{AC}\ . \end{cases}$$

(3) Consideremos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BB}$. Temos então, pela definição de soma de vetores,

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} \ = \ \overrightarrow{AB} \ + \ \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \ .$$

(4) Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Portanto temos, $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$. Logo, pela defição de soma de vetores,

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) \ = \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \ = \ \overrightarrow{AA} \ = \ \overrightarrow{0} \quad \blacksquare$$

4 Propriedade (Relacionando "Soma de Ponto com Vetor" e "Adição de Vetores".
Temos,

$$(A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = A + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \ .$$

Prova. Escrevamos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ temos,

$$\begin{cases} (A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C \\ \\ A + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = A + \overrightarrow{AC} = C \quad \blacksquare \end{cases}$$