Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)
Palestra - atualizada Dezembro 2017 / Setembro 2015 - proferida Novembro 2011

Oswaldo Rio Branco de Oliveira
`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

OBJETIVO

Este texto se origina de uma palestra sobre o Teorema Fundamental da Álgebra dirigida a professores do segundo grau, proferida em São Paulo.

Às leitoras e leitores interessados sugiro também consultar o material abaixo.

- de Oliveira, O. R. B., *The Fundamental Theorem of Algebra: An Elementary and Direct Proof*, The Mathematical Intelligencer, Vol 33, No **2** (2011), pp. 1-2. Disponível em

  `http://www.ime.usp.br/~oliveira/FTAAUTHOR.pdf`.

- de Oliveira, O. R. B., *The Fundamental Theorem of Algebra: From the Four Basic Operations*, The American Mathematical Monthl, vol 11, No **9** (2012), pp. 753–758. Disponível em

  `http://www.ime.usp.br/~oliveira/FTA-MONTHLY.pdf`

- Ovchinnikov, S., *Number Systems - An introduction to Algebra and Analysis*, Pure and Applied Undergraduate Texts, Amer. Math. Soc., 2015.

- T. Thorsten & Lliman, S., *Einführung in die computerorientierte Mathematik mit Sage*, Springer Spektrum, 2016.

Uma Brevissíma História (não linear) dos Números Complexos

As informações históricas são, em grande medida, extraídas de Milies [13] e Remmert [18].

Os números complexos surgiram naturalmente, ao menos, já nas equações do segundo grau nas tabuletas de argila da Suméria, c. 1700 a.C.

Sugiro aqui um "pulo histórico" de quase 4.000 anos, utilizando um pouco do nosso conhecimento atual. Logo após, retornamos à antiguidade.

As interpretações dos números complexos. A primeira e a segunda interpretações geométricas dos números complexos se devem respectivamente ao cartógrafo norueguês-dinamarquês C. Wessel em 1797 e ao contador suiço-francês J. R. Argand (1806).

Caspar Wessel. A espetacular interpretação geométrica dos números complexos exposta pelo cartógrafo norueguês Wessel é ainda pouco conhecida mas tem sido recuperada e trazido à tona nos últimos anos. Mais precisamente, desde 1997. Nesta data a União Européia de Matemática celebrou 200 anos da obra de Wessel e pela primeira vez sua obra foi traduzida do dinamarquês para o inglês. [Em 1897, sua obra foi traduzida para o francês.] Vale a pena destacar que Wessel chegou aos números complexos não devido à resolução de equações algébricas, procura de raízes de polinômios ou ao teorema fundamental da álgebra mas sim devido à chamada "Triangulação da Dinamarca". Vide a palestra "Caspar Wessel, números complexos e a triangulação da Dinamarca" em

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/WESSELpalestra2015.pdf`

O texto em que Wessel "cria" os números complexos não aborda estudo de polinômios.

Destaque-se que a interpretação de Wessel provavelmente mereça ser contada entre as duas "melhores" interpretações dos números complexos (esta é a minha opinião). Wessel remonta à *Teoria das Proporções* da antiguidade (e que aprendemos desde a nossa infância) para formalizar os números complexos. Por exemplo, dizemos que *"a está para b assim como c está para d"*, e então escrevemos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ se temos } ad = bc.$$

Baseado neste conceito (proporções), Wessel inventa os números complexos comparando segmentos no plano euclidiano. [Vide a palestra indicada sobre Wessel.]

Falemos agora sobre a interpretação que, junto com a de Wessel, forma o par das "duas melhores" interpretações dos números complexos (na minha opinião).

Jean Robert Argand. A também espetacular interpretação geométrica dos números complexos dada pelo contador suiço Argand já é um pouco mais conhecida (porém não difundida o suficiente).

Diferentemente de Wessel, o matemático amador Argand chegou aos números complexos através das equações algébricas. Vale destacar também que Argand apresentou a primeira prova correta (a menos da propriedade do supremo e da formalização da completude dos números reais, ainda não disponíveis em 1806) do teorema fundamental da álgebra. Ainda mais, Argand foi o primeiro a demonstrar a teorema fundamental da álgebra para polinômios com coeficientes complexos. Gauss "provou" o TFA para polinômios com coeficientes reais (as aspas se devem ao fato de que a prova de Gauss é hoje vista com reticências e até como errada). Vide a palestra "Argand e o teorema fundamental da álgebra (TFA)" em

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/TFA-ARGAND.pdf`

A interpretação de Argand para os números complexos remonta a "movimentos" no plano. Argand interpretou os movimentos (no plano) translação, rotação e homotetias, dilatação e contração como números, mostrando que podemos "somar" e "multiplicar" (isto é, compor) tais movimentos e que tais operações são inversíveis (assim, podemos subtrair e dividir). Isto é, podemos arrastar para uma posição e depois arrastarmos de volta. Podemos girar e depois desfazermos o giro. Podemos esticar um segmento e depois restituí-lo a seu tamanho original. Podemos também combinar translações, rotações, dilatações e contrações.

A total formalização dos números complexos como pares ordenados de números reais (esta é, infelizmente, a única apresentação difundida) veio a ocorrer em 1833, pelo irlândes W. R. Hamilton (1805 – 1865). O problema (que não é pequeno) com esta formalização se dá em interpretar a multiplicação de números complexos

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc).$$

Este problema é superado pelas interpretações de Wessel e de Argand.

Suponho que agora estejamos todos ainda mais curiosos sobre a fascinante evolução dos números complexos.

Retornemos entãp à antiguidade.

Antiguidade. O fato de um número negativo não ter raiz quadrada parece ter sido sempre conhecido pelos matemáticos que se depararam com a questão.

Heron de Alexandria (circa 75 d.C.), tentou determinar o volume de um tronco de cone, o que requeria computar a raiz quadrada de $81-144$ (embora números negativos não fossem aceitáveis no mundo helenístico). Bhaskara Acharya (em 486 d.C.), matemático hindu, escreveu "O quadrado de um número positivo, assim como de um número negativo, é positivo: e a raiz quadrada de um número positivo é bivalente, positiva e negativa; não existe raiz quadrada de um número negativo, pois um número negativo não é um quadrado". Em 850 d.C. o matemático hindu Mahavira Acharya escreveu "Como na natureza, uma (quantidade) negativa não é uma (quantidade) quadrada".

Porém, contrariamente ao bom senso, não foram as equações do segundo grau que motivaram a aceitação de tal campo numérico mas sim as de terceiro grau. As equações de segundo grau eram vistas como a formulação matemática de um problema concreto ou geométrico e se no processo de resolução surgia uma raiz quadrada de um número negativo, isto era interpretado como prova de que tal problema não tinha solução.

Exemplifiquemos com um problema na *Arithmetica* de Diofanto (275 d.C.).

Problema. Determinar os lados de um triângulo retângulo de área igual a 7 e perímetro igual a 12 unidades.
Solução. indicando por x e y os comprimentos dos catetos temos

$$\frac{xy}{2} = 7 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2 \ .$$

Desenvolvendo a segunda equação temos $12x + 12y = 72 + xy$ e nesta pondo $y = \frac{14}{x}$,

$$6x^2 - 43x + 84 = 0 \implies x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12} \clubsuit$$

Aqui, Diofanto observa que só poderia haver solução se

$$\left(\frac{172}{2}\right)^2 > (24 \times 336).$$

Neste contexto é supérfluo procurar um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.

Em 1545, o italiano G. Cardano (1501-1576) publicou *Ars Magna (Arte Magna)*, na qual descrevia métodos algébricos para resolver equações cúbicas e quárticas. Tal obra foi o principal avanço em álgebra em 3000 anos, desde que os babilônios mostraram como resolver equações quadráticas. Cardano também lidou com equações quadráticas em sua obra. Um dos problemas que ele chamou "manifestamente impossível" é: *Divida* 10 *em duas partes cujo produto é 40.*

Isto é, encontre a solução de

$$x + y = 10 \quad \text{e} \quad xy = 40,$$

ou, equivalentemente, a solução da equação quadrática

$$40 - x(10 - x) = x^2 - 10x + 40 = 0,$$

cujas raízes são $5 \pm \sqrt{-15}$. Cardano formalmente multiplicou as raízes e encontrou

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 40.$$

Quanto às computações ele escreveu "deixando de lado as torturas mentais envolvidas". Cardano não aprofundou tal estudo e concluiu que tal resultado era "tão sutil quanto inútil". Ainda assim, tal evento é histórico pois pela primeira vez a raiz quadrada de um número negativo havia sido escrita explicitamente.

Para a equação cúbica

$$x^3 = ax + b\,,$$

a denominada Fórmula de Cardano-Tartaglia[1] é

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

O primeiro matemático a perceber a premência dos números complexos (ainda que, naturalmente, de modo vago e confuso) foi o italiano R. Bombelli (c. 1526-1573), autor da obra em três volumes *l'Algebra* (1572, Veneza). Na página 294 Bombelli aplica à equação $x^3 = 15x + 4$, a fórmula de Tartaglia-Cardano e obtém

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

[1] Os italianos Nicollo Tartaglia (c. 1500-1557) e G. Cardano (1501-1576).

Notando que $x = 4$ é uma raiz da equação, Bombelli cogita que tal valor está implícito na expressão para as raízes e que é possível dar um sentido à expressão

$$2 \pm \sqrt{-121}$$

e definir operações entre expressões análogas, tais como adição, multiplicação, radiciação, etc. de modo que $x = 4$ seja apenas um dos valores obtidos através destas. Assim, nasce uma situação em que apesar da presença de radicais de números negativos, existe uma solução da equação dada. É um fenômeno novo, difícil de entender mas relevante e é necessário compreende-lo com profundidade.

A partir do trabalho de Bombelli os números complexos começam a ser utilizados como um "algoritmo que funciona" para resolver equações de terceiro grau mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números não poderiam existir.

Uma das grandes dificuldades em admitir a existência dos complexos era a ausência de uma representação geométrica ou de uma interpretação física destes números. A obtenção da representação geométrica, que lhes deu a "cidadania" definitiva na matemática foi árdua. Principiou em 1673 com o inglês J. Wallis (1616-1703) e continuou com os franceses A. de Moivre (1667-1754) e J. D'Alembert (1717-1783), o inglês R. Cotes (1682-1716), o suiço L. Euler (1707-1783), etc.

Pode-se dizer que tal os números complexos foram estabelecidos pelo "surpreendente" cartógrafo e matemático amador norueguês-dinamarquês C. Wessel (1745-1818) em 1797, pelo também "surpreendente" contador e matemático amador suiço-francês J. R. Argand (1768-1822) em 1806, e pelo alemão C. F. Gauss (1777-1855) em 1831, o qual cunhou a expressão um tanto inapropriada "números complexos". A formalização completa (e atualmente adotada nos livros textos) deve-se, como já citado, ao irlândes W. Hamilton.

Além dos comentários já feitos sobre as obras de Argand e Wessel, vide
`http://www.ime.usp.br/~oliveira/WESSELpalestra2015.pdf`,
`http://www.ime.usp.br/~oliveira/TFA-ARGAND.pdf`,

Uma Breve História do TFA

Séculos antes da criação dos numeros complexos, François Vieta (1540 – 1603) exibiu várias equações (polinomiais com coeficientes reais) de grau n com n raízes.

Peter Roth (falecido em 1617) já afirmara, em 1608, que equações (polinomiais com coeficientes reais) de grau n têm no máximo n raízes. Porém, Roth já utilizara que tais equações efetivamente admitem raízes.

O matemático belga, nascido na França, Albert Girard (1595-1632), é digno de um destaque todo especial na história do teorema fundamental da álgebra. Girard, em "L'invention Nouvelle en l'Algèbre" de 1629, foi o primeiro a prever e a afirmar que há sempre soluções (possivelmente repetidas) para tais equações, mas não demonstrou tal fato.

René Descartes (1596-1650), na terceira parte de "La Géométrie", em 1637, descreve tudo o que se conhecia à época sobre equações polinomiais, observa que um polinômio $P(x)$ (com coeficientes reais e variável real x) que se anula em um número real α é divisível pelo polinômio de grau um

$$p(x) = x - \alpha,$$

e apresenta a famosa"regra dos sinais" para calcular o número máximo de raízes reais positivas e negativas.

O alemão G. W. Leibniz (1646-1716), procurando integrar uma função dada pela divisão de dois polinômios com coeficientes reais, na "Acta Eruditorum" de 1702 considera a questão de saber se é sempre possível fatorar um polinômio real em fatores lineares reais (polinômios reais de grau 1) ou fatores quadráticos reais (polinômios reais de grau 2). Porém, Leibnitz vem a desistir de provar a existência de tal fatoração, face ao "contra-exemplo" que ele encontra. Leibnitz achara que a fatoração para o polinômio $x^4 + r^4$, com r um número real,

$$x^4 + r^4 = (x^2 - r^2 i)(x^2 + r^2 i) \ = \ \left(x + r\sqrt{i}\,\right)\left(x - r\sqrt{i}\,\right)\left(x + r\sqrt{-i}\,\right)\left(x - r\sqrt{-i}\,\right)$$

era tal que o produto de dois fatores quaisquer no lado direito da equação acima nunca é um polinômio quadrático real. Certamente, Leibnitz não percebera que

$\sqrt{i}$ e também $\sqrt{-i}$ podem ser postos na forma padrão $a+bi$, escrevendo

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{e} \quad \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

caso contrário ele teria visto que, na fatoração de x^4+r^4, multiplicando o primeiro e o terceiro fatores e multiplicando o segundo e o quarto fatores encontramos dois polinômios quadráticos reais tais que

$$x^4 + r^4 = (x^2 + r\sqrt{2}x + r^2)(x^2 - r\sqrt{2}x + r^2).$$

O suiço L. Euler (1707-1783) em 1742 enunciou que um polinômio com coeficientes reais pode ser fatorado como um produto de fatores lineares e fatores quadráticos mas não conseguiu uma prova completa deste fato. Porém, Euler demonstrou tal teorema para polinômios reais de grau menor ou igual a seis. Euler também enunciou que um polinômio com coeficientes reais que tem "raízes imaginárias" tem então uma raiz da forma

$$a + b\sqrt{-1},$$

com a e b números reais. Ainda, Euler já utilizava extensivamente números complexos e a notação

$$i = \sqrt{-1}.$$

Em 1746 o enciclopedista francês J. d'Alembert (1717-1783), atuante na revolução francesa de 1789, tal como Leibnitz pesquisando um método para integrar o quociente de dois polinômios com coeficientes reais (o hoje denominado

Método das Frações Parciais),

encontra uma demonstração difícil do TFA e que contém um erro que só em 1851 seria corrigido, por V. Puiseux (1820-1883). Devido a tal demonstração, na literatura francesa o Teorema Fundamental da Álgebra é chamado *Teorema de d'Alembert*. Atualmente procura-se resgatar a validade da demonstração de d'Alembert, obviamente inserindo a necessária correção.

J. L. Lagrange (1736-1813) em 1772 levantou objeções à demonstração de Euler e obteve sucesso em preencher várias lacunas na prova de Euler. Mas, sua prova também era incompleta. É importante salientar que em 1777 Lagrange já observara em uma carta que os "números imaginários" já haviam se tornado universalmente aceitos como parte da matemática.

Em 1795, P. S. Laplace (1749-1827) apresentou uma demonstração muito elegante do TFA e bem diferente daquela de Lagrange-Euler. Sua sofisticada demonstração também era incompleta porém é hoje reabilitada.

Em 1798 o inglês James Wood, publicou em *The Philosophical Transactions of the Royal Society* o artigo " On the roots of equations", apresentando uma prova do TFA para polinômios com coeficientes reais. Sua prova também continha falhas. Recentemente, em 2000, sua prova foi reabilitada por Frank Smithies.

Em 1799 o alemão K. F. Gauss (1777-1855) em sua tese de doutorado apresenta uma demonstração para o TFA que veio a ser considerada a primeira prova correta do TFA [ressalte-se que nesta época o teorema fundamental da álgebra já era amplamente utilizado nos bancos escolares]. Porém esta demonstração de Gauss também contém "problemas" que só seriam superados em 1920 por A. Ostrowski (1893-1991). Tal trabalho foi comentado por S. Smale (1930-) em 1981. Em 1816 Gauss apresenta sua segunda prova, a qual é bastante algébrica, do TFA. Tal prova é correta porém utiliza o resultado que agora enunciamos, que só seria provado posteriormente.

- **Teorema do Anulamento**. *Uma função contínua num intervalo que é* > 0 *num ponto e* < 0 *em outro ponto, se anula em um terceiro ponto.*

Ainda em 1816 Gauss mostra sua terceira prova do TFA, baseada na teoria da integração. Em 1849, ano do jubileu de sua tese de doutorado, Gauss apresenta sua quarta prova do TFA, desta feita o teorema é enunciado para polinômios com variável e coeficientes complexos.

Em 1806 o suiço J. R. Argand (1768-1822) , um dos idealizadores da identificação do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$, publica um esboço de uma demonstração do TFA em um ensaio sobre a representação dos números complexos

[vide "Argand e o Teorema Fundamental da Álgebra e a Representação dos Números Complexos" em `http://www.ime.usp.br/~oliveira/TFA-ARGAND.pdf`].

Alguns anos depois, em 1814, Argand publica a primeira prova totalmente correta do Teorema Fundamental da Álgebra enunciado para polinômios com coeficientes complexos, porém utilizando um resultado - sobre a existência do mínimo de uma função contínua - que só em 1861 seria estabelecido por K. Weierstrass (o **Teorema do Máximo e do Mínimo**, publicado por G. Cantor (1845-1918) em 1870).

A prova de Argand de 1814, não reconhecida a princípio devido a tal lacuna, é muito provavelmente a mais simples das demonstrações do TFA. Entretanto tal prova não é elementar para o padrão moderno da matemática (a prova de Argand é baseada em trigonometria e as funções trigonométricas são transcendentais). Esta prova de Argand foi adotada em vários livros textos no século XIX mas foi aos poucos relegada a um segundo plano no século XX quando o TFA passou a ser apresentado como consequência do Teorema de Liouville - provado por J. Liouville (1809-1882) - em cursos de "Integração em uma Variável Complexa", em uma demonstração por contradição.

Em 1946 o inglês J. E. Littlewood (1885-1977) publica uma prova do TFA (vide referências) que elementariza a dada por Argand. Porém, a prova de Littlewood é sofisticada (e "somewhat artificial in appearance", em suas palavras). Sua prova é feita por contradição e por indução.

Em 2009, o holandês Theo de Jong [vide referências] publicou uma versão modernizada da primeira prova de Gauss para o TFA (1799). Porém, a apresentação não é elementar pois usa o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e assim, resultados superiores do Cálculo. Vide também o livro de Fine e Rosenberger [em referências].

O QUE É UMA PROVA ELEMENTAR DO TFA ?

O problema que se põe para provar o TFA de forma elementar reside na necessidade de utilizar o mínimo possível de instrumental matemático, como a palavra elementar indica. Isto não significa necessariamente que a prova é simples e, na verdade, existem muitas provas elementares que não são nem simples nem fáceis. Isto posto, saliento que a prova que apresentamos é simples para um estudante que conhece as propriedades de números complexos vistas nos livros de matemática nível médio - aliás, sobre números complexos utilizamos até menos do que é exposto nos livros de matemática nível médio já que não usaremos a Fórmula de Moivre, devida a A. de Moivre (1667-1754) - e um resultado básico apresentado no primeiro ano de cursos de Cálculo nas universidades.

Tradicionalmente o TFA é provado em cursos de uma variável complexa nos bacharelados de matemática e física e/ou nos cursos de pós-graduação em matemática e física, sendo que não raras vezes os alunos tem contato com tal teorema pela primeira vez na pós-graduação. Em tais cursos, via de regra o TFA é provado logo após o Teorema de Liouville o qual é deduzido da *Fórmula Integral de Cauchy*, devida a A. L. Cauchy (1789-1857), que para sua prova requer o estudo da Teoria da Integração em uma Variável Complexa. Obviamente, uma tal demonstração não é elementar e também não é simples, ainda que “fácil”. Muitas vezes o TFA é demonstrado utilizando a Teoria de Galois ou a Topologia Algébrica, que são teorias sofisticadas.

Já por volta de 1800 eram conhecidas demonstrações do TFA que não faziam uso da teoria da integração mas que eram no entanto não rigorosas pois os fundamentos da análise matemática ainda não estavam estabelecidos. Uma delas, a de J. Argand, apresentada em 1806 e baseada numa idéia de d’Alembert, é considerada fácil mas não elementar pois faz uso da extração das raízes n-ésimas, como n arbitrário em $\mathbb{N}$, de um número complexo arbitrário. Tal operação de radiciação não é trivial.

Em geral a operação de radiciação em $\mathbb{C}$ é feita utilizando a representação polar de um número complexo; isto é, utilizando ou a Fórmula de Moivre

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta, \text{ onde } n \in \mathbb{N},$$

ou a Fórmula de Euler

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y), \text{ com } x \text{ e } y \text{ números reais.}$$

Cabe aqui destacar que: uma função f é **algébrica** se satisfaz uma equação polinomial $p(x, f(x))$ onde p é um polinômio com coeficientes inteiros (por exemplo, a função raíz quadrada, $f(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$, é algébrica pois satisfaz a equação polinomial $p(x,y) = x - y^2 = 0$ já que $p(x, \sqrt{x}) = x - (\sqrt{x})^2 = x - x = 0$). A grosso modo, uma função é algébrica se ela pode ser obtida através de uma combinação finita das operações de soma, subtração, multiplicação e radiciação. Uma função é **transcendental** se ela não é algébrica (dizemos que a definição da função transcende a álgebra).

Cabem alguns comentários.

- O número de Euler e não é "nem um pouco elementar" e para formalizalo é tradicionalmente utilizada a teoria de séries infinitas. O número e é transcendental pois não é raíz de um polinômio com coeficiente inteiros e este fato foi provado em 1873 por C. Hermite.

- As funções trigonométricas e a função exponencial (e a função logarítmica) são formalizadas utilizando a teoria de séries infinitas ou equações diferenciais. Assim, as funções trigonométricas e a função exponencial são funções transcendentais.

As provas do TFA que usam a radiciação arbitrária de um número complexo qualquer (vide a prova de Argand e a modernização desta prova dada por Terkelsen) ou que utilizam a Fórmula de Moivre, ou a Fórmula de Euler, (vide as provas de Burckel, Cauchy, Fefferman, Redheffer, Rudin e Spivak) são não elementares.

As demostrações do TFA que utilizam derivação e/ou integração (processos infinitos) são também consideradas não elementares (vide Burckel e de Jong). Uma demonstração que utiliza o conceito de ângulo também não é elementar (vide Brenner e Lyndon).

As demonstrações elementares do TFA, feitas por indução sobre o grau do polinômio, iniciaram-se com Littlewood , cuja prova foi depois simplificada por Estermann (vide também Körner). Outras demonstrações com tal estilo, e recentes, foram dadas por Kochol e Searcóid. Vide também Remmert.

O problema com a demonstração de Argand reside na utilização da extração da raiz n-ésima arbitrária de um número complexo arbitrário e via de regra tal extração é feita usando a Fórmula de Moivre, a qual requer as funções transcendentais $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$. Ainda assim, a prova de Argand, ainda que classificada como "fácil", não é elementar.

Um dos pontos mais delicados para uma prova elementar do TFA é a exigência do não uso da trigonometria pois desde muito cedo em nossa educação somos convidados a aceitar as funções trigonométricas básicas $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ como naturais. Entretanto, com uma análise um pouco mais acurada não é tão difícil perceber que "faltava algo a ser explicado".

Por exemplo, as demonstrações para as relações trigonométricas que conhecemos até o nível médio, e muitas vezes universitário, são geométricas e não analíticas e portanto fazem uso da intuição geométrica ao invés de fórmulas ou métodos para calcular o seno e o coseno de um dado ângulo arbitrário. A este respeito notemos que conhecemos e às vezes ensinamos métodos para a extração das raízes quadradas e, às vezes, as raízes cúbicas, e não é difícil ensinar como computar o seno e o coseno do arco metade, $\sin(\theta/2)$, se soubermos calcular o seno e o coseno do arco inteiro, $\sin\theta$. Porém, não ensinamos métodos para computar o seno ou o coseno de um ângulo θ arbitrário.

Se nos for pedido para calcular os senos e cossenos abaixo teremos problemas:

$$\sin 1\,,\ \sin 2\,,\ \sin 3\,, sen90\,, ... \cos 1\,,\ \cos 3\,, \cos 5\,,\ \cos 8\,, ...\ \sin\sqrt{2}\,,\ \cos\sqrt{3}\ \text{ etc.}$$

Lembremos que acima $1, 2, 3, 5, 8, 90, \sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números reais e não graus ou radianos. Assim, apesar que temos $\sin(\pi/2) = 1$ não temos $\sin 90 = 1$. Destaquemos que Lindemann-Weierstrass (1885) demonstraram que, por exemplo, o número $\operatorname{sen}(1)$ é transcendental.

Mas então, quem são estas funções $\sin\theta$ e $\cos\theta$? Resposta:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ..., \text{ para todo número real } x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ... \quad , \text{ para todo número real } x.$$

Ou seja, tais funções são aqui apresentadas (este é uma maneira e existem outras) através da teoria de séries. Evidentemente não é apropriado ensinar por tais fórmulas no ensino médio. Ainda, o ensino geométrico das funções trigonométricas tem sido empregado por milênios. Porém, ele não é rigoroso para os padrões modernos de matemática pois as demonstrações analíticas não podem se apoiar em “desenhos”.

Em resumo, uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra que utilize trigonometria estará empregando uma teoria sofisticada, que é a teoria de séries (se apresentarmos as funções trigonométricas através de tal teoria) e portanto não pode ser considerada uma demonstração elementar.

Isto posto, eis alguns requisitos para uma prova elementar do TFA.

- ⋄ Não deve utilizar integração, nem séries, nem derivadas (processos infinitos).
- ⋄ Não pode usar trigonometria (Fórmulas de Moivre e de Euler).
- ⋄ Não pode utilizar fórmulas para extrair a raiz n-ésima, n arbitrário, de números em $\mathbb{C}$.

Se possível a prova deve ser preferencialmente curta (o conceito de curto depende das demonstrações circulantes, do teorema em questão, do padrão da época, do gosto de cada um; mas, via de regra, uma demonstração de uma página para um teorema difícil é considerada uma demonstração curtissima), fácil (por “fácil” queremos dizer que o tópico em questão pode ser apresentado a uma audiência com uma bagagem matemática não muito sofisticada em relação ao assunto tratado) e simples (isto é, com poucas ferramentas matemáticas utilizadas).

Notemos também que várias provas do TFA são feitas por absurdo e enquanto é verdade que podemos fazer demonstrações elementares por absurdo, devemos considerar que as feitas por absurdo são conceitualmente sofisticadas. Basta vermos que temos muitas dificuldades para transmitir a prova por absurdo da irracionalidade de $\sqrt{2}$ ou da infinitude da quantidade de números primos.

Nas referências, são por absurdo as provas de Argand, Burckel, Cauchy, Estermann, Feffermann, Körner, Littlewood, Redheffer, Remmert, Rudin, Spivak e Searcóid. Entre as demonstrações que não são por absurdo se encontram as onze provas do TFA apresentadas no livro de Fine e Rosenberger. Porém, tais provas utilizam teorias matemáticas de nível avançado (pós-graduação).

Ainda mais, um bom número das provas do TFA utilizam o processo de indução finita e, novamente, enquanto é certo que podemos fazer provas elementares por indução, devemos considerar que as demonstrações por indução são também conceitualmente sofisticadas. Como exemplo, notemos a dificuldade em ensinar a alguém a demonstração por indução para a fórmula do binômio de Newton ou a demonstração por indução do algoritmo da divisão de polinômios.

Nas referências que apresento, são por indução as demonstrações de Estermann, Kochol, Körner, Littlewood, Remmert e Searcóid e também algumas das demonstrações do TFA apresentadas no livro de Fine e Rosenberger.

A extração de raízes quadradas de um número complexo arbitrário é admissível devido à combinação dos seguintes motivos.

- Métodos para resolver equações do segundo grau são conhecidos desde a antiguidade, na Babilônia (localizada, aproximadamente, no atual Iraque).

- As fórmulas para as raízes quadradas de um número complexo arbitrário são conhecidas e deduzíveis por quem tenha um mínimo de conhecimento matemático.

- A função raiz quadrada é algébrica.

ESTRATÉGIA DA PROVA DO TFA

A estratégia para provar o TFA consiste em subdividi-lo em duas importantes afirmações.

- A primeira é a mais profunda, utilizando a continuidade de $\mathbb{R}$, é padrão e considerada de fácil verificação. Esta afirmação garante a existência de um ponto de mínimo para uma função contínua, sob determinadas hipóteses.

- A segunda afirmação é conceitualmente simples, porém mais difícil de provar, e para ela existem centenas de provas com graus de dificuldade, sofisticação e habilidade, ou uma combinação destes, variando bastante de uma prova para outra, e muitas destas provas são importantes para o desenvolvimento de novos campos de pesquisa em matemática. A segunda afirmação estabelece que, dado um polinômio complexo e não constante P então o valor da função $|P| = |P(z)|$ em seu ponto de mínimo global é zero.

A PROVA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

PRELIMINARES

Topologia do Plano

Definição. Dado um ponto $P = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto P é menor ou igual a R é chamado de disco compacto de centro (a,b) e raio R [também dito círculo fechado de centro (a,b) e de raio R]. Utilizamos a seguinte notação:

$$D(P;R) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq R\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2\right\}.$$

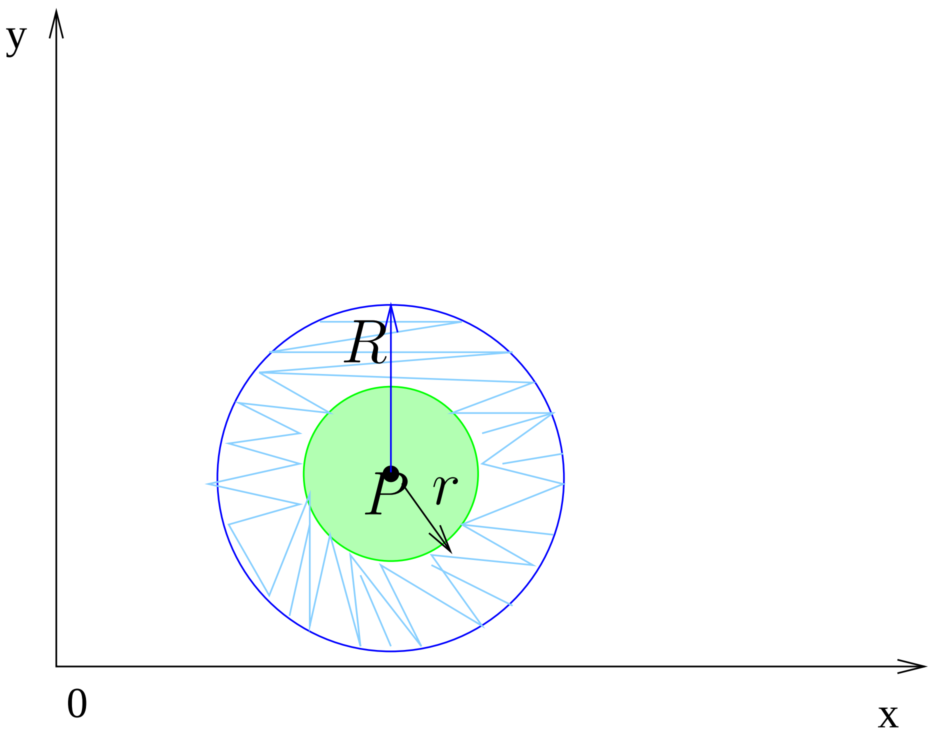

Figura 1: Dois discos compactos centrados em P, de raios r e R.

O Conjugado e o Módulo.

Definição. Dado um número complexo $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, chamamos o número a de parte real de z e o número b de parte imaginária de z.

Notação.

$$\mathrm{Re}(z) = a \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}(z) = b\ .$$

Seja $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Então,

- O conjugado de z é o número complexo

$$\overline{z} = a - bi\ .$$

- O módulo de z é o número real positivo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}\ .$$

Adição e Multiplicação por Escalar Real: Interpretação Geométrica.

Seja $z = a + bi$, $w = c + di$, com a, b, c, d números reais. Seja λ um escalar real.

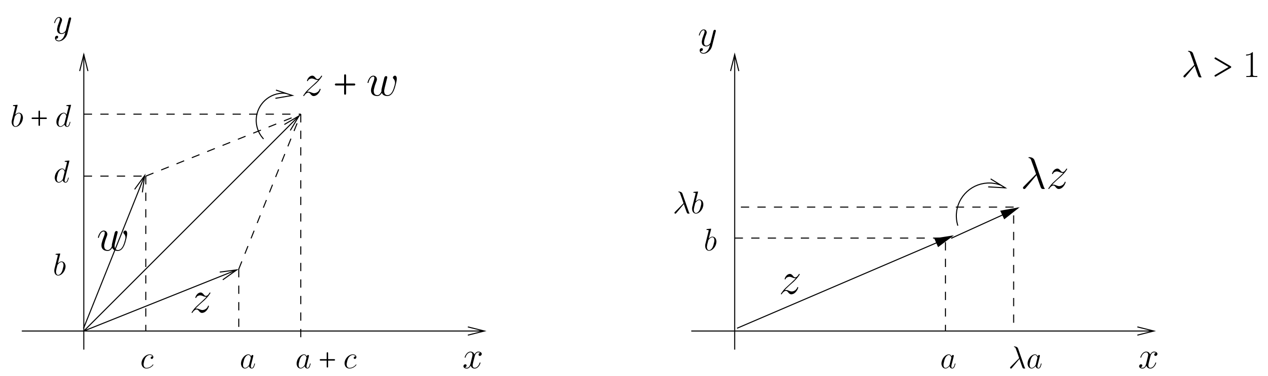

Figura 2: Adição e Multiplicação por Escalar Real

Notemos que, vide figura acima,

$$z + w = (a + c) + i(b + d) \qquad \text{e} \qquad \lambda z = \lambda a + i\lambda b\ .$$

Identidade Básica

Utilizemos que

$$|z|^2 = z\overline{z} \ .$$

Então, obtemos

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} =$$

$$= |z|^2 \ + \ z\overline{w} \ + \ w\overline{z} \ + \ |w|^2 =$$

$$= |z|^2 \ + \ z\overline{w} \ + \ \overline{\overline{w}z} \ + \ |w|^2 =$$

$$= |z|^2 \ + \ 2\mathrm{Re}[z\overline{w}] \ + \ |w|^2 \ .$$

Assim, temos as identidades:

$$|z+w|^2 \ = \ |z|^2 \ + \ 2\mathrm{Re}[z\overline{w}] \ + \ |w|^2 \ ,$$

e [lembrando que Re($\overline{z}$) =Re(z)],

$$|z+w|^2 \ = \ |z|^2 \ + \ 2\mathrm{Re}[\overline{z}w] \ + \ |w|^2 \ .$$

Primeira e Segunda Desigualdades Triangulares.

Dados $z \in \mathbb{C}$ e w em $\mathbb{C}$ valem as desigualdades

$$|z+w| \;\leq\; |z|+|w| \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \big||z|-|w|\big| \leq |z-w|\ ,$$

as quais interpretamos, respectivamente, como (vide figura abaixo):

- Primeira. O comprimento de um lado de um triângulo é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.
- Segunda. O comprimento de um lado de um triângulo é maior que a diferença dos comprimentos dos outros dois lados.

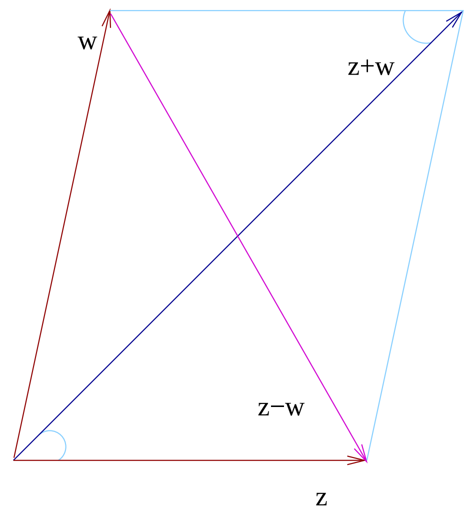

Figura 3: Ilustrando $\big||\mathbf{z}|-|\mathbf{w}|\big| \;\leq\; |\mathbf{z} \pm \mathbf{w}| \;\leq\; |\mathbf{z}|+|\mathbf{w}|$

Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, aplicando a 1 desigualdade triangular duas vezes temos

$$|z_1+z_2+z_3| \;\;\leq\;\; |z_1|+|z_2+z_3| \;\;\leq\;\; |z_1|+|z_2|+|z_3|.$$

Ainda mais, aplicando inicialmente a 2 desigualdade triangular e em seguida a 1 desigualdade triangular obtemos (já que $-|z_2+z_3| \geq -|z_2|-|z_3|$),

$$|z_1+z_2+z_3| \;\;\geq\;\; |z_1|-|z_2+z_3| \;\;\geq\;\; |z_1|-|z_2|-|z_3|\ .$$

Assim, dados n números complexos $z_1, ..., z_n$, concluímos que:

$$|\mathbf{z_1}|-|\mathbf{z_2}|-...-|\mathbf{z_n}| \;\;\leq\;\; |\mathbf{z_1}+...+\mathbf{z_n}| \;\;\leq\;\; |\mathbf{z_1}|+...+|\mathbf{z_n}|\ .$$

O limite de um Polinômio Real, no Infinito.

- Dado um polinômio de grau 1, $P(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, o gráfico de P é uma reta, ou crescente ($a > 0$) ou decrescente ($a < 0$). Logo,

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty \ .$$

- Dado $P(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, o gráfico de P é uma parábola, com concavidade voltada para cima (baixo) se $a > 0$ ($a < 0$). Logo,

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty \ .$$

- Dado $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} ... + a_1 x + a_0$, com $a_n, ..., a_0$ reais e $a_n \neq 0$, temos

$$P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x_n} \right)$$

e ainda, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-1}}{x} = ... = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{x^{n-1}} = 0$. Assim, concluímos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty \, ,$$

com o limite sendo $+\infty$ ou $-\infty$, dependendo do sinal de a_n, se n é par ou ímpar e, por último, se o variável x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Desta forma, dado um polinômio real, temos as quatro possibilidades :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \, , \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty \, , \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \ .$$

Sumarizando as quatro possibilidades acima, escrevemos

$$\lim_{|x|\to+\infty} |P(x)| = +\infty \ .$$

Consequentemente, vemos que a função $|P(x)|$ satisfaz:

$$\begin{cases} \text{é contínua e positiva} \\ \text{tende a } +\infty \text{ se } x \to -\infty \\ \text{tende a } +\infty \text{ se } x \to +\infty \ . \end{cases}$$

Assim, intuitivamente comparando o gráfico da função $|P(x)|$ com um vale, percebemos que o gráfico de $|P(x)|$ contém um ponto $(x_0, |P(x_0)|)$ que corresponde ao "ponto mais baixo" deste vale. Isto é, existe um ponto x_0 tal que

$$|P(x_0)| \ \leq \ |P(x)| \, , \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

O Limite de um Polinômio Complexo, no Infinito.

Dado um polinômio complexo de grau n,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \,, \quad a_n \neq 0 \,,$$

com as duas desigualdades triangulares para números complexos obtemos

$$|P(z)| \quad \geq \quad |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - ... - |a_1 z| - |a_0| \,.$$

Donde segue, já que o módulo do produto (de números) é o produto dos módulos,

$$|P(z)| \quad \geq \quad |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - ... - |a_1||z| - |a_0| \,.$$

Notemos que $|z|$ é um número real positivo, assim como os números $|a_n|, ...|a_0|$ são também reais e positivos e, ainda, o número $|a_n|$ é estritamente positivo. Desta forma, pelo caso já provado para polinômios reais concluímos que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - ... - |a_1||z| - |a_0| \ = \ +\infty \ .$$

Em suma, graças à última desigualdade acima, acabamos de constatar que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| \ = \ +\infty \ .$$

A Translação na Variável, $P(z+z_0)$, para um Polinômio.

Consideremos um polinômio complexo de grau $n \geq 0$,

$$P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 \,, \;\; a_n \neq 0 \,,$$

e z_0 um número fixo qualquer em $\mathbb{C}$.

Não é difícil perceber (verificar) que:

- $P(z+z_0)$ é um polinômio na variável z,

pois expandindo $a_n(z+z_0)^n+...+a_2(z+z_0)^2+a_1(z+z_0)+a_0$ obtemos um polinômio.

- $P(z+z_0)$ é um polinômio com termo independente $P(z_0)$,

pois computando o polinômio $P(z+z_0)$ no ponto $z=0$ obtemos o número $P(z_0)$.

- $P(z+z_0)$ é um polinômio com termo dominante a_n,

pois expandindo

$$a_n(z+z_0)^n + a_{n-1}(z-z_0)^{n-1} + ... + a_2(z+z_0)^2 + a_1(z+z_0) + a_0$$

vemos que o coeficiente do monômio z^n (o de maior grau) é a_n ∎

Exemplo. Seja $P(z) = 7z^3 + 5z^2 + 3z + 4$ e $z_0 = 10$. Então,

$$\begin{aligned} P(z+10) &= 7(z+10)^3 + 5(z+10)^2 + 3(z+10) + 4 = \\ &= 7(z^3 + 30z^2 + 300z + 1000) + 5(z^2 + 20z + 100) + 3(z+10) + 4 = \\ &= 7z^3 + (210+5)z^2 + (2100+100+3)z + (7000+500+30+4) = \\ &= 7z^3 + 215z^2 + 2203z + 7534 \;\; \blacksquare \end{aligned}$$

O Monômio de Menor Grau k, com $k \geq 1$,
em um Polinômio não Constante, é Destacável (Evidenciável).

Exemplos.

- Dado $P(z) =) = 7z^3 + 5z^2 + 3z + 4$, destacamos z:

$$P(z) = 4 + z(3 + 5z + 7z^2).$$

- Dado $P(z) = 8z^4 + 7z^3 + 5z^2 + 4$, destacamos z^2:

$$P(z) = 4 + z^2(5 + 7z + 8z^2)\ .$$

- Dado $P(z) = 10z^7 + 9z^5 + 6z^3$, destacamos z^3:

$$P(z) = z^3(6 + 9z^2 + 10z^4)\ .$$

- O polinômio $P(z) = 1 + 2z^4$ já apresenta o monômio de menor grau k, $k \geq 1$, em destaque.

- O polinômio $P(z) = z^{13}$ já apresenta o monômio de menor grau k, $k \geq 1$, em destaque.

- O polinômio $P(z) = 3 - 4z$ já apresenta o monômio de menor grau k, $k \geq 1$, em destaque.

- O polinômio $P(z) = 5$, não apresenta nenhum monômio de grau k, $k \geq 1$. Logo, tal polinômio não se enquadra em tal análise.

INÍCIO DA DEMONSTRAÇÃO

A prova que apresentamos assume apenas a continuidade dos polinômios complexos e as seguintes consequências da completude de $\mathbb{R}$:

- Toda função contínua $f : D \to \mathbb{R}$, D um disco compacto em $\mathbb{R}^2$, assume mínimo em D (Teorema de Bolzano-Weierstrass).
- Existência de raízes quadradas de números positivos.

Nas Observações Finais indicamos um artigo provando o TFA, sem radiciação.

Raízes Quadradas

Como é bem sabido, a equação $z^2 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, é solúvel em $\mathbb{C}$ e temos

$$\pm z = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \ + \ i\text{sgn}(b)\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,,$$

$$\text{com } \text{sgn}(b) = \frac{b}{|b|} \text{ se } b \neq 0\,, \text{ e } \text{sgn}(0) = 1.$$

Aplicando tal fórmula repetidamente obtemos:

$$\text{todas as } 2^j - \text{raízes}\,, j \in \mathbb{N}\,, \text{ de } z = \pm 1 \text{ e } z = \pm i\ .$$

Com tal fórmula obtemos as duas raízes quadradas de $+1$, -1, $+i$ e $-i$.
Em seguida obtemos as quatro raízes quartas de $+1$, -1, $+i$ e $-i$.
Em seguida obtemos as oito raízes oitavas de $+1$, -1, $+i$ e $-i$.
Em seguida as 16 raízes de ordem 16 de $+1$, -1, $+i$ e $-i$ e assim por diante...

Teorema Fundamental da Álgebra: Seja $P(z)$ um polinômio em $\mathbb{C}$, com grau$(P) \geq 1$. Então,

(A) $|P|$ assume um mínimo em $\mathbb{C}$, isto é, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(B) Para tal z_0 temos $P(z_0) = 0$.

Prova. Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, com grau$(P) = n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.

(A) Analogamente a polinômios reais, os quais tendem ao infinito se a variável tende a $\pm\infty$, temos que $|P(z)|$ tende a $+\infty$ se $|z|$ tende a $+\infty$. De fato, aplicando a 2 e a 1 desigualdades triangulares, nesta ordem, temos

$$|P(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - ... - |a_1 z| - |a_0| ,$$

$$\text{e assim, } |P(z)| \geq |a_n| |z|^n - |a_0| - .... - |a_{n-1}| |z|^{n-1} .$$

Já vimos que o limite da expressão no lado direito desta última inequação tende a $+\infty$ se $|z| \to +\infty$. Portanto,

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty .$$

Assim, pela definição do símbolo $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$, existe um raio $R > 0$ tal que $|P(z)| > |P(0)|$ se $|z| > R$ e, como a função $|P(z)|$ é uma função contínua no disco compacto centrado na origem $D(0; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$,

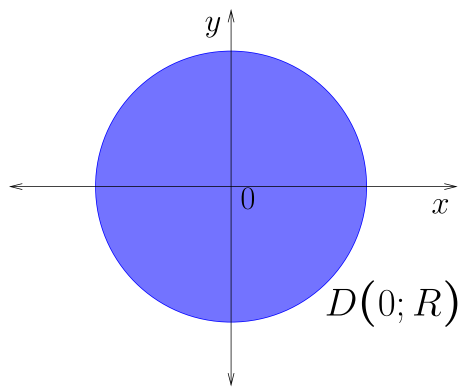

Figura 4: O disco compacto centrado na origem $z = 0$ e de raio R.

pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass segue que a função $|P(z)|$ restrita a tal disco $D(0;R)$ assume um valor mínimo em um ponto $z_0 \in D(0;R)$:

$$\text{temos } |P(z)| \geq |P(z_0)|\,, \text{ para todo } z \in D(0;R)\ .$$

Porém, também temos $|P(0)| \geq |P(z_0)|$ já que $0 \in D(0;R)$. Donde segue,

$$\begin{cases} |P(z)| \geq |P(z_0)|\,, & \forall z \in D(0;R) \\ |P(z)| > |P(0)|\,, & \forall\ |z| > R \\ |P(0)| \geq |P(z_0)|\ . \end{cases}$$

O que prova a desigualdade

$$|P(z)| \geq |P(z_0)|\,, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}\ .$$

Isto é, z_0 é ponto de mínimo global (ou, absoluto) da função $|P(z)|$.

A prova da afirmação (A) está encerrada.

Duas simplificações para provar (B).

(1) Já mostramos que $p(z) = P(z + z_0)$ é um polinômio e que:

- O coeficiente dominante do polinômio $p(z) = P(z + z_0)$ é o número a_n. Logo, o polinômio $p(z) = P(z + z_0)$ também tem grau n.
- O termo independente do polinômio $p(z) = P(z + z_0)$ é $p(0) = P(z_0)$.

Assim sendo temos que,

$$P(z + z_0) = P(z_0) + b_1 z + ... + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n\,, \qquad \text{com } b_{j's} \in \mathbb{C}\,, \text{e } b_n = a_n.$$

Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que o valor $P(z_0)$ é assumido em $z = 0$. Isto é, podemos assumir que $z_0 = 0$ e assim temos,

$$(1) \qquad |P(z)|^2 \;\geq\; |P(0)|^2\,, \ \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

(2) Sendo $b_n = a_n \neq 0$, já vimos que existe o menor $k \in \{1, ..., n\}$ tal que o coeficiente do monômio z^k (o número b_k) é não nulo. Então, destacando z^k obtemos a simplificação abaixo para o polinômio P,:

$$(2) \qquad P(z) = P(0) + z^k Q(z)\,, \ \text{onde } Q \text{ é um polinômio e } Q(0) = b_k \neq 0\,.$$

Iniciemos então a prova de (B).

Introduzamos a notação tradicional para o círculo unitário centrado na origem:

$$S^1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\} .$$

(B) Para todo $r \geq 0$ e $\omega \in S^1$ temos, utilizando (1), $|P(r\omega)|^2 \geq |P(0)|^2$ e por (2),

$$\left|P(0)+r^k\omega^k Q(r\omega)\right|^2 - \left|P(0)\right|^2 = \left[\, P(0)+r^k\omega^k Q(r\omega)\,\right]\left[\,\overline{P(0)+r^k\omega^k Q(r\omega)}\,\right] - \left|P(0)\right|^2 \geq 0 ,$$

que simplificando nos fornece,

$$2r^k \mathrm{Re}\left[\overline{P(0)}\omega^k Q(r\omega)\,\right] + r^{2k}\left|Q(r\omega)\right|^2 \geq 0 , \quad \forall r \geq 0 , \forall \omega \in S^1 ,$$

e então, dividindo por $r^k > 0$ e fixando $\omega \in S^1$ obtemos

$$2\mathrm{Re}\left[\,\overline{P(0)}\, Q(r\omega)\omega^k\,\right] + r^k\left|Q(r\omega)\right|^2 \geq 0 , \quad \forall r > 0 ,$$

com a expressão no lado esquerdo contínua em $r \in [0, +\infty]$. Logo, em $r = 0$ temos

(3) $$2\mathrm{Re}\left[\,\overline{P(0)}Q(0)\,\omega^k\,\right] \geq 0 , \ \omega \text{ arbitrário em } S^1 .$$

Seja $\alpha = \overline{P(0)}Q(0)$. Fatorando potências[2] de 2 escrevemos $k = 2^j m$, com m ímpar. Substituindo $\omega = 1$ em (3) temos $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$. Escolhendo, como podemos, ω tal que $\omega^{2^j} = -1$, temos $\omega^k = \left(\omega^{2^j}\right)^m = -1$ e concluímos $\mathrm{Re}[\alpha] \leq 0$ e portanto, $\mathrm{Re}[\alpha] = 0$. Escolhendo, como também podemos, um complexo ω tal que $\omega^{2^j} = i$ obtemos $\omega^k = \left(\omega^{2^j}\right)^m = i^m = \pm i$ e $\overline{\omega}^k = \mp i$ e então, substituindo os valores ω e $\overline{\omega}$ em (3) obtemos a dupla de desigualdades $\mathrm{Re}[\pm \alpha i] = \mp \mathrm{Im}[\alpha] \geq 0$. Portanto, $\alpha = 0$ e, como $Q(0) \neq 0$, $P(0) = 0$.

A prova de (B) está encerrada. A prova do TFA está encerrada ■

[2]Exemplos: $38 = 2^1.19$, $12 = 2^2.3$, $17 = 2^0.17$, $96 = 2^5.3$, $168 = 2^3.21$, $172 = 2^2.43$, $256 = 2^8$, etc.

OBSERVAÇÕES FINAIS.

(O1) **Uma prova bastante fácil**, porém utilizando trigonometria, de que (3) implica $P(0) = 0$, é obtível através da Fórmula de Moivre

$$(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\text{sen}n\theta\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,\ \text{e}\ \theta \in \mathbb{R}\ .$$

Considerando $\omega = \cos\theta + i\text{sen}\theta \in S^1$, escolhemos valores de $\theta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\omega^k = \cos k\theta + i\text{sen}k\theta\,,\ k\ \text{como acima, valha}\ \pm 1\ \text{e}\ \pm i\ .$$

Assim, escrevendo $\overline{P(0)}Q(0) = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos,

$$\theta = 0 \implies 2a \geq 0 \qquad\qquad \theta = \frac{-\pi}{k} \implies -2a \geq 0$$

$$\theta = \frac{-1\pi}{2k} \implies -2b \geq 0 \qquad\qquad \theta = \frac{-3\pi}{2k} \implies 2b \geq 0\ .$$

Logo, $a = b = 0$ e $\overline{P(0)}Q(0) = 0$, o que implica $P(0) = 0$ ∎

(O2) O termo "números imaginários" deve-se a René Descartes. O termo "números complexos" é devido a Gauss. Tais terminologias são hoje consideradas inadequadas. Porém, na falta de algo melhor, continuamos com elas.

(O3) Para uma versão atual da belissima prova de Argand, vide Terkelsen.

(O4) Para uma versão atual da 1 prova de Gauss, vide Jong.

(O5) **Paisagem Analítica** de uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é o gráfico no espaço tri-dimensional da função $|f(z)|$. Abaixo vemos o gráfico da função

$$|\cos z|, \text{ onde } |z| < 1 \ .$$

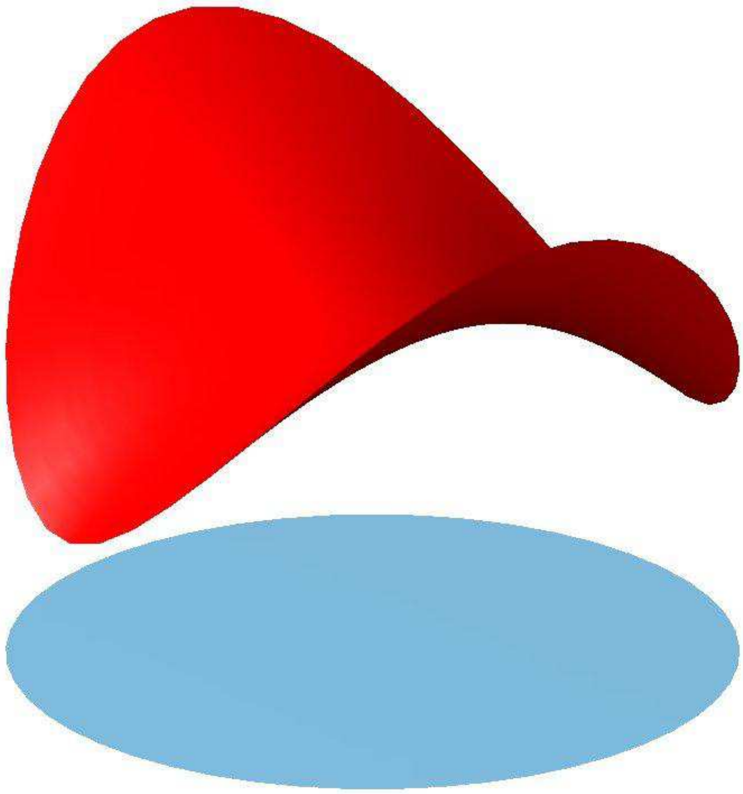

Figura 5: O gráfico da função $|cosz|, |z| < 1$

Referências:

[1] Argand, J. R., "Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse", *Annales de Mathe mátiques Pures et Appliquées*, tome 5 (1814-1815), p. 197-209.

[2] Brenner, J. L., and Lyndon, R. C., "Proof of the Fundamental Theorem of Algebra", *Amer. Math. Monthly*, Vol 88, No. 4 (April 1981), pp. 253-256.

[3] Burckel, R. B., "Fubinito (Immediately) Implies FTA", *The American Mathematical Monthly*, Vol 113, No. 4 (April 2006), pp. 344-347.

[4] Burckel, R. B., "A classical proof of the Fundamental Theorem of Algebra dissected", *Mathematical Newsletter of the Ramanujan Mathematical Society*, Vol 7, No. 2 (2007), pp. 37-39.

[5] Cauchy, A. L., *Cours d'Analyse*, Vol VII, Première Partie, Chapitre X, Editrice CLUEB, Bologna 1990.

[6] Estermann, T., "On The Fundamental Theorem of Algebra", *Journal of The London Mathematical Society*, 31 (1956), pp. 238-240.

[7] Fefferman, C., "An Easy Proof of the Fundamental Theorem of Algebra", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 74, No. 7. (Aug. - Sep., 1967), pp. 854-855.

[8] Fine, B. and and Rosenberger, G., *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[9] Jong, Theo de, "Lagrange Multipliers and the Fundamental Theorem of Algebra", *The American Mathematical Monthly*, Vol 116, Nov. 2009, 828-830.

[10] Kochol, M., "An e Elementary Proof of the Fundamental Theorem of Algebra", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30 (1999), pp. 614-615.

[11] Körner, T. W., "On The Fundamental Theorem of Algebra", *The American Mathematical Monthly*, Vol 113, No. 4 (April 2006), pp. 347-348.

[12] Littlewood, J. E., "Mathematical notes (14): Every polynomial has a root", *Journal of The London Mathematical Society* 16 (1941), pp. 95-98.

[13] Milies, F. C. P., "A Emergência dos Números Complexos" - Notas de aula.

[14] Oliveira, O. R. B., "The Fundamental Theorem of Algebra: An Elementary and Direct Proof", *The Mathematical Intelligencer* Vol 33, No 2 (2011), pp. 1-2. Disponível em `http://www.ime.usp.br/~oliveira/FTAAUTHOR.pdf`.

[15] Oliveira, O. R. B., "The Fundamental Theorem of Algebra: From the Four Basic Operations", American Mathematical Monthly, 119 No. **9**, pp. 753–758. `http://dx.doi.org/10.4169/amer.math.monthly.119.09.753`. Disponível em `http://www.ime.usp.br/~oliveira/FTA-MONTHLY.pdf`.

[16] Ovchinnikov, S., *Number Systems - An introduction to Algebra and Analysis*, Pure and Applied Undergraduate Texts, American Mathematical Society, 2015.

[17] Redheffer, R. M., "What! Another Note Just on the Fundamental Theorem of Algebra?", *Amer. Math. Monthly*, Vol 71, No. 2. (Feb., 1964), pp. 180-185.

[18] Remmert, R., "The Fundamental Theorem of Algebra", in H. -D. Ebbinghaus, et al., eds., *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, no. 123, Springer-Verlag, New York, 1991, Chapters 3 and 4.

[19] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Inc, Tokyo, 1963.

[20] Searcóid, M. O., *Elements of Abstract Analysis*, Springer-Verlag, London 2003.

[21] Smithies, F., "A forgotten paper on The Fundamental Theorem of Algebra", *Notes and Recods of the Royal Society of London*, Vol. 54, No. 3, September 2000, pp. 333-341.

[22] Spivak, M., *Calculus*, 4th edition, Publish or Perish, Inc., 2008.

[23] Terkelsen, F. "The Fundamental Theorem of Algebra", *The American Mathematical Monthly*, Vol 83, No. 8. (October, 1976), p. 647.