O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA:
VIA AS QUATRO OPERAÇÕES BÁSICAS E INDUÇÃO

Baseado em: The Fundamental Theorem of Algebra: from the four basic operations,
O. R. B. de Oliveira, *American Mathematical Monthly*, 119 *no. 9 (2012) 753-758*

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

29 de novembro de 2014

Preliminares

Seja i no corpo complexo tal que

$$i^2 = -1.$$

No espaço vetorial $\mathbb{C}$ [isomorfo a $\mathbb{R}^2$] definimos a norma $|\cdot|_1$ [dita norma-1] por

$$|z|_1 \ = \ |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|.$$

Em $\mathbb{R}^2$, todas as normas são equivalentes (logo, equivalentes à norma euclideana).

Dados quatro números reais arbitrários a, b, c e d temos

$$\begin{cases} (|a|+|b|)^2(|c|+|d|)^2 \leq 4(a^2+b^2)(c^2+d^2) = 4\Big[(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\Big] \leq 4\Big[|ac-bd|+|ad+bc|\Big]^2 \\ \text{e} \\ |ac-bd|+|ad+bc| \leq (|a|+|b|)(|c|+|d|). \end{cases}$$

Assim, dados $z = a+bi$ e $w = c+di$ em $\mathbb{C}$ obtemos

$$|\overline{z}|_1 = |z|_1 \quad \text{e} \quad \frac{|z|_1|w|_1}{2} \leq |zw|_1 \leq |z|_1|w|_1.$$

O Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema Fundamental da Álgebra. Consideremos um polinômio complexo $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$, com $N \geq 1$ e a_j em $\mathbb{C}$ para cada $0 \leq j \leq N$ e $a_N \neq 0$. Então, existe um ponto z_0 em $\mathbb{C}$ tal que

$$P(z_0) = 0.$$

A seguir, dividimos a prova em três partes.

(I) Temos

$$\lim_{|z|_1 \to +\infty} P(z)\overline{P(z)} = +\infty$$

e existe z_0 em $\mathbb{C}$ tal que

(I.1) $$P(z)\overline{P(z)} \geq P(z_0)\overline{P(z_0)}, \text{ para todo } z \text{ em } \mathbb{C}.$$

Prova.

Desenvolvendo $P(z)\overline{P(z)}$ encontramos

$$P(z)\overline{P(z)} = \sum_{j=0}^{N} a_j\, \overline{a_j}\, z^j\, \overline{z}^j \; + \sum_{0 \leq j < k \leq N} 2\mathrm{Re}[a_j\, \overline{a_k}\, z^j\, \overline{z}^k], \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Aplicando a desigualdade triangular e as propriedades para $|\cdot|_1$ segue

$$P(z)\overline{P(z)} \geq \frac{|a_N|_1^2\, |z|_1^{2N}}{2^{2N+1}} \; - \sum_{0 \leq j < k \leq N} 2\, |a_j|_1\, |a_k|_1\, |z|_1^{j+k}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Desta forma,

$$P(z)\overline{P(z)} \to \infty \text{ se } |z|_1 \to \infty.$$

Pelo teorema de Weierstrass $P(z)\overline{P(z)}$ tem mínimo global em algum $z_0 \in \mathbb{C}$.

(II) Extração de raízes n-ésimas arbitrárias.

- Dado $n = 2$ ou n ímpar, a imagem do monômio $z \mapsto z^n$ é $\mathbb{C}$.

  Prova.

  Dado c em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $p(z) = z^n - c$, por (I) existe w_0 tal que

  $$p(rw + w_0)\overline{p(rw + w_0)} \geq p(w_0)\overline{p(w_0)}, \text{ para quaisquer } r > 0 \text{ e } w \in \mathbb{C}.$$

  Afirmação: $w_0 \neq 0$. Caso contrário, temos $w_0 = 0$, $p(w_0) = -c$ e então

  $$[(rw)^n - c]\overline{[\,(rw)^n - c\,]} \;\geq\; c\overline{c}, \text{ para quaisquer } r > 0 \text{ e } w \in \mathbb{C}.$$

  Donde segue

  $$r^{2n} w^n \overline{w^n} - 2r^n \mathrm{Re}[w^n \overline{c}] \geq 0 \text{ para quaisquer } r > 0 \text{ e } w \in \mathbb{C}.$$

  Dividindo por r^n e impondo $r \to 0^+$ obtemos

  $$\mathrm{Re}[w^n \overline{c}] \leq 0, \text{ para todo } w \in \mathbb{C}.$$

  Se $n = 2$, substituindo acima $w = 1$, $w = i$ e $w = 1 \pm i$ achamos $c = 0$ ↯

  Se n é ímpar, substituindo acima $w = \pm 1$ e $w = \pm i$ achamos $c = 0$ ↯

  Está provado que $w_0 \neq 0$♣

A seguir, desenvolvendo $(w_0+z)^n$ pelo binômio de Newton escrevamos

$$\begin{cases} p(w_0+z)=(w_0+z)^n-c=(w_0^n-c)+zq(z)=p(w_0)+zq(z), \\ \\ \text{com } q(z) \text{ um polinômio com termo independente } q(0)=nw_0^{n-1}\neq 0. \end{cases}$$

Como w_0 é ponto de mínimo global de $p(z)\overline{p(z)}$, obtemos

$$[zq(z)+p(w_0)][\,\overline{zq(z)+p(w_0)}\,] \geq p(w_0)\overline{p(w_0)}, \text{ para todo } z \text{ em } \mathbb{C}.$$

Logo,

$$zq(z)\overline{zq(z)}+2\mathrm{Re}[\,\overline{p(w_0)}zq(z)\,] \geq 0, \text{ para todo } z \text{ em } \mathbb{C}.$$

Substituindo $z=rw$ encontramos

$$r^2wq(w)\overline{wq(w)}+2r\mathrm{Re}[\,\overline{p(w_0)}wq(rw)\,] \geq 0, \text{ para quaisquer } r>0 \text{ e } w\in\mathbb{C}.$$

Então, dividindo por r e a seguir impondo $r\to 0^+$ encontramos

$$\mathrm{Re}[\,\overline{p(w_0)}q(0)w\,] \geq 0, \text{ para todo } w \text{ em } \mathbb{C}.$$

Variando w no conjunto $\{1,-1,i,-i\}$ obtemos

$$\overline{p(w_0)}q(0)=0.$$

Logo, $p(w_0)=0$. Isto é, $w_0^n=c$. Donde segue $\{z^n : z\in\mathbb{C}\}=\mathbb{C}$.

Provamos a extração de raízes quadradas e de raízes ímpares em $\mathbb{C}$ ♣

◇ Dado n arbitrário em $\mathbb{N}$, a imagem do monômio $z\mapsto z^n$ é $\mathbb{C}$.

Prova.

Fatoremos $n=2^jm$, com j em $\mathbb{N}$ e m ímpar. Definamos

$$S(z)=z^2 \quad \text{e} \quad M(z)=z^m\,, \quad \text{onde } z\in\mathbb{C}.$$

Logo,

$$z^n=z^{2^jm}=\left(z^{2^j}\right)^m=M\circ S^j(z), \text{ com } \; S^j=S\circ\cdots\circ S \;(j \text{ vezes}).$$

A afirmação segue então do caso $n=2$ e do caso n ímpar.

Provamos (II). Isto é, existem raízes n-ésimas arbitrárias em $\mathbb{C}$ ♣

(III) Retornemos ao polinômio no enunciado do teorema fundamental da álgebra,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N.$$

Por (I), existe z_0 em $\mathbb{C}$ que é um ponto de mínimo global de $P(z)\overline{P(z)}$.

Afirmação: $P(z_0) = 0$.

Prova.

Considerando o polinômio $P(z_0 + z)$, de grau n [com coeficiente dominante a_N e termo independente $P(z_0)$, cheque], podemos assumir $z_0 = 0$ [cheque].

Temos então

$$\text{(III.1)} \qquad P(z)\overline{P(z)} - P(0)\overline{P(0)} \geq 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Podemos escrever [cheque]

$$\begin{cases} P(z) = P(0) + z^k Q(z), \\ \text{com } k \geq 1 \text{ e } Q(z) \text{ um polinômio e } Q(0) \neq 0. \end{cases}$$

Substituindo $z = r\zeta$ em (III.1) obtemos

$$r^{2k}\zeta^k Q(r\zeta)\overline{\zeta^k Q(r\zeta)} + 2r^k \mathrm{Re}[\overline{P(0)}Q(r\zeta)\zeta^k] \geq 0, \text{ para quaisquer } r > 0 \text{ e } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Donde segue, dividindo por r^k e impondo $r \to 0^+$,

$$\mathrm{Re}[\,\overline{P(0)}Q(0)\zeta^k\,] \geq 0, \text{ para todo } \zeta \text{ em } \mathbb{C}.$$

Devido a (II) podemos escolher valores de ζ tais que $\zeta^k = \pm 1$ e $\zeta^k = \pm i$.

Concluímos então que $\overline{P(0)}Q(0) = 0$. Logo, $P(0) = 0$♣

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil
oliveira@ime.usp.br

Vide Verso para referências

Referências.

[1] Argand, J. R., “Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d’une application à la démonstration d’un théorème d’analyse”, *Annales de Mathe mátiques Pures et Appliquées*, tome 5 (1814-1815), p. 197-209.

[2] Cauchy, A. L., *Cours d’Analyse*, Vol VII, Première Partie, Chapitre X, Editrice CLUEB, Bologna 1990.

[3] de Oliveira, O. R. B., “The Fundamental Theorem of Algebra: An Elementary and Direct Proof”, *The Mathematical Intelligencer* Vol 33, No 2 (2011), pp. 1-2.

[4] de Oliveira, O. R. B., “The Fundamental Theorem of Algebra: From the Four Basic Operations”, Amer. Math. Monthly, Vol 119 No. 9 (2012), pp. 753–758.

[5] Estermann, T., “On The Fundamental Theorem of Algebra”, *Journal of The London Mathematical Society*, 31 (1956), pp. 238-240.

[6] Fefferman, C., “An Easy Proof of the Fundamental Theorem of Algebra”, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 74, No. 7. (Aug. - Sep., 1967), pp. 854-855.

[7] Fine, B. and and Rosenberger, G., *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[8] Körner, T. W., “On The Fundamental Theorem of Algebra”, *Amer. Math. Monthly*, Vol 113, No. 4 (April 2006), pp. 347-348.

[9] Littlewood, J. E., “Mathematical notes (14): Every polynomial has a root”, *Journal of The London Mathematical Society* 16 (1941), pp. 95-98.

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil
oliveira@ime.usp.br