MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT5798 - IMEUSP - 2016

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Estas notas destinam-se aos alunos do curso Medida e Integração - MAT5798-IMEUSP - 2016 e baseiam-se 100% no livro de G. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, John Wiley & Sons, além de uns 20% distribuídos por outros excelentes livros, citados na bibliografia, e alguns poucos artigos. Apesar de se constituírem em quase uma tradução do núcleo de apenas cinco capítulos do livro base, excetuando as maravilhosas notas e exercícios propostos, não devem ser tidas como tal visto que não sou tradutor profissional e uma boa quantidade de material foi alterada e outra introduzida. Os erros de tradução e/ou matemática são de minha responsabilidade. Para finalizar, recomendo a compra e o estudo do merecidamente famoso livro de G. B. Folland.

Capítulo 0 - INTRODUÇÃO

Capítulo 1 - MEDIDAS

Capítulo 1

MEDIDAS

Capítulo 2

INTEGRAÇÃO

Capítulo 3

MEDIDAS COM SINAL E DIFERENCIAÇÃO

Capítulo 4

ESPAÇOS L^p

Capítulo 5

MEDIDAS DE RADON

Neste capítulo introduzimos a teoria da medida e da integração sobre espaços de Hausdorff localmente compactos (HLC). Já vimos que a medida de Lebesgue interage bastante apropriadamente com a topologia de $\mathbb{R}^n$: conjuntos mensuráveis podem ser aproximados por conjuntos abertos ou conjuntos compactos (primeiro princípio de Littlewood) e que funções mensuráveis podem ser aproximadas por funções contínuas (teorema de Lusin ou o segundo princípio de Littlewood). Torna-se então interessante estudar medidas com propriedades similares em espaços mais gerais. Ainda mais, certos funcionais lineares sobre espaços de funções contínuas são representados por uma integral. Este fato constitui uma importante ligação entre teoria da medida e análise funcional e fornece uma ferramenta para construir medidas.

Ao longo deste capítulo, X denota um espaço de Hausdorff localmente compacto (definido nas próximas duas páginas). Continuamos a empregar a terminologia desenvolvida no capítulo I no contexto de espaços métricos: $\mathcal{B}_X$ é a σ-álgebra de Borel em X (a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos, denominada σ-álgebra dos borelianos). Uma **medida de Borel** é qualquer medida definida sobre a σ-álgebra dos borelianos. Uniões (intersecções) enumeráveis de conjuntos fechados (abertos) são denominados conjuntos F_σ (G_δ) e assim por diante.

5.1 Funcionais Lineares Positivos sobre $C_c(X)$

Consideremos um conjunto não vazio X. Uma **topologia** sobre X é uma coleção $\tau \subset \wp(X)$ satisfazendo

- $\varnothing \in \tau$ e $X \in \tau$.
- τ é fechada para reuniões arbitrárias.
- τ é fechada para intersecções finitas.

O par (X, τ) é chamado de **espaço topológico**. Se é claro a qual topologia nos referimos, dizemos brevemente que X é um espaço topológico.

Os conjuntos pertencentes a τ são chamados de **abertos**.

Na geometria euclideana o plano é estudado através das noções básicas ponto, reta, círculo, ângulo e distância e alguns axiomas/postulados básicos. Em topologia (uma abstração da geometria euclideana), a noção básica é a de conjunto aberto e os axiomas são as condições estipuladas acima.

Todo espaço métrico é um espaço topológico, onde τ é a coleção dos subconjuntos de X que são dados por reuniões de bolas abertas $B(x;r)$, mais o $\varnothing$.

Doravante, nesta seção, a menos que alertado, X é um espaço topológico.

Várias definições e resultados para espaços métricos admitem versões análogas em espaços topológicos e solicitamos ao leitor consultar o Capítulo 0. Seguem algumas definições.

Um conjunto $F \subset X$ é dito **fechado** se seu complementar F^c é aberto. A família dos conjuntos fechados em uma topologia τ é fechada para intersecções arbitrárias e para reuniões finitas.

Consideremos $A \subset X$.

- O **interior** de A é a união dos abertos contidos em A. Notação $\text{int}(A)$.
- O **fecho** de A é a intersecção dos fechados que contém A. Notação $\overline{A}$.

Um espaço topológico X é dito de **Hausdorff** se para quaisquer dois pontos distintos $x \in X$ e $y \in X$ existem dois abertos U e V tais que

$$x \in U, \quad y \in V \quad \text{e} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Um conjunto $K \subset X$ é dito **compacto** se para toda cobertura $\{O_j\}_J$ por conjuntos abertos de K, existe uma subcobertura finita $O_{j_1}, \ldots, O_{j_n}$ de K.

Dado $x \in X$, uma **vizinhança** de x é um conjunto $V \subset X$ tal que $x \in \text{int}(V)$.

Dizemos que um espaço topológico X é **localmente compacto** se todo ponto tem uma **vizinhança compacta**.

Dado um espaço topológico X e uma função $f : X \to \mathbb{C}$, dizemos que f é **contínua** se $f^{-1}(B)$ é aberto em X para todo B aberto em $\mathbb{C}$.

Doravante, neste capítulo, a menos que alertado o contrário, X é um espaço de Hausdorff localmente compacto. Notação: X é um HLC.

Se X é localmente compacto e Hausdoff, dada $f : X \to \mathbb{C}$ o **suporte** de f é

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x : \ f(x) \neq 0\}}.$$

O suporte de f é o menor fechado fora do qual f é nula. Ainda, definimos

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : \ f \text{ é contínua}\} \quad \text{e}$$

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : \ \text{supp}(f) \text{ é compacto}\}.$$

É fácil ver que $C_c(X)$ é um espaço vetorial normado com norma

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Utilizaremos neste capítulo uma versão do Lema de Urysohn, para espaços HLC.

Introduzamos a seguinte notação:

$$C(X, [0,1]) = \{f : X \to [0,1] \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}.$$

Lema de Urysohn (para espaços localmente compactos). *Seja X um espaço de Hausdorff e localmente compacto. Suponhamos*

$$K \subset O \subset X, \text{ onde } K \text{ é compacto e } O \text{ é aberto.}$$

Então, existe $f \in C_c(X,[0,1])$ tal que

$$f = 1 \text{ em } K \quad \text{e} \quad supp(f) \subset O.$$

Prova. Vide Folland, p. 131.

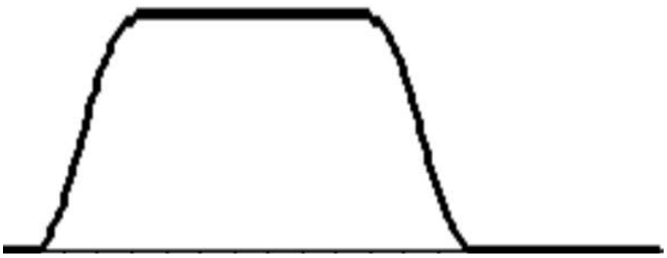


Figura 5.1: Uma função constante e igual a 1 em um intervalo compacto da reta.

Seja $E \subset X$. Uma **partição da unidade** sobre E é uma coleção

$$\{\phi_j\}_J \text{ de funções em } C\big(X,[0,1]\big) \text{ tal que}$$

- cada $x \in X$ tem uma vizinhança na qual, exceto uma quantidade finita, todas as demais funções $\phi_j's$ são identicamente zero.
- $\sum_{j\in J} \phi_j(x) = 1$ para todo $x \in E$.

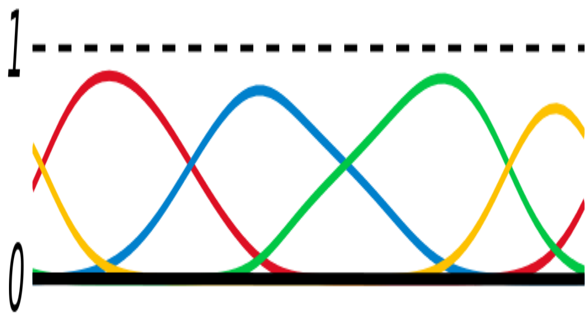


Figura 5.2: Partição da unidade em um intervalo, com quatro funções. Fixado um ponto, a soma dos valores das quatro funções é 1. Autor, Aleg Alexandrov.

Uma partição da unidade $\{\phi_j\}_J$ é dita **subordinada** a uma cobertura aberta $\mathcal{O}$ de E se para cada $j \in J$ existe um aberto $O \in \mathcal{O}$ tal que

$$\mathrm{supp}(\phi_j) \subset O.$$

Proposição (Partição da Unidade). *Seja X um espaço HLC. Consideremos um compacto $K \subset X$ e $K \subset O_1 \cup \cdots \cup O_n$ uma cobertura aberta. Então, existe uma partição da unidade sobre K e subordinada a tal cobertura constituída por funções de suporte compacto.*

Prova. Vide Folland p. 134.

Consideremos um funcional linear

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Dizemos que I é **positivo** se temos

$$I(f) \geq 0, \text{ para toda } f \geq 0.$$

Tal definição não faz menção a qualquer noção de continuidade, porém (é importante salientar) implica em uma propriedade de continuidade bastante forte.

Proposição 5.1 [Continuidade dos funcionais lineares positivos e definidos em $\mathbf{C_c(X)}$]. *Seja I um funcional linear positivo definido em $C_c(X)$. Então, para cada compacto $K \subset X$ existe uma constante C_K tal que*

$$|I(f)| \leq C_K \|f\|_u, \textit{ para toda } f \in C_c(X) \textit{ tal que } supp(f) \subset K.$$

Prova.

Podemos supor que f é a valores reais. Dado um compacto K, pelo Lema de Urysohn existe uma função $\phi \in C_c(X, [0,1])$ tal que $\phi = 1$ em K. Então, se $\mathrm{supp}(f) \subset K$ obtemos $|f(x)| \leq \|f\|_u \phi(x)$ para todo x. Isto é, temos

$$\|f\|_u \phi \pm f \geq 0$$

e, como I é linear positivo,

$$\|f\|_u I(\phi) \pm I(f) \geq 0.$$

Donde segue $|I(f)| \leq I(\phi)\|f\|_u$♣

Se μ é uma medida de Borel sobre X tal que $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset X$ então é claro que $C_c(X) \subset L^1(X)$ e neste caso a aplicação

$$f \mapsto \int_X f d\mu$$

define um funcional linear positivo atuando sobre $C_c(X)$.

O principal resultado desta seção é que *todo* funcional linear positivo definido em $C_c(X)$ tem esta forma. Ainda mais, impondo condições adicionais de regularidade em μ concluímos que μ é única. Vejamos tais condições.

Seja μ uma medida (positiva) de Borel sobre X e E um boreliano de X. Então,

μ é **regular exterior em** E se $\mu(E) = \inf\{\mu(O) : \ O \supset E$ e O aberto$\}$
μ é **regular interior em** E se $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \subset E$ e K compacto$\}$.

[Vide a definição de uma medida de Borel regular μ sobre $\mathbb{R}^n$, em Definição 3.1.]

Se μ é regular exterior e também regular interior em todos os conjuntos borelianos, dizemos que μ é uma **medida regular**. Se o espaço não é σ-compacto (isto é, se X não é uma reunião enumerável de compactos) é esperar demais que X seja regular e então introduzimos a seguinte definição.

Uma **medida de Radon** sobre X é uma medida (positiva) de Borel que é

- finita sobre todos os conjuntos compactos,
- regular exterior sobre todos os borelianos e
- regular interior sobre todos os abertos.

Na seção 5.2 veremos que toda medida (positiva) de Radon é também regular interior em todos os conjuntos σ-finitos.

Segue mais uma notação. Dada $f \in C_c(X)$ e O um aberto de X, escrevemos

$$\boxed{f \prec O \ \text{ se } \begin{cases} 0 \leq f \leq 1 \text{ e} \\ \operatorname{supp}(f) \subset O. \end{cases}}$$

Tal condição é mais forte que $0 \leq f \leq \chi_O$, a qual tão somente implica $\operatorname{supp}(f) \subset \overline{O}$.

Destaquemos que o símbolo "$\prec$" é em geral utilizado em relação de ordem, quando então ganha o significado de "precede". Neste texto podemos interpretar $f \prec O$ como "f suportada em O, mais alguma condições já acordadas sobre f".

Teorema 5.1 (Representação de Riesz). *Seja I um funcional linear positivo sobre $C_c(X)$. Então, existe uma única medida de Radon μ sobre X tal que*

$$I(f) = \int_X f d\mu, \text{ para toda } f \in C_c(X).$$

Ainda, μ satisfaz

(T 5.1.1) $\mu(O) = \sup\{I(f) : f \prec O\}$ *para todo aberto $O \subset X$,*

e

(T 5.1.2) $\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X) \text{ e } f \geq \chi_K\}$ *para todo compacto $K \subset X$.*

Prova.

- Unicidade. Seja μ uma medida de Radon tal que

  $$I(f) = \int f d\mu, \text{ para toda } f \in C_c(X).$$

  Fixemos um aberto O. Dado um compacto qualquer $K \subset O$, pelo lema de Urysohn existe $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec O$ e $f\big|_K = 1$ e por conseguinte

  $$\mu(K) \leq \int f d\mu = I(f) = \int f d\mu \leq \int \chi_O d\mu = \mu(O).$$

  Então, como μ é regular interior no aberto O, a identidade (T 5.1.1) segue. Isto mostra que $\mu(O)$ é determinada por I, para todo aberto O. Assim, gratos à definição de regularidade exterior sobre os borelianos concluímos que qualquer que seja o boreliano E, o valor $\mu(E)$ é determinado por I.

  Este argumento prova a unicidade e indica como provarmos a existência.

- Preparação para a prova da existência de μ. Começamos definindo

  $$\mu(O) = \sup\{I(f) : f \prec O\}, \text{ para cada aberto } O.$$

  Notemos que a notação $f \prec O$ automaticamente assume $f \in C_c(X; [0,1])$.

  Definimos também

  $$\mu^*(E) = \inf\{\mu(O) : O \supset E \text{ e } O \text{ é aberto}\}, \text{ onde } E \subset X.$$

  Temos $\mu^*(O) = \mu(O)$ se O é aberto. De fato, é evidente a desigualdade $\mu^*(O) \leq \mu(O)$. Por outro lado, seja Ω um aberto arbitrário tal que $\Omega \supset O$. Então, para toda $f \prec O$ é claro que temos $f \prec \Omega$. Donde segue $\mu(O) \leq \mu(\Omega)$. Pela arbitrariedade de Ω e a definição de ínfimo segue $\mu(O) \leq \mu^*(O)$.

A estratégia da prova da existência é a seguinte: mostraremos que

(i) μ^* é uma medida exterior.

(ii) Todo conjunto aberto é μ^*-mensurável.

Em tal estágio da demonstração concluímos, utilizando o teorema de Carathéodory, que todo boreliano é μ^*-mensurável e que $\mu = \mu^*\big|_{\mathcal{B}(X)}$ é uma medida de Borel [a notação é pertinente pois $\mu^*(O) = \mu(O)$ se O é aberto].

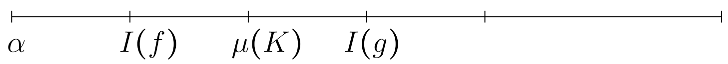
Por construção (vide a definição de μ^*) a medida μ é regular exterior sobre os borelianos. Ainda, por definição a medida μ satisfaz a fórmula (T 5.1.1), relativa a medida de abertos.

A seguir, mostramos a propriedade

(iii) a medida μ acata a fórmula (T 5.1.2), relativa a medida de compactos.

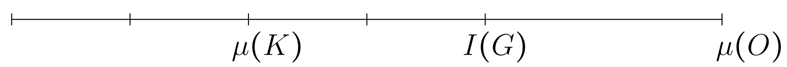
Tal propriedade (iii) implica que μ é finita sobre cada compacto K. De fato, o lema de Urysohn garante existir $\phi \in C_c(X, [0,1])$ tal que $\phi|_K = 1$, donde então segue $\phi \geq \chi_K$ e $\mu(K) \leq I(\phi) < \infty$.

Vejamos que a propriedade (iii) também implica que a medida μ é regular interior em cada aberto O. Consideremos α tal que $\alpha < \mu(O)$.



A definição de μ e de sup garantem uma $f \prec O$ tal que $I(f) > \alpha$. O compacto $K = \text{supp}(f)$ está dentro de O e $\chi_K \geq f$. Para toda $g \in C_c(X)$ satisfazendo $g \geq \chi_K$ temos $g - f \geq 0$ e então $I(g) \geq I(f) > \alpha$. A fórmula (T 5.1.2) para a medida de compactos (e a definição de ínfimo) mostra $I(g) \geq \mu(K) \geq I(f)$.

Pelo lema de Urysohn existe $G \prec O$ tal que $G|_K = 1$. Segue $G \geq \chi_K$. A definição de μ e de sup, e o já visto acima, mostram $\mu(O) \geq I(G) \geq \mu(K)$.



Donde segue $\alpha < \mu(K) \leq \mu(O)$ e portanto μ é regular interior em O.

Como quarta e última propriedade, provaremos

(iv) $I(f) = \displaystyle\int f d\mu$, para toda $f \in C_c(X)$.

Provando tais propriedades a prova do teorema estará completa.

◇ Existência.

- Prova de (i): a função μ^* é medida exterior.

  É suficiente checarmos que se (O_j) é uma sequência de conjuntos abertos e $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$, então vale a desigualdade

$$\mu(O) \leq \sum \mu(O_j).$$

  Pois desta segue, para todo $E \subset X$, a desigualdade

$$\inf\left\{\sum \mu(O_j) : O_j \text{ é aberto e } E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} O_j\right\} \geq \inf\left\{\mu(O) : O \text{ é aberto e } E \subset O\right\}$$

  cuja desigualdade reversa é evidente. Donde obtemos

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum \mu(O_j) : \ O_j \text{ é aberto e } E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} O_j\right\},$$

  sendo que tal fórmula define uma medida exterior (Proposição 1.6).

  Façamos a checagem. Sejam $O = \bigcup O_j$ uma união contável de abertos, uma função f tal que $f \prec O$ e o compacto $K = \text{supp}(f)$. É claro que $K \subset O_1 \cup \cdots \cup O_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, existe uma partição da unidade em K e subordinada a tal cobertura tal que

$$g_1, \ldots, g_n \in C_c(X), \text{ com } g_j \prec O_j \ \text{ e } \ g_1 + \cdots + g_n = 1 \text{ em } K.$$

  Donde segue

$$f = fg_1 + \cdots + fg_n, \text{ com cada } fg_j \prec O_j,$$

  e portanto, pela linearidade de I e pela definição de μ (em abertos),

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} I(fg_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(O_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(O_j).$$

  Visto que isto é válido para toda $f \prec O$, pela definição de μ (o sup é o menor majorante) concluímos que

$$\mu(O) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(O_j),$$

  como desejado.

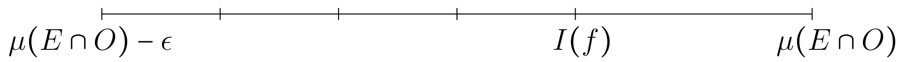
- Prova de (ii): todo aberto é $\mu*$-mensurável (e μ é regular exterior).

Basta ver que se O é aberto, para todo $E \subset X$ com $\mu^*(E) < \infty$ tem-se

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap O) + \mu^*(E \cap O^c).$$

Caso E aberto. Então $E \cap O$ é aberto e $\mu(E \cap O) = \mu^*(E \cap O) < \infty$. Pela definição de μ, dado $\epsilon > 0$ existe uma função f tal que

$$f \prec E \cap O \quad \text{com} \quad I(f) > \mu(E \cap O) - \epsilon.$$



O conjunto $E \smallsetminus \mathrm{supp}(f)$ também é aberto e portanto existe g tal que

$$g \prec E \smallsetminus \mathrm{supp}(f) \quad \text{com} \quad I(g) > \mu[E \smallsetminus \mathrm{supp}(f)] - \epsilon.$$

Segue (cheque)

$$0 \leq f + g \leq 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{supp}(f+g) \subset \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g) \subset E.$$

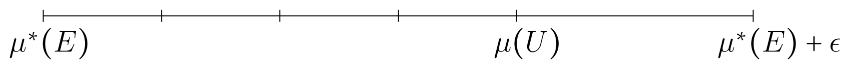
Isto é, $f + g \prec E$.

Empregando (em ordem) a definição de μ^*, a definição de μ [e de sup], a linearidade de I, as hipóteses sobre f e g, a definição de μ^* e por fim a inclusão $\mathrm{supp}(f) \subset E \cap O$ encontramos

$$\begin{aligned}\mu^*(E) = \mu(E) &\geq I(f+g)\\ &= I(f) + I(g)\\ &> \mu(E \cap O) + \mu[E \smallsetminus \mathrm{supp}(f)] - 2\epsilon\\ &= \mu^*(E \cap O) + \mu^*[E \smallsetminus \mathrm{supp}(f)] - 2\epsilon\\ &\geq \mu^*(E \cap O) + \mu^*(E \smallsetminus O) - 2\epsilon.\end{aligned}$$

Impondo $\epsilon \to 0$, obtemos a desigualdade pretendida.

O caso geral. Dado $\epsilon > 0$ e um $E \subset X$ arbitrário tal que $\mu^*(E) < \infty$, pela definição de μ^* [e de inf] existe um aberto $U \supset E$ com $\mu(U) < \mu^*(E) + \epsilon$.



Aplicando o primeiro caso ao aberto U segue

$$\begin{aligned}\mu^*(E) + \epsilon &> \mu(U) = \mu^*(U)\\ &\geq \mu^*(U \cap O) + \mu^*(U \cap O^c)\\ &\geq \mu^*(E \cap O) + \mu^*(E \cap O^c).\end{aligned}$$

Impondo $\epsilon \to 0$, obtemos a desigualdade pretendida.

- Prova de (iii): a medida μ satisfaz a fórmula (T 5.1.2) para medida de compactos [e é finita em compactos e regular interior em abertos].

  Seja K um compacto. Consideremos uma arbitrária f tal que

$$f \in C_c(X;[0,1]) \ \text{ e } \ f \geq \chi_{K}.$$

  Dado $\epsilon > 0$, fixemos o aberto $O_\epsilon = \{x : f(x) > 1-\epsilon\}$ contendo K. Dada

$$g \prec O_\epsilon,$$

  temos $f - (1-\epsilon)g \geq 0$ e portanto, já que I é positivo e linear,

$$I(g) \leq \frac{I(f)}{1-\epsilon}.$$

  Então, pela arbitrariedade de $g \prec O_\epsilon$ e a definição de $\mu(O_\epsilon)$ temos [o sup é o menor majorante]

$$\mu(O_\epsilon) \leq \frac{I(f)}{1-\epsilon}.$$

  Assim, devido à inclusão $K \subset O_\epsilon$ encontramos

$$\mu(K) \leq \frac{I(f)}{1-\epsilon}.$$

  Impondo $\epsilon \to 0$ obtemos a desigualdade

$$\mu(K) \leq I(f).$$

  Por outro lado, dado um aberto arbitrário $O \supset K$, pelo lema de Urysohn existe h tal que

$$h \geq \chi_{K} \ \text{ e } \ h \prec O$$

  A última desigualdade acima e a definição de $\mu(O)$ [e de sup] mostram

$$\mu(K) \leq I(h) \leq \mu(O).$$

  Por fim, em (ii) vimos que μ é regular exterior e sendo assim a fórmula (T 5.1.2) - para medida de compactos - segue imediatamente destas duas últimas desigualdades. De fato, temos

$$\begin{aligned}\mu(K) &\leq \inf\{I(f) : f \in C_c(X;[0,1]) \text{ e } f \geq \chi_K\} \\ &\leq \inf\{\mu(O) : \ O \text{ é aberto e } O \supset K\} = \mu(K).\end{aligned}$$

- Prova de (iv): vale a fórmula

$$I(f) = \int f d\mu, \text{ para toda } f \in C_c(X).$$

Decompondo f em $(\mathrm{Re}f)^{\pm}$ e $(\mathrm{Im}f)^{\pm}$, todas em $C_c(X;[0,\|f\|_u])$, vemos que f é uma combinação linear com coeficientes complexos de funções em $C_c(X;[0,1])$. Logo, podemos supor sem perda de generalidade que

$$f \in C_c(X,[0,1]).$$

Fixemos um arbitrário $N \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$K_0 = \mathrm{supp}(f) \quad \text{e} \quad K_j = \left\{x : f(x) \geq \frac{j}{N}\right\} \text{ para } j = 1, \dots, N.$$

Temos

$$K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_{j-1} \supset K_j \supset \cdots \supset K_N.$$

A seguir, definamos as funções $f_1, \dots, f_N$ em $C_c(X,[0,1])$ por

$$f_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin K_{j-1}, \\ f(x) - \frac{j-1}{N}, & \text{se } x \in K_{j-1} \smallsetminus K_j, \\ \frac{1}{N}, & \text{se } x \in K_j. \end{cases}$$

Em outras palavras, temos

$$f_j = \min\left\{\max\left\{f - \frac{j-1}{N}, 0\right\}, \frac{1}{N}\right\}$$

$$\boxed{\text{pois } \begin{cases} \text{se } x \notin K_{j-1}, & \text{então } f(x) < \frac{j-1}{N} \\ \text{se } x \in K_{j-1} \smallsetminus K_j, & \text{então } \frac{j-1}{N} \leq f(x) < \frac{j}{N} \\ \text{se } x \in K_j, & \text{então } \frac{j-1}{N} < \frac{j}{N} \leq f(x). \end{cases}}$$

Deduzimos então as desigualdades [cheque]

$$\frac{\chi_{K_j}}{N} \leq f_j \leq \frac{\chi_{K_{j-1}}}{N},$$

que integrando acarretam

$$\frac{1}{N}\mu(K_j) \leq \int f_j d\mu \leq \frac{1}{N}\mu(K_{j-1}).$$

A seguir, relacionemos as medidas dos compactos K_j e K_{j-1} com $I(f_j)$. É claro que a função Nf_j pertence a $C_c(X,[0,1])$ e que

$$\chi_{K_j} \leq Nf_j \leq \chi_{K_{j-1}}.$$

Quanto ao compacto K_j, pela fórmula (T 5.1.2) - para medida de compactos - temos

$$\mu(K_j) \leq I(Nf_j).$$

Quanto ao compacto K_{j-1}, dado um aberto qualquer O contendo K_{j-1} temos

$$Nf_j \prec O \quad \text{e (por definição de } \mu \text{ e sup)} \quad I(Nf_j) \leq \mu(O).$$

Logo, como μ é medida regular exterior em K_{j-1}, por propriedade de ínfimo (maior minorante) deduzimos

$$I(Nf_j) \leq \mu(K_{j-1}).$$

Resumindo, obtemos

$$\frac{1}{N}\mu(K_j) \leq I(f_j) \leq \frac{1}{N}\mu(K_{j-1}).$$

Vale a identidade

$$f = f_1 + \cdots + f_N \quad \textsf{(cheque)}.$$

Por um lado integrando tal identidade e por outro lado computando I em tal identidade, encontramos as desigualdades

$$\frac{\mu(K_1)+\cdots+\mu(K_N)}{N} \leq \int f d\mu \leq \frac{\mu(K_0)+\cdots+\mu(K_{N-1})}{N} \quad \text{e}$$

$$\frac{\mu(K_1)+\cdots+\mu(K_N)}{N} \leq I(f) \leq \frac{\mu(K_0)+\cdots+\mu(K_{N-1})}{N}.$$

Donde segue

$$\left| I(f) - \int f d\mu \right| \leq \frac{\mu(K_0)-\mu(K_N)}{N} \leq \frac{\mu[\text{supp}(f)]}{N}.$$

Como $\mu[\text{supp}(f)] < \infty$ e N é arbitrário, concluímos que

$$I(f) = \int f d\mu \, \clubsuit$$

5.2 Regularidade e Teoremas de Aproximação

Teorema 5.2 (Teorema da Extensão de Tietze em Espaços Localmente Compactos). *Suponhamos que X é um espaço HLC e que K é um subconjunto compacto de X. Seja $f \in C(K)$. Então, existe $F \in C_c(X)$ tal que*

$$F\Big|_K = f \quad (\textit{e podemos supor } \ \|F\|_u = \|f\|_u).$$

Prova.

A prova da existência de F contínua e de suporte compacto segue de resultados em Folland, Capítulo 4 [vide Teorema 4.16 (Teorema da Extensão de Tietze), Proposição 4.31, Teorema 4.32 (Lema de Urysohn em espaços HLC) e Teorema 4.34 (Extensão de Tietze em espaços localmente compactos)].

Mostremos a afirmação extra. Consideremos o raio $M = \|f\|_u$. Sabemos que a função $|f|$ assume o valor M.

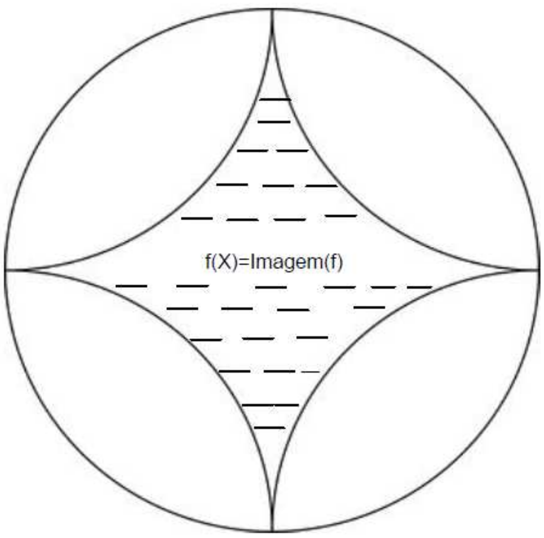


Figura 5.3: O conjunto imagem $f(X)$ "toca" a circunferência $\{z : |z| = \|f\|_u\}$.

Definamos $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$T(z) = z, \text{ se } |z| \leq M, \quad \text{e} \quad T(z) = M\frac{z}{|z|}, \text{ se } |z| > M.$$

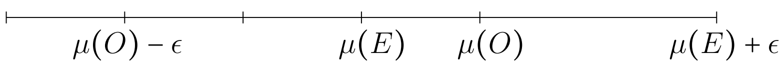
Claramente T é contínua. Ainda, $T \circ F \in C_c(X)$ estende f e $\|T \circ F\|_u = M$♣

Proposição 5.2 (Regularidade interior das medidas de Radon em σ-finitos). *Toda medida de Radon é regular interior em conjuntos σ-finitos.*

Prova.

Sejam μ uma medida de Radon e E um boreliano σ-finito.

◇ O caso $\mu(E) < \infty$. Dado $\epsilon > 0$, como μ é regular exterior em borelianos, existe um aberto $O \supset E$ tal que $\mu(O) < \mu(E) + \epsilon$.



Então, pela regularidade interior de μ em abertos, existe um compacto

$$F \subset O \text{ tal que } \mu(O) - \epsilon < \mu(F).$$

Por regularidade exterior, existe um aberto

$$U \supset (O \smallsetminus E) \text{ tal que } \mu(U) < \epsilon.$$

Assim, $K = F \smallsetminus U$ é compacto, com $K \subset O \smallsetminus (O \smallsetminus E) = E$. Segue então

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(F \smallsetminus U) \\ &= \mu(F) - \mu(F \cap U) \\ &> \mu(E) - \epsilon - \mu(U) \\ &> \mu(E) - 2\epsilon. \end{aligned}$$

Logo, μ é regular interior em E.

◇ O caso $\mu(E) = \infty$. Seja $(E_j)_{\mathbb{N}}$ uma sequência satisfazendo

$$E_j \nearrow E, \text{ com } \mu(E_j) < \infty.$$

Pelo caso acima existem compactos $K_j \subset E_j$ satisfazendo

$$\lim \mu(K_j) \geq \lim \left[\mu(E_j) - \frac{1}{j}\right] = \infty ♣$$

Corolário 5.1 (Regularidade das medidas de Radon σ-finitas). *Toda medida de Radon σ-finita é regular. Se X é σ-compacto, então toda toda medida de Radon sobre X é regular.*

Prova.

Imediata, pois por definição uma medida é regular se é regular exterior e também regular interior em todos os borelianos ♣

Para um exemplo de uma medida de Radon não regular, vide Exercício 12, Folland, p. 220, 7.2.

Proposição 5.3 (Propriedades de regularidade das medidas de Radon σ-finitas). *Suponha que μ é uma medida de Radon σ-finita sobre X e que E é um subconjunto boreliano de X.*

(a) Para todo $\epsilon > 0$, existem um aberto O e um fechado F tais que

$$F \subset E \subset O \quad e \quad \mu(O \setminus F) < \epsilon$$

(b) Existem $F \in F_\sigma$ e $G \in G_\delta$ tais que

$$F \subset E \subset G \quad e \quad \mu(G \setminus F) = 0.$$

Prova.

(a) Temos $E = \dot\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, com cada $\mu(E_j) < \infty$. Dado j, existe um aberto O_j com

$$O_j \supset E \;\text{ e }\; \mu(O_j) < \mu(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Seja $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$. Então,

$$O \text{ é aberto, } O \supset E \;\text{ e }\; \mu(O \setminus E) \leq \sum \mu(O_j \setminus E) < \epsilon.$$

Similarmente, existe um aberto $U \supset E^c$ tal que $\mu(U \setminus E^c) < \epsilon$. Então $F = U^c$ é fechado, $F \subset E$ e

$$\mu(O \setminus F) \leq \mu(O \setminus E) + \mu(E \setminus F) = \mu(O \setminus E) + \mu(U \setminus E^c) < 2\epsilon.$$

(b) Segue facilmente de (b) [por favor, cheque]♣

Teorema 5.3 (Condições suficientes para uma medida ser de Radon). *Seja X um espaço HLC no qual todo conjunto aberto é σ-compacto [em particular, se X tem uma base enumerável de abertos]. Então toda medida boreliana sobre X, finita em compactos, é regular e também de Radon.*

Prova.

Se μ é uma medida de Borel sobre X que é finita em compactos, temos

$$C_c(X) \subset L^1(X).$$

Logo, a aplicação

$$I(f) = \int f d\mu$$

é um funcional linear positivo em $C_c(X)$. Seja ν a medida de Radon associada a I, conforme o teorema da representação de Riesz. Logo,

$$I(f) = \int f d\nu, \text{ para toda } f \in C_c(X).$$

Dado um aberto $O \subset X$, seja $K_j \nearrow O$, onde cada K_j é compacto. Escolhamos $f_1 \prec O$ com $f_1 = 1$ em K_1. Iterando, escolhamos para cada $n > 1$,

$$f_n \prec O \text{ com } f_n = 1 \text{ em } K_n \cup \text{supp}(f_{n-1}).$$

Então $f_n \nearrow \chi_O$ pontualmente e, pelo teorema da convergência monótona,

$$\mu(O) = \lim \int f_n d\mu = \lim \int f_n d\nu = \nu(O).$$

Dado E boreliano e $\epsilon > 0$, pela Proposição 5.3(a) [propriedades de regularidade para medidas de Radon σ-finitas] existe um aberto $U \supset E$ e um fechado $F \subset E$ tais que $\nu(U \setminus F) < \epsilon$. Porém, $U \setminus F$ é aberto e portanto

$$\mu(U \setminus F) = \nu(U \setminus F) < \epsilon.$$

Em particular, $\mu(U) = \mu(E) + \mu(U \setminus E) \leq \mu(E) + \epsilon$. Por conseguinte, μ é regular exterior. Ainda mais, temos $\mu(E) = \mu(F) + \mu(E \setminus F)$ e por conseguinte $\mu(F) \geq \mu(E) - \epsilon$ e então, como F é σ-compacto [pois X é σ-compacto] segue que existe uma sequência de compactos $F_j \nearrow F$ tal que $\mu(F_j) \nearrow \mu(F)$, o que mostra que μ é regular interior em E (um boreliano arbitrário). Portanto, μ é regular e de Radon [temos $\mu = \nu$, pela unicidade da medida de Radon no teorema da representação de Riesz]♣

Exemplos de medidas que não são medidas de Radon são dadas nos Exercícios 13–15, Folland, pp. 220–221, 7.2.

O citado Exercício 15 exibe um exemplo, em um espaço de Hausdorff compacto, de uma medida de Borel finita que não é de Radon.

Estudemos agora teoremas de aproximação para funções mensuráveis.

Proposição 5.4 [Densidade do espaço $\mathbf{C_c(X)}$ em $\mathbf{L^p(X,\mu)}$]. *Seja μ uma medida de Radon sobre X. Então,*

$$C_c(X) \text{ é denso em } L^p(X) \text{ para todo } p \in [1,\infty).$$

Prova.

O espaço das funções simples e integráveis é denso em L^p [vide Proposição 4.1(a) - densidade das funções simples em L^p]. Logo, é suficiente mostrar que toda função característica

$$\chi_E, \text{ com } E \text{ boreliano e } \mu(E) < \infty,$$

é aproximável na norma $\|\cdot\|_p$ por funções contínuas de suporte compacto.

Dado $\epsilon > 0$, a regularidade interior das medidas de Radon em conjuntos σ-finitos (Proposição 5.2) e a regularidade exterior das medidas de Radon garantem a existência de um compacto K e um aberto O satisfazendo

$$K \subset E \subset O \text{ e } \mu(O \setminus K) < \epsilon.$$

Pelo Lema de Urysohn existe $f \in C_c(X)$ tal que

$$\chi_K \leq f \leq \chi_O.$$

Logo,

$$\|\chi_E - f\|_p^p \leq \mu(O \setminus K) < \epsilon \clubsuit$$

Teorema 5.4 (Lusin - Segundo Princípio de Littlewood para medidas de Radon). *Sejam μ uma medida de Radon sobre X e uma função mensurável $f : X \to \mathbb{C}$ tal que $\{x : f(x) \neq 0\}$ tem medida finita. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $\phi \in C_c(X)$ tal que*

$$\{x : \phi(x) \neq f(x)\} \text{ tem medida menor que } \epsilon.$$

Adicionalmente , se f é limitada podemos escolher ϕ tal que

$$\|\phi\|_u \leq \|f\|_u.$$

Prova.

Preparação 1. O conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ é subconjunto de um aberto de medida finita. Assim sendo, podemos supor que X tem medida finita.

Preparação 2. Notando que

$$E_n = \{x : |f(x| \geq n\} \searrow \emptyset$$

e que E_1 tem medida finita, temos que existe N tal que $\mu(E_N) < \epsilon$. Isto é, temos $|f(x)| < N$ exceto um conjunto de medida menor que ϵ. Sendo assim, podemos supor que f é limitada.

Preparação 3. Como $\{x : f(x) \neq 0\}$ tem medida finita, pela Proposição 5.2 podemos aproximá-lo interiormente (em medida) por compactos, e podemos supor

$$K = \{x : f(x) \neq 0\} \text{ é compacto.}$$

A seguir, "reprisamos" a demonstração do teorema de Lusin clássico (2.12).

◇ *Existe um conjunto fechado $F \subset X$ tal que $f\big|_F$ é contínua e*

$$\mu(X \setminus F) < \epsilon.$$

Verificação. Seja $\{A_n\}_{\mathbb{N}}$ uma base de abertos de $\mathbb{R}^2$ e, B_n aberto em X e contendo $f^{-1}(A_n)$. Mostremos que $f|_{\mathcal{X}}$ é contínua, onde

$$\mathcal{X} = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}[B_n \setminus f^{-1}(A_n)].$$

Seja $x \in \mathcal{X}$ e qualquer A_N contendo $f(x)$. Logo, $x \in f^{-1}(A_N) \subset B_N$. O conjunto $B_N \cap \mathcal{X}$ é aberto em $\mathcal{X}$, e contém x. Se $y \in B_N \cap \mathcal{X}$, deduzimos que $y \in f^{-1}(A_N)$. Assim, $f(y) \in A_N$. Isto mostra que $f|_{\mathcal{X}}$ é contínua.

Como μ é regular exterior, podemos supor

$$\mu\big[B_n \smallsetminus f^{-1}(A_n)\big] < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Então,

$$\mu(X \smallsetminus \mathcal{X}) \leq \sum \mu\big[B_n \smallsetminus f^{-1}(A_n)\big] < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelas propriedades de regularidade das medidas de Radon σ-finitas [Proposição 5.3(a)], segue que existe um fechado $F \subset \mathcal{X}$ tal que

$$\mu(\mathcal{X} \smallsetminus F) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por fim, a restrição $f|_F$ é contínua e

$$\mu(X \smallsetminus F) \leq \mu(X \smallsetminus \mathcal{X}) + \mu(\mathcal{X} \smallsetminus F) < \epsilon.$$

A verificação está completa.

Agora notemos que $\mu[K \smallsetminus (F \cap K)] \leq \mu(X \smallsetminus F) < \epsilon$, que $F \cap K$ é compacto e

$$f\Big|_{F\cap K} \quad \text{é contínua.}$$

Seja O um aberto contendo K tal que $\mu(O \smallsetminus K) < \epsilon$. Pelo teorema da extensão de Tietze para espaços HLC (Teorema 5.2), existe $\phi \in C_c(O)$ tal que

$$\phi \quad \text{estende} \quad f\Big|_{F\cap K} \quad \text{e}$$

$$\|\phi\|_u = \Big\| f|_{F\cap K} \Big\|_u \leq \|f\|_u.$$

Para encerrar, temos

$$\{x : \phi(x) \neq f(x)\} \subset O \smallsetminus (F \cap K) \subset (O \smallsetminus K) \cup [K \smallsetminus (F \cap K)]$$

e portanto

$$\mu\big(\{x : \phi(x) \neq f(x)\}\big) \leq 2\epsilon \clubsuit$$

5.3 O Dual de $C_0(X)$

Dizemos que uma função $f \in C(X)$ se **anula no infinito** se, para todo $\epsilon > 0$,

$$\{x : |f(x)| \geq \epsilon\} \text{ é compacto.}$$

Definimos

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : \ f \text{ se anula no infinito}\}.$$

É trivial ver que $C_c(X) \subset C_0(X)$. É trivial ver que toda $f \in C_0(X)$ é limitada.

Proposição 5.5 (Fundamental). *Se X é um espaço HLC, então $C_0(X)$ é o fecho de $C_c(X)$ na métrica uniforme.*

Prova. Exercício [mostre que se f se anula no infinito então f é aproximável na norma uniforme por funções em $C_c(X)$ - talvez seja útil o Lema de Urysohn].

Devido à proposição acima, se μ é uma medida de Radon então o funcional

$$I(f) = \int f d\mu, \text{ onde } f \in C_c(X),$$

se estende continuamente a $C_0(X)$ se e somente se I é limitado com respeito à norma uniforme (isto é, se I é contínuo). Em vista da identidade

$$\mu(X) = \sup\left\{\int f d\mu : f \in C_c(X), \text{ onde } 0 \leq f \leq 1\right\}$$

[um caso particular da fórmula T 5.1.1] e da desigualdade triangular integral

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu,$$

temos (cheque)

$$\mu(X) \leq \sup\left\{\left|\int f d\mu\right| : \|f\|_u = 1\right\} \leq \mu(X) \quad \text{e} \quad \|I\| = \mu(X).$$

Assim, I é contínuo se e somente se X tem medida finita. Desta forma, identificamos os funcionais lineares **contínuos e positivos** sobre $C_0(X)$ com as medidas finitas de Radon sobre X.

Nosso objetivo nesta seção é estender este resultado e obter uma descrição completa de $C_0(X)^*$, o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $C_0(X)$ também dito *dual topológico de* $C_0(X)$.

Destaquemos que

$$\boxed{C_c(X) \subset C_0(X) \ \text{ e então } \ C_0(X)^* \subset C_c(X)^*.}$$

Já vimos que os funcionais lineares positivos (condição algébrica) sobre $C_c(X)$ correspondem bijetivamente a medidas positivas de Radon sobre X. Vide Teorema da represetação de Riesz 5.1

Veremos nesta seção que funcionais lineares contínuos (condição topológica) sobre $C_0(X)$ correspondem isometricamente a medidas complexas (finitas) de Radon sobre X (a serem definidas).

O fato fundamental (a seguir) é que os funcionais lineares contínuos sobre $C_0(X,\mathbb{R})$ tem uma "decomposição de Jordan", em analogia com a decomposição de uma medida com sinal. A analogia justifica-se devido as correspondências exploradas entre *duais de espaços de funções* e *medidas*.

Lema 5.1 *Consideremos um funcional linear $I \in C_0(X,\mathbb{R})^*$. Então, existem funcionais lineares positivos $I^\pm \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ tais que*

$$I = I^+ - I^-.$$

Prova. A parte central da prova é a definição de I^+.

◇ A definição de I^+.

Consideremos o espaço cônico $C_0(X,[0,\infty))$, fechado para a multiplicação por escalares positivos e fechado para a adição. Vide figura abaixo.

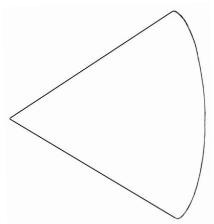


Figura 5.4: O "cone" $C_0(X,[0,\infty))$.

Dada $f \in C_0\big(X,[0,\infty)\big)$, definimos

$$\boxed{I^+(f) = \sup\big\{I(g) : g \in C_0(X,\mathbb{R}) \text{ e } 0 \le g \le f\big\}.}$$

É óbvio que $I^+(f) \ge 0$ [basta escolher $g = 0$]. Ainda, da desigualdade $|I(g)| \le \|I\|\,\|g\|_u \le \|I\|\|f\|_u$, para toda $g \in C_0(X,\mathbb{R})$ tal que $0 \le g \le f$, segue

$$0 \le I^+(f) \le \|I\|\,\|f\|_u.$$

Vejamos que I^+ é a restrição ao cone $C_0(X,[0,\infty))$ de um funcional linear. A prova é análoga à prova da linearidade da integral no Capítulo 2.

É claro que $I^+(cf) = cI^+(f)$, para quaisquer $f \in C_0(X,[0,\infty))$ e $c \geq 0$

Consideremos f_1 e f_2, duas funções no cone $C_0(X,[0,\infty))$. Sejam g_1 e g_2 arbitrárias em $C_0(X,\mathbb{R})$ e satisfazendo $0 \leq g_1 \leq f_1$ e $0 \leq g_2 \leq f_2$. Então, obtemos $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$ e portanto $I^+(f_1 + f_2) \geq I(g_1) + I(g_2)$. Donde

$$I^+(f_1 + f_2) \geq I^+(f_1) + I^+(f_2).$$

Por outro lado, supondo $0 \leq h \leq f_1 + f_2$, onde $h \in C_0(X,\mathbb{R})$, e definindo $h_1 = \min(h, f_1)$ e $h_2 = h - h_1$ obtemos as inequações $0 \leq h_1 \leq f_1$ e $0 \leq h_2 \leq f_2$. Assim, temos $h = h_1 + h_2$ e $I(h) = I(h_1) + I(h_2) \leq I^+(f_1) + I^+(f_2)$. Donde, pela arbitrariedade de h,

$$I^+(f_1 + f_2) \leq I^+(f_1) + I^+(f_2).$$

Em resumo, temos $I^+(f_1+f_2) = I^+(f_1)+I^+(f_2)$ para f_1, f_2 em $C_0\big(X,[0,\infty)\big)$.

A seguir, tratemos do caso $f \in C_0(X,\mathbb{R})$. Então, as partes positiva e negativa f^+, f^- pertencem a $C_0\big(X,[0,\infty)\big)$. Definimos então

$$\boxed{I^+(f) = I^+(f^+) - I^+(f^-), \text{ para toda } f \in C_0(X,\mathbb{R}).}$$

◇ A linearidade de I^+.

Sejam $f, g \in C_0(X,\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. É trivial ver que $I(cf) = cI(f)$. Em seguida, decompondo as funções f, g e $f+g$ obtemos

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

Computando I^+ em cada uma das funções e reagrupando encontramos $I^+[(f+g)^+] - I^+[(f+g)^-] = I^+(f^+) - I^+(f^-) + I^+(g^+) - I^+(g^-)$. Isto é,

$$I^+(f+g) = I^+(f) + I^+(g).$$

◇ A continuidade de I^+.

Segue de

$$|I^+(f)| \leq \max\big\{I^+(f^+), I^+(f^-)\big\} \leq \|I\| \max\big\{\|f^+\|_u, \|f^-\|_u\big\} = \|I\|\|f\|_u.$$

Em particular, $\|I^+\| \leq \|I\|$.

◇ A definição de I^-. Definamos $I^- = I^+ - I$.

É claro que $I^- \in C_0(X,\mathbb{R})^*$. Dada $f \in C_0(X,[0,\infty))$, pela definição de I^+ no cone temos $I(f) \leq I^+(f)$ e $I^+(f) \geq 0$. Logo, I^- e I^+ são positivos ♣

Qualquer funcional $I \in C_0(X)^*$ é unicamente determinado por sua restrição J ao subespaço $C_0(X,\mathbb{R})$ [isto é, $J : C_0(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$] e temos

$$J = J_1 + iJ_2,$$

com J_1 e J_2 funcionais lineares reais contínuos definidos em funções a valores reais.

Assim, pelo Lema 5.1 acima e pelos comentários precedentes concluímos que para cada $I \in C_0(X)^*$ existem quatro medidas de Radon μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 tais que

$$I(f) = \int f d\mu, \quad \text{onde } \mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4).$$

Para o que segue, necessitamos de mais algumas definições.

- Uma **medida de Radon com sinal** é uma medida de Borel com sinal cujas variações positiva e negativa são medidas de Radon.
- Uma **medida complexa de Radon** é uma medida de Borel complexa cujas partes real e imaginária são medidas de Radon com sinal.

Enfatizemos que toda medida complexa é limitada.

Em um espaço HLC com base enumerável de abertos, toda medida de Borel complexa é de Radon. Isto segue trivialmente do Teorema 5.3 [condições suficientes para uma medida ser de Radon] pois toda medida complexa é limitada.

Denotamos o **espaço das medidas complexas μ de Radon sobre** X por

$$M(X).$$

Atenção. Não é óbvio que $M(X)$ é um espaço linear e veremos que este é o caso.

Com $|\mu|$ a variação total de μ, definimos a “norma”

$$\|\mu\| = |\mu|(X),$$

a qual é finita, pois μ é limitada. Veremos ique $\|\mu\|$ é efetivamente uma norma.

Consideremos a decomposição padrão $\mu = \mu_r + i\mu_i = (\mu_r^+ - \mu_r^-) + i(\mu_i^+ - \mu_i^-)$. Pela Proposição 3.5 (a,d) [propriedades da norma no espaço das medidas complexas] seguem as desigualdades

$$\boxed{\max(\mu_r^+, \mu_r^-, \mu_i^+, \mu_i^-) \le \max(|\mu_r|, |\mu_i|) \le |\mu| \le |\mu_r| + |\mu_i| = \mu_r^+ + \mu_r^- + \mu_i^+ + \mu_i^-.}$$

Proposição 5.6 *Seja μ uma medida de Borel complexa. Então, μ é de Radon se e somente se $|\mu|$ é de Radon. Ainda, $M(X)$ é um espaço vetorial complexo e*

$$\mu \mapsto \|\mu\| \quad \textit{é uma norma sobre } M(X).$$

Prova.

Observação. Uma medida positiva finita e de Borel ν é uma medida de Radon se e só se para quaisquer boreliano E e $\epsilon > 0$, existem um compacto K e um aberto O com $K \subset E \subset O$ e $\nu(O \smallsetminus K) < \epsilon$. De fato, a "volta" é trivial e a "ida" decorre das Proposições 5.2 e 5.3(a), ambas sobre regularidade e medidas de Radon.

◇ μ é de Radon se e somente se $|\mu|$ é de Radon.

A afirmação segue trivialmente da Observação e das desigualdades (vide comentários logo acima)

$$\max(\mu_r^+, \mu_r^-, \mu_i^+, \mu_i^-) \leq |\mu| \leq \mu_r^+ + \mu_r^- + \mu_i^+ + \mu_i^-.$$

◇ $M(X)$ é um espaço vetorial complexo e normado.

Claramente as medidas complexas formam um espaço vetorial complexo. Se μ é medida complexa e $\lambda \in \mathbb{C}$ é fácil ver que $|\lambda\mu| = |\lambda|\,|\mu|$ (cheque). Donde, se μ é de Radon, pela Observação e o caso acima segue que $\lambda\mu$ também.

Dadas duas medidas complexas arbitrárias μ_1 e μ_2, pela Proposição 3.5(a) temos a desigualdade

$$|\mu_1 + \mu_2| \leq |\mu_1| + |\mu_2|.$$

Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Radon. O caso anterior, esta última desigualdade e a Observação garantem que as medidas $|\mu_1|$, $|\mu_2|$, $|\mu_1|+|\mu_2|$, $|\mu_1+\mu_2|$ e $\mu_1+\mu_2$ são todas de Radon.

Portanto, $M(X)$ é um espaço vetorial complexo. Ainda mais, temos

$$\|\lambda\mu\| = |\lambda\mu|(X) = |\lambda|\,|\mu|(X) = |\lambda|\|\mu\| \quad \text{e}$$

$$\|\mu_1 + \mu_2\| = |\mu_1 + \mu_2|(X) \leq |\mu_1|(X) + |\mu_2|(X) = \|\mu_1\| + \|\mu_2\| \clubsuit$$

Em analogia com números complexos, observemos que (cheque)

$$\max(\|\mu_r\|, \|\mu_i\|) \leq \|\mu\| \leq \|\mu_r\| + \|\mu_i\|.$$

Teorema 5.5 (da Representação de Riesz). *Seja X um espaço HLC. Dada uma medida $\mu \in M(X)$ consideremos o funcional*

$$I_\mu(f) = \int f d\mu, \text{ onde } f \in C_0(X).$$

A aplicação $\mu \mapsto I_\mu$ é um isomorfismo isométrico de $M(X)$ em $C_0(X)^*$.

Prova.

Já comentamos (após o Lema 5.1) que todo funcional $I \in C_0(X)^*$ é da forma I_μ, com $\mu \in M(X)$. Assim, a aplicação citada no enunciado é sobrejetora. Por outro lado, dada $\mu \in M(X)$, pela desigualdade triangular para integrais em medidas complexas [Proposição 3.4(c)] encontramos

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu| \leq \|f\|_u \, \|\mu\|.$$

Assim, $I_\mu \in C_0(X)^*$ e com norma

$$\|I_\mu\| \leq \|\mu\|.$$

Por outro lado, pela propriedade em Proposição 3.4(b), a função complexa

$$g = \frac{d\mu}{d|\mu|} \text{ satisfaz } |g| = 1 \ |\mu| - \text{q.s.}$$

Pelo Teorema de Lusin com a medida $|\mu|$, dado $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in C_c(X)$ com

$$\|\varphi\|_u \leq 1 \text{ e } \varphi = \overline{g} \text{ em um conjunto } E \text{ tal que } |\mu|(E^c) < \epsilon.$$

Então, utilizando que $\overline{g} \in L^1(\mu)$ [pois $\mu(X) < \infty$] e então a regra da cadeia (caso complexo, cheque), encontramos

$$\|\mu\| = \int |g|^2 d|\mu| = \int \overline{g} \frac{d\mu}{d|\mu|} d|\mu| = \int \overline{g} d\mu = \left| \int \varphi d\mu + \int (\overline{g} - \varphi) d\mu \right|$$

$$\leq \|I_\mu\| \, \|\varphi\|_u + \int |\overline{g} - \varphi| d|\mu| \leq \|I_\mu| + 2|\mu|(E^c) \leq \|I_\mu\| + 2\epsilon.$$

Donde segue

$$\|\mu\| \leq \|I_\mu\|.$$

Logo, a aplicação anunciada é isometria sobrejetora♣

REFERÊNCIAS

[1.] Bartle, R. G.., *An extension of Egorov's theorem*, Amer. Math. Monthly, **87** no. 8, pp. 628–633.

[2.] Cohn, D. L., *Measure Theory*, Birkhäuser, 1980.

[3.] de Oliveira, O. R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv:1207.1472v2, 2012.

[4.] Feldman, M. B., *A proof of Lusin's theorem*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 191–192.

[5.] Folland, G. B., *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[6.] Hairer, E., and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[7.] Lima, E., *Curso de Análise* , Vol 1., IMPA, 2009.

[8.] Littlewood, J. E., *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford University Press, 1941.

[9.] Loeb, P. A. and Talvila, E., *Lusin's Theorem and Bochner Integration*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, Vol. 10, (2004), 55-62.

[10.] Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis*, fourth edition, Prentice Hall, 2010.

[11.] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1964.

[12.] Rudin, W., *Real & Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1987.

[13.] Severini, C., *Sulle successioni di funzioni ortogonali* (Italian), Atti Acc. Gioenia. (5) 3, 10 S (1910).

[14.] Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*, Ed. Ciência Moderna, 2003.

[15.] Stein, E. M., and Shakarchi, R., *Real Analysis - Measure Theory, Integra tion, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

[16.] Swartz, C., *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific, 1994.

[17.] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. *Measure and Integral*, Marcel Deker, 1977.