MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT5798 - IMEUSP - 2016

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Estas notas destinam-se aos alunos do curso Medida e Integração - MAT5798-IMEUSP - 2016 e baseiam-se 100% no livro de G. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, John Wiley & Sons, além de uns 20% distribuídos por outros excelentes livros, citados na bibliografia, e alguns poucos artigos. Apesar de se constituírem em quase uma tradução do núcleo de apenas cinco capítulos do livro base, excetuando as maravilhosas notas e exercícios propostos, não devem ser tidas como tal visto que não sou tradutor profissional e uma boa quantidade de material foi alterada e outra introduzida. Os erros de tradução e/ou matemática são de minha responsabilidade. Para finalizar, recomendo a compra e o estudo do merecidamente famoso livro de G. B. Folland.

Capítulo 0 - INTRODUÇÃO

Capítulo 1 - MEDIDAS

Capítulo 1

MEDIDAS

.

Capítulo 2

INTEGRAÇÃO

Capítulo 3

MEDIDAS COM SINAL E DIFERENCIAÇÃO

O tema principal deste capítulo é o conceito de diferenciação de uma medida ν com repeito a outra medida μ sobre a mesma σ-álgebra. Faremos isto no nível abstrato, e depois obtemos um resultado mais refinado quando μ é a medida de Lebesgue m sobre $\mathbb{R}^n$. Quando m é a medida de Lebesgue na reta real tal estudo se combina com a teoria clássica de uma variável real para produzir uma versão do teorema fundamental do cálculo para integrais de Lebesgue.

3.1 Medidas com Sinal

Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Uma **medida com sinal** sobre $(X, \mathcal{M})$ é uma função sobre conjuntos $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ satisfazendo

- $\nu(\varnothing) = 0$.
- ν assume no máximo um dos valores $-\infty$ e $+\infty$.
- Se $E_1, E_2, \ldots$ são mensuráveis e disjuntos, então

$$\nu\left(\dot{\bigcup_{\mathbb{N}}} E_j\right) = \sum_{\mathbb{N}} \nu(E_j)$$

  é uma soma não ordenada na reta estendida. Vista por outra perspectiva, $\nu(\dot\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$ é uma série comutativamente convergente em $\overline{\mathbb{R}}$. Se $\nu(\dot\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) < \infty$, então $\sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$ é uma série real absolutamente convergente.

Atenção.

- Recordando a definição de soma não ordenada em $\overline{\mathbb{R}}$ temos

$$\sum \nu(E_n) = \begin{cases} \sum \nu(E_n)^+ - \sum \nu(E_n)^-, & \text{se tal diferença não é } +\infty - (+\infty), \\ \\ \pm\infty, & \text{se existe } n \text{ tal que } \nu(E_n) = \pm\infty. \end{cases}$$

- A hipótese "ν assume no máximo um dos valores $+\infty$ e $-\infty$" é supérflua. Pois, para todo E em $\mathcal{M}$ a equação $\nu(E) + \nu(E^c) = \nu(X)$ está bem definida e então $\nu(E) = +\infty$ implica $\nu(X) = +\infty$, e $\nu(E) = -\infty$ implica $\nu(X) = -\infty$.

Observações 3.1 Seja ν uma medida com sinal e E, F mensuráveis, com $E \subset F$.

(a) Se $\nu(E) = \pm\infty$, então $\nu(F) = \nu(E) + \nu(F \setminus E) = \pm\infty$.

(b) Se $\nu(F)$ é finita, então $\nu(E)$ é finita.

(c) Se ν assume o valor $-\infty$, então $-\nu$ é medida com sinal e assume o valor $+\infty$.

É evidente que toda medida é uma medida com sinal. Para melhor identificar, algumas vezes nos referiremos às medidas como **medidas positivas**.

Exemplos 3.1. Dois exemplos de medidas com sinal vem prontamente à mente.

(1) Se μ_1 e μ_2 são medidas positivas sobre $\mathcal{M}$, com ao menos uma finita, então

$$\boxed{\mu_1 - \mu_2}$$

é uma medida com sinal.

(2) Seja μ uma medida sobre $\mathcal{M}$ e $f : X \to [-\infty, \infty]$ mensurável tal que

$$\int f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{ou} \quad \int f^- \, d\mu < \infty$$

(em um ou outro caso f é dita uma **função μ-integrável estendida**). Então, a função de conjuntos $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ definida por

$$\boxed{\nu(E) = \int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu}$$

é uma medida com sinal.

Logo logo (em decomposição de Jordan) veremos que estes são os *únicos* exemplos.

Proposição 3.1 *Seja ν uma medida com sinal sobre $(X, \mathcal{M})$ e $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$.*

(a) Se (E_j) é crescente, então

$$\nu\left(\bigcup_{\mathbb{N}} E_j\right) = \lim \nu(E_j).$$

(b) Se (E_j) é decrescente e $\nu(E_1) < \infty$, então

$$\nu\left(\bigcap_{\mathbb{N}} E_j\right) = \lim \nu(E_j).$$

Prova.

(a) $\diamond$ Se $\nu(E_n) = \pm\infty$ para algum n, temos $\nu(E_k) = \pm\infty = \nu(\bigcup E_j)$ se $k \geq n$.

$\diamond$ Se $\nu(E_j) < \infty$ para todo j, temos

$$\bigcup E_j = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \ldots \quad \text{e}$$

$$\nu\left(\bigcup E_j\right) = \nu(E_1) + [\nu(E_2) - \nu(E_1)] + [\nu(E_3) - \nu(E_2)] + \cdots = \lim \nu(E_j).$$

(b) Pela Observação 3.1(b) vemos que $\nu(E_j) < \infty$, para todo j. Por outro lado, a sequência $E_1 \setminus E_j$ cresce a $\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_1 \setminus E_j) = E_1 \setminus (\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j)$. Donde, por (a),

$$\nu(E_1) - \lim \nu(E_j) = \nu(E_1) - \nu\left(\bigcap E_j\right) \clubsuit$$

Se ν é uma medida com sinal sobre $(X, \mathcal{M})$, um conjunto $E \in \mathcal{M}$ é chamado

- **positivo**, segundo ν, se temos $\nu(F) \geq 0$ para todo $F \in \mathcal{M}$ tal que $F \subset E$.
- **negativo**, segundo ν, se temos $\nu(F) \leq 0$ para todo $F \in \mathcal{M}$ tal que $F \subset E$.
- **nulo**, segundo ν, se temos $\nu(F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{M}$ tal que $F \subset E$.

Trocando ν por $-\nu$ vemos que conjuntos positivos e negativos tem atributos afins. A restrição de ν aos subconjuntos mensuráveis de um positivo dado é uma medida.

Seguem algumas importantes observações sobre esta terminologia.

Não confundir conjunto nulo com conjunto de medida nula ao usar medida com sinal. Enquanto todo conjunto nulo tem medida nula, um conjunto E de medida nula não necessariamente é nulo, pois E pode ser a união de dois conjuntos disjuntos E_1 e E_2 com medidas não nulas e opostas $\nu(E_1) = -\nu(E_2)$. Por outro lado, dada uma medida positiva μ, devido à monotonicidade de μ um conjunto E é μ-nulo se e somente se $\mu(E) = 0$.

No Exemplo 3.1.2, que apresenta a medida com sinal

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu,$$

temos que E é ν-positivo, ν-negativo, ou ν-nulo precisamente quando

$$f \geq 0 \ \mu - \text{q.s. sobre } E, \qquad f \leq 0 \ \mu - \text{q.s. sobre } E, \qquad f = 0 \ \mu - \text{q.s. sobre } E.$$

Verifique que no caso $\mu = m$, onde m é a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$, é bem fácil apresentar uma função f Lebesgue mensurável (até mesmo contínua) e um conjunto E tal que $\nu(E) > 0$ mas E não é ν-positivo (similarmente quanto a conjuntos ν-negativos e ν-nulos).

Lema 3.1 *Seja ν uma medida com sinal sobre $(X, \mathcal{M})$.*

(a) Todo subconjunto mensurável de um conjunto positivo também é positivo.

(b) A reunião enumerável de conjuntos positivos também é positivo.

(c) Um conjunto é nulo se, e somente se, é positivo e negativo.

Prova.

(a) Óbvio.

(b) Sejam $P_0 = \varnothing, P_1, P_2, \ldots$ conjuntos positivos e um mensurável $E \subset \bigcup P_j$. Pela σ-aditividade de ν e decompondo E, por (a) segue

$$\nu(E) = \sum_{n \geq 1} \nu \left[E \bigcap \left(P_n \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} P_j \right) \right] \geq 0.$$

(c) Trivial♣

Teorema 3.1 (Teorema da Decomposição de Hahn). *Seja ν uma medida com sinal sobre $(X, \mathcal{M})$. Então, existe um conjunto positivo P e um conjunto negativo N, ambos segundo ν, tais que*

$$X = P \dot{\bigcup} N.$$

Se P', N' é outro par nestas condições, então $P \Delta P' (= N \Delta N')$ é nulo para ν. Esquematicamente representamos

$$X = \begin{array}{ccccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ \vdots & + & + & + & \vdots & - & - & - & \vdots \\ \vdots & + & P & + & \vdots & - & N & - & \vdots \\ \vdots & + & + & + & \vdots & - & - & - & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \end{array}$$

Prova.

Suponhamos que ν não assume o valor $+\infty$ (senão, analisamos $-\nu$). Seja

$$\gamma = \sup\{\nu(E) : E \text{ é conjunto positivo}\} \qquad [\nu(\emptyset) = 0 \le \gamma \le \infty]$$

e (P_j) uma sequência de conjuntos positivos tal que $\nu(P_j) \to \gamma$. Seja

$$P = \bigcup P_j = P_1 \cup P_2 \cup \cdots.$$

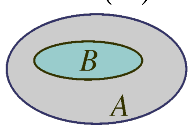
Pelo Lema 3.1(b), o conjunto P é positivo. Utilizando as comparações $0 \le \nu(P) = \nu(P_j) + \nu(P \smallsetminus P_j)$, encontramos $\nu(P_j) \le \nu(P) \le \gamma$ para todo j. Donde segue $\nu(P) = \gamma$ e que γ é real.

Afirmação: $N = X \smallsetminus P$ é negativo. Suponhamos o contrário, N não negativo.

Primeira observação. Se E é um subconjunto positivo de N, então $\nu(E) = 0$. Basta ver que $P \dot{\cup} E$ é positivo e que $\gamma \ge \nu(P \dot{\cup} E) = \gamma + \nu(E) \ge \gamma$.

Segunda observação. Se $A \subset N$ e $\nu(A) > 0$, então existe B tal que

$$B \subset A \ \text{ e } \ \nu(B) > \nu(A)$$



Ora, pela primeira observação A não é positivo e existe $C \subset A$ com $\nu(C) < 0$. Definindo $B = A \smallsetminus C$ temos $\nu(A)$ finito e então $\nu(A) = \nu(B) + \nu(C) < \nu(B)$.

Verificadas as duas observações, continuemos a prova da afirmação.

Por hipótese, N não é negativo e contém algum conjunto de medida maior que zero. Sendo assim podemos definir uma sequência decrescente $(A_j) \subset N$ e uma sequência $(n_1, n_2, \ldots)$ em $\mathbb{N}$ da seguinte forma: n_1 *é o menor natural para o qual existe um conjunto* $A_1 \subset N$ *satisfazendo [vide figura]*

$$\nu(A_1) > \frac{1}{n_1}.$$

$0 \quad \cdots \quad \frac{1}{n_1} \quad \nu(A_1) \quad \frac{1}{n_1-1}$ [trecho sem "$\nu(A_{1's})$"]

Figura 3.1: A escolha de n_1 e de A_1.

Por indução e a segunda observação acima, para cada $j \geq 2$ *existe o menor natural* n_j *para o qual existe* $A_j \subset A_{j-1}$ *satisfazendo [vide figura abaixo]*

$$\nu(A_j) > \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n_j}.$$

$\nu(A_{j-1}) \quad \cdots \quad \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n_j} \quad \nu(A_j) \quad \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n_j-1}$ [trecho sem "$\nu(A_{j's})$"]

Figura 3.2: A escolha de n_j e de A_j.

A sequência $\big(\nu(A_j)\big)$ é estritamente crescente. Definamos

$$A = \bigcap A_j.$$

Utilizando a Proposição 3.1(b) obtemos

$$\infty > \nu(A) = \lim \nu(A_j) \geq \lim \left(\frac{1}{n_j} + \cdots + \frac{1}{n_1}\right) = \sum \frac{1}{n_j} > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{j\to\infty} n_j = \infty.$$

Donde existe $B \subset A$ com $\nu(B) > \nu(A) + \frac{1}{n}$ para algum n. Para todo j temos

$$\nu(B) > \nu(A) + \frac{1}{n} > \nu(A_j) + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad B \subset A_j,$$

Donde segue $n_j \leq n$ para todo j e portanto $n = \infty$ $\lightning$

Logo, N é negativo.

Para finalizar, se P', N' é outra partição de X com P' positivo e N' negativo então $P \setminus P' \subset P$ e $P \setminus P' \subset N'$, e o Lema 3.1(a) mostra que $P \setminus P'$ é positivo e negativo, e assim nulo. Vice-versa, $P' \setminus P$ é nulo e $N \Delta N' = P \Delta P'$ idem$\clubsuit$

Um par

$$(P, N)$$

como no teorema acima é dito **decomposição de Hahn** de X, induzida por ν. Dizemos que P "carrega toda a massa positiva de μ", pois temos $\mu(E) \geq 0$ para todo (mensurável) $E \subset P$, enquanto N "carrega toda a massa negativa de μ", pois temos $\mu(E) \leq 0$ para todo (mensurável) $E \subset N$.

Em geral, a decomposição de Hahn não é única (pois conjuntos ν-nulos podem ser transferidos de P para N ou de N para P), mas conduz a uma representação canônica da medida com sinal ν como diferença de duas medidas positivas.

Vejamos uma útil terminologia e um conceito. Uma medida μ com sinal está **concentrada** em $E \in \mathcal{M}$ se ocorre

$$\mu(A) = \mu(A \cap E), \text{ para todo } A \in \mathcal{M},$$

ou, equivalentemente (cheque),

$$\mu(A) = 0, \text{ para todo } A \text{ disjunto de } E \quad [A \in \mathcal{M}].$$

Duas medidas com sinal μ e ν sobre $(X, \mathcal{M})$ são **mutuamente singulares**, ou μ é **singular com respeito a** ν, ou vice-versa, se existem E e F tais que

- $X = E \cup F$.
- F é nulo para μ (isto é, a medida com sinal μ está concentrada em E) e E é nulo para ν (isto é, a medida com sinal ν está concentrada em F).

Simbolicamente, expressamos esta relação de "independência" como

$$\mu \perp \nu.$$

Esquematicamente representamos

$$X = \begin{array}{c:ccc:ccc:}
\cdots\cdots & \cdots & & \cdots\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & & \cdots \\
\bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ & \\
\bullet & E, \mu & \bullet & \circ & F, \nu & \circ & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ & \\
\cdots\cdots & \cdots & & \cdots\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Teorema 3.2 (Teorema da decomposição de Jordan). *Seja ν uma medida com sinal. Existem duas únicas medidas positivas ν^+ e ν^- tais que*

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \quad e \quad \nu^+ \perp \nu^-.$$

Esquematicamente representamos

$$X = \begin{array}{ccccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ \vdots & + & + & + & \vdots & - & - & - & \vdots \\ \vdots & + & P,\nu^+ & + & \vdots & - & N,\nu^- & - & \vdots \\ \vdots & + & + & + & \vdots & - & - & - & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \end{array}$$

Prova.

Seja $X = P \uplus N$ a decomposição de Hahn para ν (Teorema 3.1) e definamos

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) \ \text{ e } \ \nu^-(E) = -\nu(E \cap N).$$

É fácil ver que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e $\nu^+ \perp \nu^-$ (cheque).

Unicidade. Suponhamos que também temos $\nu = \mu^+ - \mu^-$, com $\mu^+ \perp \mu^-$. Por definição de singularidade mutual temos $X = \mathcal{P} \uplus \mathcal{N}$, com $\mathcal{N}$ μ^+-nulo e $\mathcal{P}$ μ^--nulo. Assim, $\mathcal{P}$ é ν-positivo, $\mathcal{N}$ é ν-negativo e $X = \mathcal{P} \uplus \mathcal{N}$ é outra decomposição de Hahn para ν. Pela unicidade da decomposição de Hahn , a diferença $(P \smallsetminus \mathcal{P}) \uplus (\mathcal{P} \smallsetminus P)$ é ν-nula.

Dado A mensurável [e notando que $\mathcal{P} \uplus (P \smallsetminus \mathcal{P}) = P \uplus (\mathcal{P} \smallsetminus P)$] temos

$$\begin{aligned} \mu^+(A) &= \mu^+(A \cap \mathcal{P}) \\ &= \nu(A \cap \mathcal{P}) \\ &= \nu[(A \cap \mathcal{P}) \uplus A \cap (P \smallsetminus \mathcal{P})] \\ &= \nu[(A \cap P) \uplus A \cap (\mathcal{P} \smallsetminus P)] \\ &= \nu(A \cap P) \\ &= \nu^+(A). \end{aligned}$$

Analogamente temos $\mu^- = \nu^-$ (cheque)♣

As medidas ν^+ e ν^- são chamadas de **variações positiva e negativa** de ν, e

$$\boxed{\nu = \nu^+ - \nu^-}$$

é a **decomposição de Jordan** de ν, por analogia com a representação de uma função de variação limitada sobre $\mathbb{R}$ como uma diferença de duas funções crescentes (vide 3.5).

A **variação total** de ν é a medida positiva

$$\boxed{|\nu| = \nu^+ + \nu^-.}$$

É facil ver que E é ν-nulo se e só se $|\nu|(E) = 0$ (cheque).

Se ν e μ são medidas com sinal, temos

$$\nu \perp \mu \iff \nu^\pm \perp \mu \iff |\nu| \perp \mu \qquad \text{(Exercício 2 3.1).}$$

Se ν omite o valor $+\infty$ então $\nu^+(X) = \nu(P) \in [0, \infty)$ e concluímos que ν^+ é uma medida finita e ν é majorada por $\nu^+(X)$.

Analogamente, se ν omite o valor $-\infty$ então $0 \le \nu^-(X) = -\nu(N) < \infty$ e portanto ν^- é uma medida finita e ν é minorada por $-\nu^-(X)$.

Em particular, *se a imagem de ν está contida em $\mathbb{R}$, então ν é limitada.*

Observemos também que ν é da forma

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu,$$

com $\mu = |\nu|$, $f = \chi_P - \chi_N$ e $X = P \cup N$ a decomposição de Hahn para ν (cheque).

A integração com respeito a uma medida com sinal ν é natural. Definimos

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-) \quad \text{e}$$

$$\int f\, d\nu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^-, \quad \text{onde } f \in L^1(\nu).$$

Notemos que f é uma função a valores em $\overline{\mathbb{R}}$ ou f é uma função a valores em $\mathbb{C}$.

Uma medida com sinal ν é dita **finita** (**$\boldsymbol{\sigma}$-finita**) se $|\nu|$ é finita (σ-finita).

3.2 O teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

Seja ν uma medida com sinal e μ uma medida positiva sobre $(X, \mathcal{M})$. Dizemos que ν é **absolutamente contínua** com respeito a μ e escrevemos

$$\nu \ll \mu$$

se $\nu(E) = 0$ para todo E tal que $\mu(E) = 0$.

Logo, supondo $\nu \ll \mu$, segue trivialmente que se E é um conjunto μ-nulo então E é ν-nulo (cheque).

É fácil verificar as equivalências:

$$\nu \ll \mu \iff \nu^{\pm} \ll \mu \iff |\nu| \ll \mu \qquad \text{(Exercício 8 \quad 3.2).}$$

A continuidade absoluta é em certo sentido a antítese da singularidade mutual. Diz-se também que a continuidade absoluta à "ortogonal" à singularidade mútua. [O teorema de Radon-Nikodym, página 23, ratifica tal interpretação geométrica.]

Mais precisamente,

$$\boxed{\text{valendo } \nu \ll \mu \text{ e } \nu \perp \mu, \text{ concluímos que } \nu = 0.}$$

De fato, supondo $X = N \cup M$, com M nulo para ν e N nulo para μ [vide diagrama imediatamente abaixo],

$$X = \begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \\
\vdots & \square & \square & \square & \vdots & \blacktriangle & \blacktriangle & \blacktriangle & \vdots \\
\vdots & \square & N, \nu & \square & \vdots & \blacktriangle & M, \mu & \blacktriangle & \vdots \\
\vdots & \square & \square & \square & \vdots & \blacktriangle & \blacktriangle & \blacktriangle & \vdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & .
\end{array}$$

temos

$$|\nu|(M) = \mu(N) = 0$$

e então a continuidade absoluta $\nu \ll \mu$ implica $|\nu|(N) = 0$. Donde, $|\nu| = 0$ e $\nu = 0$.

É possível estender a noção de continuidade absoluta ao caso em que μ é uma medida com sinal (a saber, podemos definir $\nu \ll \mu$ por $\nu \ll |\mu|$), mas não necessitaremos desta generalização.

O termo "continuidade absoluta" é derivado da teoria de funções de variável real (vide 3.5). No caso de medidas com sinal finitas, é equivalente a uma outra condição que é obviamente uma forma de continuidade.

Teorema 3.3 (Caracterização $\epsilon - \delta$ da continuidade absoluta). *Sejam ν uma medida com sinal finita e μ uma medida positiva sobre $(X, \mathcal{M})$. Temos $\nu \ll \mu$ se e só se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo:*

$$|\nu(E)| < \epsilon \text{ sempre que } \mu(E) < \delta.$$

Prova.

Devido à equivalência $\nu \ll \mu$ se e somente se $|\nu| \ll \mu$ e à desigualdade $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$, se $E \in \mathcal{M}$, é lícito supor que $\nu = |\nu|$ é uma medida positiva.

($\Leftarrow$) Óbvio.

($\Rightarrow$) Por contradição. Suponhamos que exista $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto mensurável E_n satisfazendo

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad \nu(E_n) \geq \epsilon.$$

Seja

$$F_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \quad \text{e} \quad F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Temos

$$\mu(F_k) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{e} \quad \mu(F) = 0.$$

Logo, por hipótese, $\nu(F) = 0$. Também temos $\nu(F_k) \geq \epsilon$ para todo k e, já que ν é medida finita, $\nu(F) = \lim \nu(F_k) \geq \epsilon$ $\lightning$

Observação 3.2 Seja μ uma medida positiva e $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é uma função μ-integrável estendida. Então, a medida com sinal ν definida por

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

é absolutamente contínua com respeito a μ [pois, se $\mu(E) = 0$ então $\int_E f d\mu = 0$]. Ainda mais, ν é finita se e somente se $f \in L^1(\mu)$.

Se $f : X \to \mathbb{C}$ pertence a $L^1(\mu)$, o teorema acima (Teorema 3.3) pode ser aplicado às partes Ref e Imf, e obtemos o resultado abaixo.

Corolário 3.1 *Seja $f \in L^1(\mu)$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\left|\int_E f d\mu\right| < \epsilon \text{ sempre que } \mu(E) < \delta.$$

Prova. Trivial♣

Observação 3.3 Expressamos a relação

$$\nu(E) = \int\limits_E f d\mu$$

empregando a notação

$$\boxed{\nu = f\, d\mu}.$$

Às vezes, abusando da linguagem, nos referiremos à "medida com sinal $f\, d\mu$".

Chegamos assim ao principal teorema desta seção, que fornece um quadro completo da estrutura de uma medida com sinal em relação a uma medida positiva. Primeiro, precisamos de um lema técnico (i.e., adequado ao teorema).

Lema 3.2 *Sejam ν e μ medidas finitas sobre $(X, \mathcal{M})$. Então, ou $\nu \perp \mu$ ou existe $\epsilon > 0$ e $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) > 0$ e $\nu \geq \epsilon\mu$ sobre E (isto é, E é positivo para $\nu - \epsilon\mu$).*

Prova.

- ◇ Preparação. Seja $X = P_n \dot\cup N_n$ a decomposição de Hahn para

  $$\nu - \frac{1}{n}\mu.$$

  Sejam $P = \bigcup P_n$ e $N = \bigcap N_n = P^c$. Então, N é negativo para $\nu - n^{-1}\mu$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Donde segue $0 \leq \nu(N) \leq n^{-1}\mu(N)$ para todo n. Logo, $\nu(N) = 0$.

- ◇ Se $\mu(P) = 0$, temos $\nu \perp \mu$.

- ◇ Se $\mu(P) > 0$, temos $\mu(P_n) > 0$ para algum n, com P_n positivo para $\nu - n^{-1}\mu$♣

Teorema 3.4 (Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, real). *Sejam ν uma medida com sinal σ-finita e μ uma medida positiva σ-finita, definidas em $(X, \mathcal{M})$. Existem duas únicas medidas com sinal σ-finitas λ e ρ sobre $(X, \mathcal{M})$ tais que*

$$\nu = \lambda + \rho, \ \text{com } \lambda \perp \mu \text{ e } \rho \ll \mu.$$

Ainda, existe uma função μ-integrável estendida $f : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$d\rho = f\,d\mu.$$

Ainda mais, f é única a menos de um conjunto μ-nulo.

Como mnemônico temos o diagrama (com $M \neq \mathcal{M}$)

$$X \ = \ \begin{array}{ccccccccc} \cdots\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdot & & \cdots & \cdots & . \\ \vdots\ \heartsuit & & \heartsuit & \heartsuit & \vdots\ \spadesuit & & \spadesuit & \spadesuit & \vdots \\ \vdots\ \heartsuit & & \Lambda, \lambda & \heartsuit & \vdots\ \spadesuit & & M, \mu & \spadesuit & \vdots \\ \vdots\ \heartsuit & & \heartsuit & \heartsuit & \vdots\ \spadesuit & & \spadesuit & \spadesuit & \vdots \\ \cdots\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdot & & \cdots & \cdots & . \end{array}$$

onde $X = \Lambda \cup M$, sendo λ concentrada em Λ e a medida μ (e portanto ρ) em M.

Prova.

Dividamos a prova em existência, com três casos, e unicidade.

Existência.

- Caso I (o principal). Suponhamos ν e μ positivas e finitas. Analisemos

$$\mathcal{F} = \left\{ f : X \to [0, \infty] : \int_E f\,d\mu \leq \nu(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{M} \right\}.$$

Tal $\mathcal{F}$ é não vazio pois contém a função nula. Ainda mais, dadas f e g, ambas em $\mathcal{F}$, a função $h = \max(f, g)$ também pertence a $\mathcal{F}$, pois se $A = \{x : f(x) > g(x)\}$ e E é um conjunto mensurável qualquer então

$$\int_E h\,d\mu = \int_{E \cap A} f\,d\mu + \int_{E \smallsetminus A} g\,d\mu \leq \nu(E \cap A) + \nu(E \smallsetminus A) = \nu(E).$$

Seja

$$\alpha = \sup \left\{ \int f d\mu = \int_X f\,d\mu : f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Temos $\alpha \leq \nu(X) < \infty$ e a seguir mostramos que tal sup é atingido em uma função f a ser apontada. Consideremos uma sequência $(f_n) \subset \mathcal{F}$ tal que

$$\int f_n \, d\mu \to \alpha.$$

Definamos $g_n = \max(f_1, \ldots, f_n)$ e $f = \sup_n f_n$. Temos que $g_n \in \mathcal{F}$, sendo que g_n cresce pontualmente a f e satisfaz

$$\int f_n \, d\mu \leq \int g_n \, d\mu \leq \alpha.$$

Portanto, temos

$$\lim \int g_n \, d\mu = \alpha$$

e pelo teorema da convergência monótona segue que

$$f \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \int f \, d\mu = \alpha < \infty.$$

Logo, f é finita q.s. e podemos supor f real positiva.

Afirmamos que a medida $d\lambda = d\nu - f d\mu$ [observemos que $d\lambda$ é finita e positiva pois ν é finita, α é real e $f \in \mathcal{F}$] é singular com respeito a μ. Caso contrário, pelo Lema 3.2 existe um conjunto mensurável E e $\epsilon > 0$ tal que $\mu(E) > 0$ e $\lambda \geq \epsilon\mu$ sobre E. Mas então temos

$$\epsilon\chi_E d\mu \leq d\lambda = d\nu - f d\mu,$$

como constatado pelas relações

$$\int_F \epsilon\chi_E d\mu = \epsilon\mu(E \cap F) \leq \lambda(E \cap F) \leq \lambda(F) = \int_F d\lambda = \int_F (d\nu - f d\mu), F \in \mathcal{M}.$$

Donde segue que $(f + \epsilon\chi_E)d\mu \leq d\nu$ e portanto $f + \epsilon\chi_E$ pertence a $\mathcal{F}$ e

$$\int (f + \epsilon\chi_E)d\mu = \alpha + \epsilon\mu(E) > a \lightning$$

Donde, $\lambda \perp \mu$. [Notemos que λ é positiva e finita.]

Pela Observação 3.2, a medida (positiva e finita) ρ, denotada $d\rho = f d\mu$, é absolutamente contínua com respeito a μ. Provamos que existem

$$\lambda, \ f \text{ e } d\rho = f d\mu.$$

◇ Caso II. Suponhamos μ e ν medidas positivas σ-finitas. Seja $E \in \mathcal{M}$. Então X é uma união enumerável disjunta de conjuntos μ-finitos e também uma união enumerável disjunta de conjuntos ν-finitos. Intersectando dois a dois os conjuntos nestas uniões, particionamos X em uma quantidade enumerável de $X_{j's}$ com $\mu(X_j) < \infty$ e $\nu(X_j) < \infty$. Definamos as medidas positivas finitas concentradas em X_j, e usuais,

$$\mu_j(E) = \mu(E \cap X_j) \;\text{ e }\; \nu_j(E) = \nu(E \cap X_j)$$

e enfatizemos que $\mu = \sum \mu_j$ e $\nu = \sum \nu_j$.

Pelo caso I, para cada j temos $d\nu_j = d\lambda_j + f_j d\mu_j$ com $\lambda_j \perp \mu_j$ e $f_j \geq 0$ (e integrável). Como μ_j e ν_j estão concentradas em X_j, segue que a medida (positiva e finita) $\lambda_j = \nu_j - f_j d\mu_j$ idem e, ainda, X_j^c é nulo para μ_j, ν_j e λ_j. Donde, podemos supor $f_j \equiv 0$ em X_j^c. Estão bem definidas

$$\lambda = \sum \lambda_j \;\text{ e }\; f = \sum f_j \geq 0 \qquad [f(x) = f_j(x) \text{ se } x \in X_j].$$

A seguir, efetuemos as necessárias verificações.

- Primeiro, $d\nu = d\lambda + f d\mu$. Dado E temos $\chi_{X_j} d\mu = d\mu_j$ e

$$\nu(E) = \sum \nu_j(E) = \sum \left[\lambda_j(E) + \int_E f_j d\mu_j\right] = \lambda(E) + \sum \int_E f_j \chi_{X_j} d\mu$$
$$= \lambda(E) + \sum \int_E f_j d\mu = \lambda(E) + \int_E f d\mu.$$

- Segundo, $\lambda \perp \mu$. Utilizando $\lambda_j \perp \mu_j$, particionemos $X_j = \Lambda_j \cup M_j$ com λ_j concentrada em Λ_j e μ_j e M_j.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \\
 & & \vdots & \square & \square & \square & \vdots & \blacktriangle & \blacktriangle & \blacktriangle & \vdots & \\
X_j & = & \vdots & \square & \Lambda_j, \lambda_j & \square & \vdots & \blacktriangle & M_j, \mu_j & \blacktriangle & \vdots & \\
 & & \vdots & \square & \square & \square & \vdots & \blacktriangle & \blacktriangle & \blacktriangle & \vdots & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & .
\end{array}$$

Então,

$$X = \Lambda \dot{\bigcup} M, \quad \text{com } \Lambda = \dot{\bigcup}^{\infty} \Lambda_j \text{ e } M = \dot{\bigcup}^{\infty} M_j.$$

É fácil ver que λ está concentrada em Λ e μ em M (cheque).

- Terceiro. Claramente $d\lambda$ e $d\rho = f d\mu$ são positivas e σ-finitas e $\rho \ll \mu$ (cheque).

- ◇ **Caso geral.** Se ν é uma medida com sinal σ-finita, aplicando o caso II aos pares de medidas posivas σ-finitas (ν^+,μ) e (ν^-,μ), obtemos os respectivos pares de medidas positivas e σ-finitas (λ_1,ρ_1) e (λ_2,ρ_2). Basta então considerarmos (cheque)

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \quad \text{e} \quad \rho = \rho_1 - \rho_2.$$

Unicidade.

Suponhamos que também vale a decomposição $d\nu = d\lambda' + f'd\mu$. Particionando X em uma reunião enumerável

$$X = \dot{\bigcup} X_j \text{ tal que } |\nu|(X_j) < \infty \text{ e } \mu(X_j) < \infty,$$

vemos que podemos supor sem nenhuma perda $|\nu|(X) < \infty$ e $\mu(X) < \infty$. Então temos $d\lambda - d\lambda' = (f' - f)d\mu$. Verifiquemos a relação

$$(\lambda - \lambda') \perp \mu.$$

De fato, se temos

$$X = \begin{cases} \Lambda \,\dot\cup\, M, \text{ com } M \text{ nulo para } \lambda \text{ e } \Lambda \text{ nulo para } \mu, \\ \text{e} \\ \Lambda' \,\dot\cup\, M', \text{ com } M' \text{ nulo para } \lambda' \text{ e } \Lambda' \text{ nulo para } \mu, \end{cases}$$

então obtemos

$$X = (\Lambda \cup \Lambda') \,\dot\cup\, (M \cap M')$$

com $\Lambda \cup \Lambda'$ nulo para μ e $M \cap M'$ nulo para $\lambda - \lambda'$.

Pela Observação 3.2, segue

$$(f' - f)d\mu \ll d\mu.$$

Concluímos então $d\lambda - d\lambda' = (f' - f)d\mu = 0$. Logo, $\lambda = \lambda'$ e $f' = f$ μ-q.s♣

Mantenhamos a notação no teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym (real).

A decomposição

$$\nu = \lambda + \rho, \text{ com } \lambda \perp \mu \text{ e } \rho \ll \mu,$$

é a **decomposição de Lebesgue** de ν (com sinal) com respeito a μ (positiva).

Se $\nu \ll \mu$, pela unicidade no teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym temos

$$\lambda = 0, \ \rho = \nu \text{ e o}$$

Teorema de Radon-Nikodym: $d\nu = f d\mu$ para alguma função $f : X \to \mathbb{R}$.

Assim, se $\nu << \mu$ então em certo sentido temos que ν é um "múltiplo" de μ. [Portanto, se $\nu << \mu$ e $\nu \perp \mu$ então temos $\nu = 0$.] Isto ratifica a interpretação já comentada de que *a continuidade absoluta é ortogonal à singularidade mútua.*

A função f é a **derivada (real) de Radon-Nikodym** de ν (com sinal) com respeito a μ (positiva). Notação:

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\mu} d\mu, \quad \text{onde } \frac{d\nu}{d\mu} = f.$$

Rigorosamente,

$$\frac{d\nu}{d\mu} \text{ é a classe das funções iguais a } f \ \mu - \text{q.s.}$$

As fórmulas sugeridas pela notação diferencial

$$\frac{d\nu}{d\mu}$$

estão geralmente corretas. Por exemplo, é bem simples ver que se ν_1 e ν_2 são medidas com sinal e μ é uma medida positiva, tais que $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \ll \mu$, e z é uma constante complexa então valem as fórmulas (Cheque)

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} \text{ e}$$

$$\frac{d(z\nu_1)}{d\mu} = z\frac{d\nu_1}{d\mu}.$$

Temos também a importante *regra da cadeia (real)* a seguir.

Atenção. A seguir, o item (a) é um pouco mais geral que em Folland, p.91.

Proposição 3.2 (Regra da Cadeia, real). *Suponha que ν é uma medida com sinal σ-finita e que μ e λ são medidas positivas σ-finitas sobre $(X, \mathcal{M})$ tais que*

$$\nu \ll \mu \quad e \quad \mu \ll \lambda.$$

As seguintes propriedades são verdadeiras.

(a) A função $g \in L^1(\nu)$ se e somente se $g\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$, e então

$$\int g d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

(b) Temos $\nu \ll \lambda$ e

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \quad \lambda\text{-}q.s.$$

Logo, definindo as funções F e G por $d\nu = F d\mu$ e $d\mu = G d\lambda$, vale a associatividade

$$F\,(G d\lambda) = (FG)\, d\lambda \quad [e \text{ não há dubiedade em } FGd\lambda].$$

Prova.

Alerta. O Teorema de Radon-Nikodym (real) garante a identidade das medidas

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

e que para a integral de g com respeito a ν tem-se

$$\int g d\nu = \int g \left(\frac{d\nu}{d\mu} d\mu\right).$$

Mas, enfatizemos que não sabemos a priori que vale a associatividade

$$g\left(\frac{d\nu}{d\mu} d\mu\right) = \left(g\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu$$

ou mesmo que $g\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$. Ainda, não podemos imediatamente utilizar a agradável notação diferencial para medidas

$$g d\nu = g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

pois não definimos $gd\nu$ para g assumindo valores negativos e positivos e ν uma medida com sinal.

(a) Analisemos dois casos.

◇ O caso $g \geq 0$ e $\nu \geq 0$. Temos (por Lebesgue-Radon-Nikodym, real)

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\mu} d\mu, \text{ com a função real } \frac{d\nu}{d\mu} \geq 0.$$

Supondo $g = \chi_E$ para algum conjunto mensurável E, pela definição da identidade imediatamente acima [vide Observação 3.3] obtemos

$$\begin{aligned}\int \chi_E d\nu &= \nu(E) \\ &= \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \\ &= \int \left(\chi_E \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu.\end{aligned}$$

A linearidade e a convergência monótona das integrais encerram este caso. Vide também Exercício 14 2.2.

◇ O caso geral. Decompondo g em suas partes real e imaginária (se preciso), podemos supor $g : X \to [-\infty, \infty]$. Decompondo ν e g em suas partes positivas e negativas, notemos que $g \in L^1(\nu)$ se e somente se todas as integrais abaixo são finitas e satisfazem as identidades

$$\begin{aligned}\int g d\nu &= \int g d\nu^+ - \int g d\nu^- \\ &= \left(\int g^+ d\nu^+ - \int g^- d\nu^+\right) - \left(\int g^+ d\nu^- - \int g^- d\nu^-\right) \\ &= \int g^+ \frac{d\nu^+}{d\mu} d\mu - \int g^- \frac{d\nu^+}{d\mu} d\mu - \int g^+ \frac{d\nu^-}{d\mu} d\mu + \int g^- \frac{d\nu^-}{d\mu} d\mu \\ &= \int \left[g^+ \frac{d\nu^+}{d\mu} - g^- \frac{d\nu^+}{d\mu} - g^+ \frac{d\nu^-}{d\mu} + g^- \frac{d\nu^-}{d\mu}\right] d\mu \\ &= \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.\end{aligned}$$

A prova de (a) está completa.

A seguir, provamos (b).

(b) Como $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \lambda$, é claro que $\nu \ll \lambda$.

Quanto à segunda afirmação do item (b), já que X é σ-finito para ν, μ e λ, e a união contável de conjuntos de medida nula segundo λ é um conjunto de medida nula segundo λ, podemos supor $\nu(X)$, $\mu(X)$ e $\lambda(X)$ finitos (cheque).

Então, dado um arbitrário $E \in \mathcal{M}$ temos $\nu(E) < \infty$ e, pelas definições das funções reais [vide observação 3.3]

$$\frac{d\nu}{d\lambda} \quad \text{e} \quad \frac{d\nu}{d\mu}$$

e pelo item (a), obtemos

$$\int_E \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = \nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int \chi_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int \chi_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

O caso particular $E = X$ mostra [usando (a)] que

$$\frac{d\nu}{d\lambda} \quad \text{e} \quad \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \text{ são } \lambda - \text{integráveis.}$$

Gratos à pela Proposição 2.13(b) concluímos

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \quad \lambda\text{-q.s.}$$

A prova de (b) está completa.

O enunciado comentário final apenas parafraseia a identidade acima (cheque)♣

Corolário 3.2 *Se $\mu \ll \lambda$ e $\lambda \ll \mu$, então temos*

$$\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} = 1 \ \textit{q.s., com respeito a } \mu \textit{ ou a } \lambda.$$

Prova. Cheque.

Proposição 3.3 *Sejam $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas (positivas) sobre $(X, \mathcal{M})$. Então, existe uma medida (positiva) μ sobre $(X, \mathcal{M})$ com cada $\mu_j \ll \mu$. A saber,*

$$\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_n.$$

Prova. Cheque.

3.3 Medidas Complexas

Uma **medida complexa** sobre um espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ é uma aplicação

$$\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$$

que satisfaz

- $\nu(\emptyset) = 0$,
- $\nu\left(\dot{\bigcup\limits_{\mathbb{N}}} E_j\right) = \sum\limits_{\mathbb{N}} \nu(E_j)$, onde os $E_{j's}$ são disjuntos e mensuráveis.

Em particular, uma medida complexa não assume os valores $-\infty$ ou $+\infty$.

Assim,

$$\boxed{\text{uma medida positiva é uma medida complexa se e só se ela é finita.}}$$

Como exemplo trivial temos: se μ é uma medida positiva e $f \in L^1(\mu)$, então $fd\mu$ é uma medida complexa.

Se ν é uma medida complexa, escrevemos

$$\nu_r \ \text{ e } \ \nu_i \ \text{ para as } \textbf{partes real e imaginária} \text{ de } \nu.$$

Portanto, ν_r e ν_i são medidas com sinal que não assumem os valores $\pm\infty$ e são finitas. Logo,

$$\boxed{\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C} \text{ é limitada.}}$$

As noções que desenvolvemos para medidas com sinal generalizam-se facilmente a medidas complexas. Por exemplo, definimos

$$L^1(\nu) = L^1(\nu_r) \cap L^1(\nu_i) \ \text{ e}$$

$$\int f d\nu = \int f d\nu_r + i \int f d\nu_i, \ \text{ para } \ f \in L^1(\nu).$$

Se ν e λ são medidas complexas, dizemos que ν e λ são **mutuamente singulares** (ou que ν é singular com respeito a λ; ou que λ é singular com respeito a ν) se ν_r e ν_i são ambas singulares com respeito tanto a λ_r como a λ_i. Notação:

$$\nu \perp \lambda.$$

Neste caso, também existe uma partição $X = N \uplus \Lambda$ com a medida complexa ν concentrada em N e a medida complexa λ concentrada em Λ. Esquematicamente,

$$X \;=\; \begin{array}{lcclccl} \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdot & \cdots & \cdots & . \\ \vdots\,\bullet & \bullet & \bullet & \vdots\,\circ & \circ & \circ & \vdots \\ \vdots\,\bullet & N,\nu & \bullet & \vdots\,\circ & \Lambda,\lambda & \circ & \vdots \\ \vdots\,\bullet & \bullet & \bullet & \vdots\,\circ & \circ & \circ & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdot & \cdots & \cdots & .\,. \end{array}$$

Verifiquemos tal decomposição.

◇ Caso ν real. Particionamos

$$\begin{cases} X = N_1 \uplus \Lambda_r, \text{ com } \nu \text{ concentrada em } N_1 \text{ e } \lambda_r \text{ em } \Lambda_r, \\ \\ X = N_2 \uplus \Lambda_i, \text{ com } \nu \text{ concentrada em } N_2 \text{ e } \lambda_i \text{ em } \Lambda_i. \end{cases}$$

Obtemos a partição

$$X = (N_1 \cap N_2) \biguplus [(N_1 \cap \Lambda_i) \uplus (\Lambda_r \cap N_2) \uplus (\Lambda_r \cap \Lambda_i)],$$

com ν nula em $(N_1 \cap N_2)^c$ ao passo que λ é nula em $N_1 \cap N_2$.

◇ Caso ν complexa.

Nesta situação, ν_r e ν_i são reais e satisfazem

$$\nu_r \perp \lambda \;\text{ e }\; \nu_i \perp \lambda.$$

Assim, pelo caso anterior, particionamos

$$\begin{cases} X = N_r \uplus \Lambda_1, \text{ com } \nu_r \text{ concentrada em } N_r \text{ e } \lambda \text{ em } \Lambda_1, \\ \\ X = N_i \uplus \Lambda_2, \text{ com } \nu_i \text{ concentrada em } N_i \text{ e } \lambda \text{ em } \Lambda_2. \end{cases}$$

Obtemos a partição

$$X = (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \biguplus [(N_r \cap N_i) \uplus [(N_r \cap \Lambda_2) \uplus (\Lambda_1 \cap N_i)],$$

com ν nula em $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ enquanto λ é nula em $(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)^c$♣

Se μ é uma medida positiva, dizemos que uma medida complexa ν é **absolutamente contínua** em relação a μ se as medidas com sinal ν_r e ν_i são absolutamente contínuas em relação a μ. Notação:

$$\nu \ll \mu.$$

Os teoremas do parágrafo 3.2 se generalizam naturalmente a medidas complexas. Basta aplicá-los às partes real e imaginária da medida, separadamente.

Teorema 3.5 (Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym Complexo). *Sejam ν uma medida complexa (logo, finita) e μ uma medida positiva σ-finita sobre $(X,\mathcal{M})$. Existem uma medida complexa λ e uma $f : X \to \mathbb{C}$, em $L^1(\mu)$, tais que*

$$d\nu = d\lambda + f d\mu \quad e \quad \lambda \perp \mu.$$

Se também temos $d\nu = d\lambda' + f' d\mu$ e $\lambda' \perp \mu$, então ocorrem

$$\lambda' = \lambda \quad e \quad f' = f \;\; \mu - q.s.$$

Como mnemônico temos o diagrama (com $M \neq \mathcal{M}$)

$$X \;=\; \begin{array}{ccccccccc}
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & & \cdots & . \\
\vdots & \clubsuit & \clubsuit & \clubsuit & \vdots & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \vdots \\
\vdots & \clubsuit & \Lambda,\lambda & \clubsuit & \vdots & \diamondsuit & M,\mu & \diamondsuit & \vdots \\
\vdots & \clubsuit & \clubsuit & \clubsuit & \vdots & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \vdots \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & & \cdots & .
\end{array}$$

onde $X = \Lambda \cup M$, sendo λ concentrada em Λ e a medida μ (e $f d\mu$) em M.

Prova. Verifique (é trivial).

Como no caso real, se $\nu \ll \mu$ e, ainda, λ e f são como no Teorema 3.5 acima, então temos $\lambda \perp \mu$ e $\lambda \ll \mu$ e portanto $\lambda = 0$. Em suma, escrevemos

$$\boxed{f = \tfrac{d\nu}{d\mu}, \text{ se } \nu \ll \mu.}\,.$$

A **variação total** de uma medida complexa ν é a medida positiva $|\nu|$ determinada pela seguinte propriedade:

Se $d\nu = f d\mu$, onde μ é uma medida positiva, então $d|\nu| = |f| d\mu$.

Verifiquemos que esta definição "ex machina" é bem posta.

◇ Primeiro passo. Mostremos que toda medida complexa ν admite uma **representação** da forma

$$f d\mu$$

para alguma medida positiva finita μ e alguma $f \in L^1(\mu)$. De fato, escolhendo

$$\mu = |\nu_r| + |\nu_i|$$

é evidente que μ é uma medida positiva finita e satisfaz $\nu \ll \mu$. Então, utilizando o teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym complexo (Teorema 3.5), concluímos que existe uma função $f \in L^1(\mu)$ tal que $d\nu = f d\mu$

$$\left[\text{enfatizemos que } \ \nu(X) = \int f d\mu < \infty\right].$$

◇ Segundo passo. Suponhamos

$$\nu = f_1 d\mu_1 = f_2 d\mu_2, \text{ com } \ \mu_1 \text{ e } \mu_2 \text{ medidas positivas.}$$

Temos $\nu(X) < \infty$. Logo, f_j em $L^1(\mu_j)$ e $\nu \ll \mu_j$ para $j = 1$ e $j = 2$. Segue

$$f_1 = \frac{d\nu}{d\mu_1} \ \text{ e } \ f_2 = \frac{d\nu}{d\mu_2}.$$

Para $\rho = \mu_1 + \mu_2$, temos $\mu_j \ll \rho$. A regra da cadeia (associatividade) garante

$$f_j \frac{d\mu_j}{d\rho} d\rho = f_j d\mu_j = d\nu, \text{ para } j = 1 \text{ e } j = 2.$$

Logo,

$$f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho} = f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho} \quad \rho - \text{q.s.}$$

Visto que $\frac{d\mu_j}{d\rho}$ é uma função positiva, para $j = 1$ e $j = 2$, obtemos

$$|f_1| d\mu_1 = |f_1| \frac{d\mu_1}{d\rho} d\rho = \left| f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho} \right| d\rho = \left| f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho} \right| d\rho = |f_2| \frac{d\mu_2}{d\rho} d\rho = |f_2| d\mu_2.$$

Isto mostra que a definição de $|\nu|$ independe da escolha de μ e de f♣

Esta definição de $|\nu|$ não conflita com a prévia definição de $|\nu|$ [a recordar, $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$] para uma medida com sinal. De fato, se $X = P \cup N$ é a decomposição de Hahn para ν, é fácil verificar que

$$d\nu = (\chi_P - \chi_N)(d\nu^+ + d\nu^-), \quad \text{com } \ |\chi_P - \chi_N| = 1.$$

Logo, na nova definição também temos

$$d|\nu| = |\chi_P - \chi_N|(d\nu^+ + d\nu^-) = d\nu^+ + d\nu^-.$$

Proposição 3.4 (Propriedades da medida variação total). *Seja ν uma medida complexa sobre $(X, \mathcal{M})$. Vale o que segue.*

(a) $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$, *para todo conjunto mensurável* E
[desigualdade triangular para uma medida complexa].

(b) $\nu \ll |\nu|$, *e a função complexa* $\omega = \frac{d\nu}{d|\nu|}$ *tem valor absoluto* 1 $|\nu|$*-q.s.*

(c) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$, *e para todo função* $f \in L^1(\nu)$ *tem-se*

$$\left|\int f d\nu\right| \leq \int |f| d|\nu|$$

[desigualdade triangular para integrais em medidas complexas].

Prova.

Seja μ positiva com $d\nu = \varphi d\mu$ e $\varphi \in L^1(\mu)$. Logo, $d|\nu| = |\varphi| d\mu$ e $|\nu| \ll \mu$.

(a) Dado E, pela desigualdade triangular para integrais (Prop. 2.12) segue

$$|\nu(E)| = \left|\int_E \varphi d\mu\right| \leq \int_E |\varphi| d\mu = |\nu|(E).$$

(b) Temos $\nu_r + i\nu_i = \nu \ll |\nu| \ll \mu$. A regra da cadeia real [Proposição 3.2(b)] aplicada a ν_r e a ν_i acarreta

$$\varphi = \frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu_r}{d\mu} + i\frac{d\nu_i}{d\mu} = \left(\frac{d\nu_r}{d|\nu|} + i\frac{d\nu_i}{d|\nu|}\right)\frac{d|\nu|}{d\mu} = \omega|\varphi| \quad \mu\text{-q.s.}$$

Donde segue $\varphi = \omega|\varphi|$ $|\nu|$-q.s. É claro que $|\nu|\big(\{x : |\varphi(x)| = 0\}\big) = 0$ e portanto temos $|\varphi(x)| > 0$ $|\nu|$-q.s., o que garante a igualdade $|\omega| = 1$ $|\nu|$-q.s.

(c) Seja $f : X \to \mathbb{C}$ [ou $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$] mensurável. Formalmente temos

$$\int f d\nu = \int f d\nu_r + i\int f d\nu_i = \int f\frac{d\nu_r}{d\mu}d\mu + i\int f\frac{d\nu_i}{d\mu}d\mu = \int f\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$$
$$= \int f\varphi d\mu.$$

Pela regra da cadeia real [Proposição 3.2 (a)] segue

$$f \in L^1(\nu) \;\Leftrightarrow\; f\varphi \in L^1(\mu) \;\Leftrightarrow\; f|\varphi| = f\frac{d|\nu|}{d\mu} \in L^1(\mu) \;\Leftrightarrow\; f \in L^1(|\nu|).$$

Por (b) e pela Proposição 2.12 segue

$$\left|\int f d\nu\right| = \left|\int f\frac{d\nu}{d|\nu|}d|\nu|\right| \leq \int |f| d|\nu| \clubsuit$$

Proposição 3.5 (Propriedades do espaço normado das medidas complexas). *Sejam* ν, ν_1 *e* ν_2 *medidas complexas sobre* $(X, \mathcal{M})$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Então,*

(a) $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$.

(b) $|\lambda \nu_1| = |\lambda||\nu_1|$ *e, ainda,* $|\nu_1| = 0$ *se e só se* $\nu_1 = 0$.

(c) $|\nu_1 + \nu_2| = |\nu_1| + |\nu_2|$, *se* $\nu_1 \perp \nu_2$.

(d) $\max(|\nu_r|, |\nu_i|) \leq |\nu| \leq |\nu_r| + |\nu_i|$, *onde* $\nu_r = Re(\nu)$ *e* $\nu_i = Im(\nu)$.

Prova. O item (b) é trivial (cheque).

Como já comentado, podemos representar ν_1 em relação a alguma medida positiva finita. O mesmo vale para ν_2. Pela Proposição 3.3 podemos escrever $d\nu_1 = f_1 d\mu$ e $d\nu_2 = f_2 d\mu$ para uma mesma medida (positiva) μ e então

$$(\nu_1 + \nu_2) = (f_1 + f_2) d\mu.$$

(a) É claro que $d|\nu_1 + \nu_2| = |f_1 + f_2| d\mu \leq |f_1| d\mu + |f_2| d\mu = d|\nu_1| + d|\nu_2|$.

(c) Como já vimos, podemos particionar $X = N_1 \uplus N_2$ com a medida complexa ν_1 concentrada em N_1 e a medida complexa ν_2 concentrada em N_2.

$$X \;=\; \begin{array}{cccccccccc}
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\
\vdots \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \circ & \circ & \circ & \vdots \\
\vdots \bullet & N_1, \nu_1 & \bullet & \vdots \circ & N_2, \nu_2 & \circ & \vdots \\
\vdots \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \circ & \circ & \circ & \vdots \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdot\,\cdot
\end{array}$$

Donde, $d\nu_1 = \chi_{N_1} f_1 d\mu$ e $d\nu_2 = \chi_{N_2} f_2 d\mu$.

Podemos supor sem perda de generalidade $f_1|_{N_2} \equiv 0$ e $f_2|_{N_1} \equiv 0$. Logo,

$$|f_1 + f_2| = |f_1| + |f_2| \text{ em todo ponto.}$$

Pela definição de variação total concluímos que

$$d|\nu_1 + \nu_2| = |f_1 + f_2| d\mu = |f_1| d\mu + |f_2| d\mu = d|\nu_1| + d|\nu_2|.$$

(d) Seja $\mu = |\nu_r| + |\nu_i|$. Já vimos que existe $f \in L^1(\mu)$ tal que $d\nu = f d\mu$. Segue

$$|\nu| = |f| d\mu, \quad \text{e} \quad d\nu_r + i d\nu_i = \mathrm{Re}(f) d\mu + i \mathrm{Im}(f) d\mu.$$

Logo, por definição, $d|\nu_r| = |\mathrm{Re}(f)| d\mu \leq |f| d\mu = d|\nu|$ e $d|\nu_i| \leq |f| d\mu = d|\nu|$. Ainda mais, $d|\nu| = |f| d\mu \leq |\mathrm{Re} f| d\mu + |\mathrm{Im} f| d\mu = d|\nu_r| + d|\nu_i|$ ♣

3.4 Diferenciação em Espaços Euclidianos

O teorema de Radon-Nikodym (real) provê uma noção abstrata de "derivada" de uma medida com sinal ν com respeito a uma medida positiva μ. Nesta seção analisamos com maior profundidade o caso especial

$$(X,\mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \text{ e } \mu = m \text{ a medida de Lebesgue.}$$

Definimos a **derivada pontual** de ν com respeito a m da seguinte forma. Denotando por $B(x;r)$ a bola aberta de centro x e raio $r > 0$ consideremos, se existir, o limite

$$F(x) = \lim_{r\to 0}\frac{\nu\big(B(x;r)\big)}{m\big(B(x;r)\big)}.$$

Logo mais veremos que podemos trocar as bolas abertas por outros conjuntos que, adequadamente, encolham a x de uma forma regular.

Se $\nu \ll m$, e portanto $d\nu = f dm$, então

$$\frac{\nu\big(B(x;r)\big)}{m\big(B(x;r)\big)} = \frac{\int_{B(x;r)} f dm}{m\big(B(x;r)\big)}$$

é tão somente a média de f sobre $B(x;r)$. Assim, devemos esperar que

$$F(x) = f(x) \ m\text{-q.s.}$$

Efetivamente, isto é o que ocorre desde que $\nu\big(B(x;r)\big)$ seja finita para todo r e para todo x. Do ponto de vista da função f isto pode ser interpretado como uma generalização do teorema fundamental do cálculo:

a derivada da integral indefinida de f (a saber, ν) é f.

No restante desta seção termos como "integrável" e "quase sempre" referem-se à medida de Lebesgue a menos que especificado o contrário. Iniciemos com um lema técnico (uma versão simplificada de um lema de cobertura de Wiener) que tem grande importância por si próprio.

Lema 3.3 (Lema da Cobertura de Wiener - simplificada). *Seja $\mathcal{C}$ uma coleção qualquer de bolas abertas em $\mathbb{R}^n$ e $O = \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$. Dado $c < m(O)$, existem bolas disjuntas $B_1, \ldots, B_k$ em $\mathcal{C}$ tais que*

$$m(B_1) + \cdots + m(B_k) > \frac{c}{3^n}.$$

Prova.

Pelo Teorema 2.19(b) existe um compacto $K \subset O$ com $m(K) > c$ e uma quantidade finitas de bolas $A_1, \ldots, A_m$ em $\mathcal{C}$ e cobrindo K. Entre tais bolas, seja B_1 a de raio maior, B_2 a maior que é disjunta de B_1, B_3 a maior que é disjunta de B_1 e B_2 e assim por diante até que não exista mais nenhuma bola A_j disjunta de $B_1, \ldots, B_k$ (é óbvio que $k \le m$). Por construção, se a bola A_i não é nenhuma dos $B_{j's}$, então existe um j tal que $A_i \cap B_j \neq \varnothing$ e se j é o menor índice com tal propriedade, temos $A_i \cap B_1 = \varnothing, \ldots, A_i \cap B_{j-1} = \varnothing$ e portanto o raio de A_i não pode ser estritamente maior que o raio de B_j e é portanto menor ou igual a este último. Vemos então que $A_i \subset B_j^*$, onde B_j^* é a bola concêntrica com B_j e cujo raio é o triplo do de B_j.

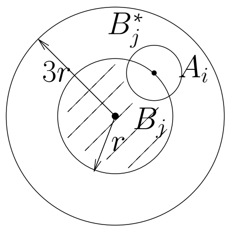


Figura 3.3: As bolas A_i, B_j e B_j^*.

Donde segue

$$K \subset B_1^* \cup \cdots \cup B_k^* \quad \text{e} \quad c < m(K) \le \sum_{j=1}^{k} m(B_j^*) = 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_j) \clubsuit$$

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é mensurável, f é **localmente integrável** (m-integrável) se

$$\int_K |f(x)| dx < \infty \text{ para todo } K \text{ mensurável e limitado em } \mathbb{R}^n.$$

Denotemos o espaço das funções localmente integráveis por

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ ou } L^1_{\text{loc}}.$$

Dada uma função $f \in L^1_{\text{loc}}$, um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e um raio $r > 0$, indicamos a média ("average" em inglês) de f em $B(x;r)$ por

$$A_r f(x) = \frac{1}{m\big(B(x;r)\big)} \int_{B(x;r)} f(y) dy.$$

Lema 3.4 (Continuidade da Média). *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Então, a função*

$$(r, x) \mapsto A_r f(x)$$

é contínua em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Prova.

Pelos resultados no 2.7 sabemos que $m\big(B(x;r)\big) = r^n c$, onde $c = m\big(B(0;1)\big)$, e $m\big(S(x;r)\big) = 0$ onde $S(x;r) = \{y : |y - x| = r\}$.

Ainda, se $r \to r_0$ e $x \to x_0$ então

$$\begin{cases} \chi_{B(x;r)} \to \chi_{B(x_0;r_0)} \ \text{ pontualmente sobre } \mathbb{R}^n \smallsetminus S(x_0; r_0), \\ \\ \chi_{B(x;r)} \to \chi_{B(x_0;r_0)} \ \text{ quase sempre,} \\ \\ 0 \le \chi_{B(x;r)} \le \chi_{B(x_0;r_0+2)} \ \text{ se } r < r_0 + 1 \text{ e } |x - x_0| < 1. \end{cases}$$

Assim, pelo teorema da convergência dominada concluímos que a função

$$(r, x) \mapsto \int_{B(x;r)} f(y)dy = \int \chi_{B(x;r)}(y) f(y) dy$$

é contínua, e assim também a função

$$(r, x) \mapsto A_r f(x) = \frac{1}{cr^n} \int_{B(x;r)} f(y)dy \clubsuit$$

Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, a sua **função maximal de Hardy-Littlewood** Hf é

$$Hf(x) = \sup_{r>0} A_r|f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m\big(B(x;r)\big)} \int_{B(x;r)} |f(y)|dy \quad \in \ [0, +\infty], \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n.$$

Visto que $A_r|f|$ é contínua, deduzimos que o conjunto

$$(Hf)^{-1}\big((a, \infty]\big) = \bigcup_{r>0} (A_r|f|)^{-1}\big((a, \infty)\big)$$

é aberto para todo $a \in \mathbb{R}$. Donde segue que a função $Hf : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável (pois os intervalos $(a, \infty]$ geram a σ-álgebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, dos borelianos na reta estendida, vide também Exercício 4 2.1).

A função Hf é uma avaliação do tamanho das médias de $|f|$ em torno de x. O operador H é bastante importante em *Análise Harmônica* e apesar de não ser linear, é **sub-linear** pois satisfaz

- $H(f+g) \leq Hf + Hg$.
- $H(\lambda f) = \lambda Hf$, para todo $\lambda \geq 0$.

Teorema 3.6 (Teorema Maximal de Hardy-Littlewood). *Existe uma constante $C > 0$ tal que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e para todo $\alpha > 0$, temos*

$$m\big(\{x : Hf(x) > \alpha\}\big) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f| dm.$$

Prova.

Seja $E_\alpha = \{x : Hf(x) > \alpha\}$. Para cada $x \in E_\alpha$ podemos escolher $r_x > 0$ tal que $A_{r_x}|f|(x) > \alpha$. As bolas abertas $B(x; r_x)$ cobrem E_α. Pelo lema de cobertura de Wiener simplificado [Lema 3.3], dado um número c satisfazendo

$$c < m(E_\alpha) \leq \sum_{x \in E_\alpha} m[B(x; r_x)],$$

existem $x_1, \ldots, x_k$ em E_α tais que as bolas $B_j = B(x_j; r_{x_j})$ são disjuntas e

$$\sum_{j=1}^{k} m(B_j) > \frac{c}{3^n}.$$

Donde segue (com $j = 1, \ldots, k$)

$$c < 3^n \sum_j m(B_j) \leq 3^n \sum_j \frac{1}{\alpha} \int_{B_j} |f| dm \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dm.$$

Impondo $c \to m(E_\alpha)^-$, obtemos o resultado desejado♣

O teorema maximal revela Hf finita q.s. (cheque), o que não é óbvio a priori.

Com tal teorema à disposição, apresentamos três sucessivas versões aprimoradas do teorema fundamental da diferenciação. Nas demonstrações utilizaremos os conceitos de limite superior para funções de uma variável real e a valores reais,

$$\limsup_{r \to R} \phi(r) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{0 < |r-R| < \epsilon} \phi(r) = \inf_{\epsilon > 0} \sup_{0 < |r-R| < \epsilon} \phi(r).$$

Pode ser facilmente verificado que (cheque, vide Exercício E1 Lista 1)

$$\lim_{r \to R} \phi(r) = c \quad \text{se e somente se} \quad \limsup_{r \to R} |\phi(r) - c| = 0.$$

Teorema 3.7 (Convergência Simples q.s. da Média). *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Então,*

$$\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x) \text{ q.s. para } x \in \mathbb{R}^n.$$

Prova. Seja $B(x;r) = B_r(x)$.

É fácil ver que o resultado é local e que podemos supor $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (cheque).

Dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema 2.20(b) existe uma função integrável e contínua g tal que $\|g - f\|_1 < \epsilon$. Cálculo básico mostra que $A_r g \to g$ pontualmente:

$$|A_r g(x) - g(x)| = \frac{1}{m\big(B_r(x)\big)}\left|\int_{B_r(x)} [g(y) - g(x)]dy\right| \le \sup_{y\in B_r(x)} |g(y) - g(x)| \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

Também temos [enfatizemos que $|A_r\phi| \le A_r|\phi| \le H\phi$ para todo ϕ em L^1_{loc}]

$$\begin{aligned} |A_r f(x) - f(x)| &\le |A_r(f-g)(x)| + |A_r g(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &\le \ H(f-g)(x) \ + |A_r g(x) - g(x)| + |g - f|(x), \end{aligned}$$

implicando em (vide comentário acima)

$$\limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| \le |g - f|(x) + H(f-g)(x).$$

A seguir, considerando

$$E_\alpha = \left\{x : \limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| > \alpha\right\} \quad \text{e} \quad F_\alpha = \{x : |f-g|(x) > \alpha\}$$

vemos que

$$E_\alpha \subset F_{\frac{\alpha}{2}} \bigcup \left\{x : H(f-g)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Porém,

$$\frac{\alpha}{2} m(F_{\frac{\alpha}{2}}) \le \int_{F_{\frac{\alpha}{2}}} |f(x) - g(x)|dx < \epsilon.$$

Logo, pelo teorema maximal de Hardy-Littlewood segue

$$m(E_\alpha) \le \frac{2\epsilon}{\alpha} + \frac{2C\epsilon}{\alpha}.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, obtemos $m(E_\alpha) = 0$ para todo $\alpha > 0$. Donde concluímos

$$\limsup_{r\to 0} A_r f(x) = f(x)$$

para todo $x \notin E_1 \cup E_{1/2} \cup E_{1/3} \cdots$, com

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}\right) = 0 \clubsuit$$

O teorema acima (3.7) pode ser reformulado como segue. Dada $f \in L^1_{\text{loc}}$ então

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m[B(x;r)]} \int_{B(x;r)} [f(y) - f(x)]dy = 0 \quad \text{q.s. em } x.$$

Na verdade, temos uma afirmação mais forte. A identidade imediatamente acima permanece válida se trocarmos o integrando por seu valor absoluto. Isto é, definamos o **conjunto de Lebesgue** de f como

$$L_f = \left\{ x : \lim_{r\to 0} \frac{1}{m[B(x;r)]} \int_{B(x;r)} |f(y) - f(x)|dy = 0 \right\}.$$

Teorema 3.8 *Consideremos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$m\big(\mathbb{R}^n \setminus L_f\big) = 0.$$

Prova.

Para cada $c \in \mathbb{C}$, aplicando o Teorema 3.7 à função $g_c(x) = |f(x) - c|$ concluímos que exceto para x em um conjunto E_c de medida nula temos a identidade

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m[B(x;r)]} \int_{B(x;r)} |f(y) - c|dy = |f(x) - c|.$$

Seja D um subconjunto enumerável e denso de $\mathbb{C}$ e seja

$$E = \bigcup_{c\in D} E_c.$$

Então $m(E) = 0$ e se $x \notin E$, por densidade segue que dado $\epsilon > 0$ existe $c \in D$ com $|f(x) - c| < \epsilon$. Logo, temos a desigualdade $|f(y) - f(x)| < |f(y) - c| + \epsilon$ a qual acarreta

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{m[B(x;r)]} \int_{B(x;r)} |f(y) - f(x)|dy \le |f(x) - c| + \epsilon < 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, tal $\limsup$ é 0 e o ponto x está em L_f. Logo,

$$\mathbb{R}^n \setminus L_f \subset E \clubsuit$$

Para completar, consideremos famílias de conjuntos mais gerais que as bolas. Doravante, diremos que uma família $\{E_r : r > 0\}$ de borelianos em $\mathbb{R}^n$ **contrai-se adequadamente** a um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ se

- $E_r \subset B(x;r)$ para cada r.
- Existe uma constante $\alpha > 0$, independente de r, tal que
$$\frac{m(E_r)}{m[B(x;r)]} > \alpha.$$

Enfatizemos que os conjuntos E_r não precisam conter o ponto x. Por exemplo, se U é um subconjunto boreliano de $B(0;1)$ tal que $m(U) > 0$ e definimos

$$E_r = \{x + ry : y \in U\} = x + rU,$$

então a família $\{E_r : r > 0\}$ satisfaz

$$\frac{m(E_r)}{m[B(x;r)]} = \frac{r^n m(U)}{r^n m[B(0;1)]}$$

e portanto contrai-se adequadamente a x, mas $x \notin E_r$.

Mostremos a seguir a versão final do teorema da diferenciação.

Teorema 3.9 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue). *Seja $f \in L^1_{loc}$. Para cada x no conjunto de Lebesgue de f (logo, para quase todo x) temos*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| dy = 0 \qquad e \qquad \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} f(y) dy = f(x),$$

para toda família $\{E_r : r > 0\}$ que contrai-se adequadamente a x.

Prova.

Graças às duas condições sobre $\{E_r\}$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| dy \le \frac{1}{\alpha m[B(x;r)]} \int_{B(x;r)} |f(y) - f(x)| dy.$$

A primeira identidade segue então da definição de conjunto de Lebesgue. A segunda segue da primeira, escrevendo

$$f(x) = \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} f(x) dy \text{ (cheque)} \clubsuit$$

A seguir, retornamos ao estudo de medidas.

Definição 3.1 *Seja ν uma* medida positiva de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ *(logo, o domínio de ν é a coleção dos borelianos de $\mathbb{R}^n$). Dizemos que ν é* **regular** *se*

(i) $\nu(K) < \infty$ *para todo compacto K.*

(ii) $\nu(E) = \inf\{\nu(O) : O$ *é aberto e* $E \subset O\}$, *para todo boreliano E de $\mathbb{R}^n$.*

Comentário. A condição (ii) é de fato uma consequência da condição (i). Se $n = 1$ e ν satisfaz (i), o Teorema 1.5 [correspondência entre funções crescentes contínuas à direita e medidas positivas de Borel finitas sobre limitados] mostra $\nu = \nu_F$ para alguma F crescente contínua à direita e o Teorema 1.6 [regularidade das medidas de Lebesgue-Stieltjes] mostra que ν_F satisfaz (ii). Vide o caso geral em 7.2 *Regularity and Approximation Theorems*, Folland, pp. 216–221.

Observemos que, por (i), toda medida positiva e regular é σ-finita.

Definição 3.2 *Seja ν uma* medida de Borel, com sinal ou complexa, sobre $\mathbb{R}^n$. *Dizemos que ν é* **regular** *se a medida (positiva) $|\nu|$ é regular.*

Toda medida de Borel regular (positiva, com sinal ou complexa) é σ-finita [cheque, é trivial]. Por exemplo, se $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$, a medida fdm é regular se e só se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. De fato, a condição $f \in L^1_{\text{loc}}$ claramente equivale à condição (i).

Quanto à condição (ii), neste caso particular constatemo-la diretamente.

Suponhamos que E é um boreliano limitado. Dado $\delta > 0$, pelo Teorema 2.19(a) existe um aberto limitado $U \supset E$ tal que $m(U) < m(E) + \delta$ e portanto $m(U \setminus E) < \delta$. Mas então, dado $\epsilon > 0$, pelo Corolário 3.1 [e o Teorema 2.19(a)] existe um aberto $O \supset E$ tal que

$$\int_{O \setminus E} f dm < \epsilon$$

e portanto

$$\int_E f dm \le \int_O f dm < \int_E f dm + \epsilon.$$

O caso E ilimitado segue facilmente se escrevermos $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots$, com cada E_j limitado, e escolhendo abertos $O_j \supset E_j$ tais que

$$\int_{O_j \setminus E_j} f dm < \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Teorema 3.10 (Derivada (relativa) de uma medida regular com respeito a m). *Seja ν uma medida regular, com sinal ou Borel complexa, sobre $\mathbb{R}^n$. Consideremos*

$$d\nu = d\lambda + f dm$$

sua representação de Lebesgue-Radon-Nikodym. Para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(E_r)}{m(E_r)} = f(x),$$

qualquer que seja a família $\{E_r : r > 0\}$ que contrai-se adequadamente a x.

Prova.

◇ Verifiquemos a identidade $d|\nu| = d|\lambda| + |f|dm$.

Preparação. Como ν é regular, pelo comentário acima ν é σ-finita. Obviamente, m é σ-finita. Então, conforme ν seja uma medida com sinal ou uma medida complexa, aplicando o Teorema 3.4 (Lebesgue-Radon-Nikodym real) ou o Teorema 3.5 (Lebesgue-Radon-Nikodym complexo) decompomos $d\nu = d\lambda + f dm$, com $\lambda \perp m$. Se ν é medida com sinal então λ é σ-finita e a função f é Lebesgue quase-integrável. Se ν é medida complexa então λ é complexa e a função f é Lebesgue integrável. Em ambos os casos, todas as medidas envolvidas são σ-finitas (incluindo $f dm$). Assim, basta mostrar a identidade desejada sobre um boreliano qualquer de medida finita segundo ν, λ e m (cheque). Isto é, podemos supor que ν é uma medida complexa (pois toda medida com sinal e finita é uma medida complexa).

Neste cenário, $\lambda \perp m$ acarreta $\lambda \perp f dm$. Propriedades de norma para medidas complexas [Proposição 3.5(b)] e a definição de variação total implicam

$$|\nu| = |\lambda + f dm| = |\lambda| + |f dm| \quad \text{e} \quad |f dm| = |f| dm.$$

◇ Verificada tal identidade, a regularidade de ν implica $|\nu|$ regular, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $f dm$ regular e λ regular (vide comentários prévios e/ou Exercício 26 3.4).

Logo, para provar o teorema, graças ao Teorema 3.9 (Diferenciação de Lebesgue) basta verificarmos que se λ é regular e $\lambda \perp m$ então

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)} = 0, \quad m\text{-q.s. para } x \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

onde $\{E_r\}_{r>0}$ é uma família arbitrária que contrai-se adequadamente a x.

Verifiquemos. Basta supor $E_r = B(x;r)$ e λ positiva pois, para algum $\alpha > 0$,

$$\left|\frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)}\right| \le \frac{|\lambda|(E_r)}{m(E_r)} \le \frac{|\lambda|[B(x;r)]}{\alpha m[B(x;r)]}.$$

◇ Afirmação. É válido que

$$\frac{\lambda[B(x;r)]}{m[B(x;r)]} \xrightarrow{r\to 0} 0 \text{ para quase todo ponto } x \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Suponhamos $\lambda \ge 0$. Devido à hipótese $\lambda \perp m$, existe um boreliano A com

$$\lambda(A) = m(A^c) = 0.$$

Consideremos os seguintes subconjuntos de A,

$$A_k = \left\{x \in A : \limsup_{r\to 0} \frac{\lambda[B(x;r)]}{m[B(x;r)]} > \frac{1}{k}\right\}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots.$$

É fácil ver que para provar a afirmação acima basta checar que $m(A_k) = 0$.

O argumento é similar àquele na prova do teorema maximal de Hardy-Littlewood (3.6). Pela regularidade de λ, dado $\epsilon > 0$ existe um aberto $O_\epsilon \supset A$ com $\lambda(O_\epsilon) < \epsilon$. Cada $x \in A_k$ é centro de uma bola $B_x \subset O_\epsilon$ tal que

$$\lambda(B_x) > \frac{m(B_x)}{k}.$$

Mas então, pelo Lema 3.3 de Cobertura (de Wiener), considerando a reunião de bolas $V_\epsilon = \bigcup_{x\in A_k} B_x$ [enfatizemos que $A_k \subset V_\epsilon \subset O_\epsilon$] e um número arbitrário $c < m(V_\epsilon)$, temos que existe uma quantidade finita de pontos $x_1, \dots, x_J$ tal que as bolas $B_{x_1}, \dots, B_{x_J}$ são disjuntas e, ainda,

$$c < 3^n \sum_{j=1}^{J} m(B_{x_j}) \le 3^n k \sum_{j=1}^{J} \lambda(B_{x_j}) \le 3^n k \lambda(V_\epsilon) \le 3^n k \lambda(O_\epsilon) \le 3^n k \epsilon.$$

Impondo $c \to m(V_\epsilon)^-$, obtemos $m(V_\epsilon) \le 3^n k\epsilon$.

Finalmente, notando que $A_k \subset V_\epsilon$ e $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$m(A_k) = 0 \clubsuit$$

3.5 Funções de Variação Limitada

Apesar de não ser estritamente necessário nesta seção, para evitar argumentações não muito elegantes ou até sofisticadas é útil apresentarmos a importante desigualdade do valor médio (com uma demonstração bem elementar). Algumas provas assumem que a derivada é integrável (no sentido de Riemann).

Desigualdade do Valor Médio. Seja $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que F é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e satisfazendo $|F'| \leq M$. Então,

$$\textbf{(DVM)} \qquad\qquad |F(b) - F(a)| \leq M|b-a|.$$

Prova. Podemos supor $a = 0$ e $b = 1$ (cheque, é útil)

Escrevamos $F(t) = x(t) + iy(t)$ e definamos

$$G(t) = [x(1) - x(0)]x(t) + [y(1) - y(0)]y(t).$$

Pelo TVM para funções a valores reais temos

$$G(1) - G(0) = G'(\tau)$$

Logo,

$$|x(1) - x(0)|^2 + |y(1) - y(0)|^2 = [x(1) - x(0)]x'(\tau) + [y(1) - y(0)]y'(\tau)$$

e então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^2$,

$$|F(1) - F(0)|^2 \leq |F(1) - F(0)|\,|F'(\tau)|\clubsuit$$

Os teoremas da seção precedente se aplicam em particular na reta real. De fato, devido à correspondência entre medidas de Borel regulares e funções crescentes que estabelecemos em 1.5, na reta tais teoremas conduzem a resultados sobre diferenciação e integração de funções. Como em 1.5, no caso em que F é uma função sobre $\mathbb{R}$ que é crescente e contínua à direita, adotamos a notação μ_F para a medida de Borel determinada pela relação

$$\boxed{\mu_F\Big((a,b]\Big) = F(b) - F(a).}$$

Ainda, ao longo desta seção os termos "quase sempre" e "q.s." referem-se tão somente à medida de Lebesgue.

Nosso primeiro resultado utiliza o teorema da diferenciação de Lebesgue para provar a diferenciabilidade q.s. das funções crescentes.

Teorema 3.11 (Continuidade e Diferenciabilidade das Funções Monótonas). *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e seja $G(x) = F(x+)$.*

(a) O conjunto dos pontos nos quais F é descontínua é enumerável.

(b) G é crescente, contínua à direita e $G = F$ nos pontos de continuidade de F.

(c) F e G são diferenciáveis q.s. e

$$F' = G' \text{ q.s.}$$

Prova.

(a) Seja $N \in \mathbb{N}$. Sendo F crescente, a coleção $\{\big(F(x-), F(x+)\big) : x \in (-N, N)\}$ é formada por intervalos, abertos e disjuntos, contidos em $\big(F(-N), F(N)\big)$. Donde segue (com a definição de soma para uma família de positivos)

$$\sum_{x \in (-N,N)} [F(x+) - F(x-)] \le F(N) - F(-N) < \infty.$$

Portanto, $\{x \in (-N, N) : F(x+) - F(x-) > 0\}$ é enumerável para todo N em $\mathbb{N}$. Logo, o conjunto dos pontos de descontinuidade de F em $\mathbb{R}$ é enumerável.

(b) Trivial. Cheque (em particular, a continuidade à direita de G).

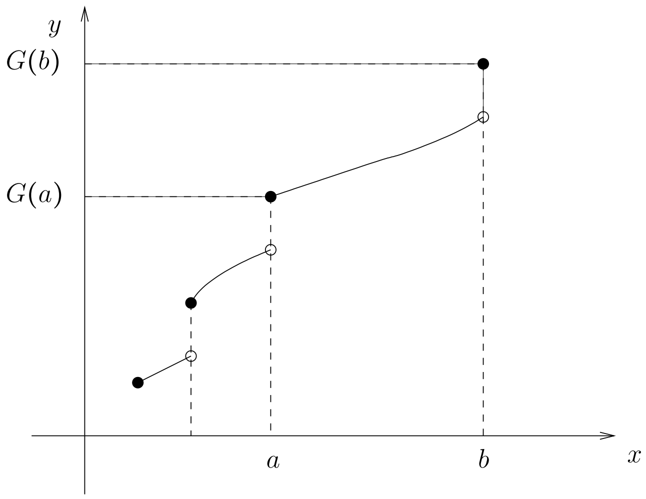


Figura 3.4: Um exemplo de G crescente e contínua à direita

(c) Também temos $G \geq F$ em todo ponto. Pela correspondência entre medidas de Borel e funções crescentes e contínuas à direita (Teorema 1.5) segue

$$G(x+h) - G(x) = \begin{cases} \mu_G\big((x, x+h]\big), & \text{se } h > 0, \\ -\mu_G\big((x+h, x]\big), & \text{se } h < 0, \end{cases}$$

sendo que as famílias $\{(x, x+h]\}$ e $\{(x+h, x]\}$ contraem-se adequadamente a x [com "$\alpha = 1/2$"] conforme $h \to 0^+$ ou $h \to 0^-$, respectivamente [cheque].

A medida μ_G é regular pelo Teorema 1.6 (propriedades de regularidade). Pelo Teorema 3.10 (derivada de uma medida regular com respeito a m) vemos que em quase todos os pontos existem e são iguais os limites laterais

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mu_G\big((x, x+h]\big)}{m\big((x, x+h]\big)} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{\mu_G\big((x+h, x]\big)}{m\big((x+h, x]\big)}.$$

Segue então a existência de [cheque]

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = G'(x) \text{ em quase todo ponto.}$$

Para completar esta prova, resta ver que $H = G - F$ satisfaz $H' = 0$ q.s.

Como $G = F$ exceto em um conjunto contável, temos $H = 0$ exceto um conjunto contável (finito ou infinito) $\{x_j\}_J$.

É trivial ver que $H(x_j) > 0$. Segue

$$\text{(TEO 3.11.1)} \quad \begin{aligned} 0 &< \sum_{|x_j| < N} H(x_j) \\ &= \sum_{|x_j| < N} [F(x_j+) - F(x_j)] \\ &\leq \sum_{|x_j| < N} [F(x_j+) - F(x_j-)] < \infty \text{ para todo } N. \end{aligned}$$

Sejam δ_j a medida de Dirac em x_j [isto é, a medida ponto de massa em x_j dada por $\delta_j(E) = 1$ se $x_j \in E$ e $\delta_j(E) = 0$ se $x_j \notin E$] e a medida de Borel (pois definida sobre borelianos)

$$\mu = \sum H(x_j)\delta_j \quad \text{(seja tal soma infinita ou não).}$$

Graças à desigualdade (TEO 3.11.1), temos que μ é finita em compactos (cheque). Então, pela correspondência entre medidas de Borel e funções crescentes e contínuas à direita (Teorema 1.5) e propriedades de regularidade das medidas de Borel (Teorema 1.6), segue que a medida μ é regular.

Ainda mais, temos

$$\mu \perp m$$

pois μ está concentrada em $\{x_j\}_J$ e $m(\{x_j\}_J) = 0$. Neste caso,

$$d\mu = d\mu + 0dm$$

é a decomposição de Lebesgue-Radon-Nikodym real de μ (Teorema 3.4). Então, o Teorema 3.10 (derivada de uma medida regular com respeito a m) garante [pois H é nula no complementar de $\{x_j\}_J$]

$$\left|\frac{H(x+h)-H(x)}{h}\right| \leq \frac{H(x+h)+H(x)}{|h|} \leq 4\frac{\mu[(x-2|h|,x+2|h|)]}{m[(x-2|h|,x+2|h|)]} \xrightarrow{h\to 0} 0 \text{ q.s.}$$

Isto mostra que $H' = 0$ q.s., donde segue $F' = G'$ q.s.. Fim da prova♣

A grosso modo, podemos dizer que

$$\begin{cases} \textit{medidas positivas sobre } \mathbb{R} \textit{ estão relacionadas a funções crescentes} \\ \text{e} \\ \textit{medidas complexas sobre } \mathbb{R} \textit{ estão relacionadas a } \textsf{funções de variação limitada}. \end{cases}$$

A definição deste último conceito (funções de variação limitada) é um pouco técnica. Vejamos alguma motivação.

Intuitivamente, se $F(t)$ representa a posição de uma partícula que se move ao longo da reta real no instante t, a "variação total de F" sobre o intervalo $[a,b]$ é a distância total percorrida desde o instante a até o instante b. Se F tem derivada contínua, tal distância é exatamente a integral da velocidade

$$\int_a^b |F't)|dt.$$

Entretanto, definir a variação total sem assumir alguma hipótese de suavidade sobre F requer uma abordagem diferente. A saber, particionamos o intervalo $[a,b]$ em sub-intervalos $[t_{j-1},t_j]$ e aproximamos F sobre cada sub-intervalo por uma função linear cujo gráfico une os pontos

$$(t_{j-1},F(t_{j-1})) \ \text{ e } \ (t_j,F(t_j))$$

e então computamos o limite.

Para precisar tal abordagem, introduzamos um ponto de vista levemente diferente, com $a = -\infty$ e considerando a variação total como uma função de b.

Para sermos bem claros, dada uma **função de uma variável real e a valores complexos** $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e um número real x definimos a função

$$T_F(x) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| : n \in \mathbb{N} \text{ e } -\infty < x_0 < \cdots < x_n = x \right\}.$$

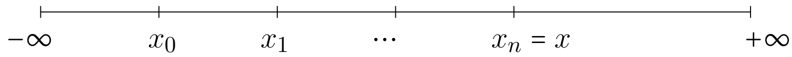


Figura 3.5: A partição $\{x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x\}$ de $[x_0, x]$.

Dizemos que

$$\boxed{T_F : \mathbb{R} \to [0, \infty] \text{ é a } \textbf{função variação total} \text{ de } F.}$$

Dado $a < b$, não é difícil constatar a identidade

(3.12.1) $$T_F(b) = T_F(a) + \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| : n \in \mathbb{N},\ a = x_0 < \cdots < x_n = b \right\}.$$

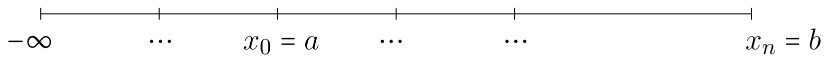


Figura 3.6: A partição $\{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$ de $[a, b]$.

A desigualdade $\geq$ é trivial. Para a desigualdade $\leq$, o somatório relativo uma partição $\{x_0 < \cdots < x_n = b\}$ cresce ao incluir o ponto a na partição. Cheque ambas.

Assim, T_F é crescente.

Dizemos que

$$\boxed{F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ é de } \textbf{variação limitada sobre } \mathbb{R} \text{ se } T_F(\infty) = \lim_{x \to \infty} T_F(x) \text{ é finito.}}$$

Seja BV ("bounded variation"), o espaço vetorial complexo das funções de variação limitada. Isto é,

$$\boxed{BV = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ tal que } F \text{ é de variação limitada}\}.}$$

Mais geralmente, o supremo explicitado no lado direito da identidade (3.12.1) é chamado de **variação total** de F em $[a, b]$ e é denotado

$$V_a^b(F).$$

Em particular, as funções constantes pertencem ao espaço linear BV. Logo,

$$\mathbb{C} \text{ é subespaço de } BV, \text{ com } T_\lambda \equiv 0 \text{ para toda constante } \lambda \in \mathbb{C}.$$

A variação total depende apenas dos valores de F em $[a,b]$ e podemos definir

$$\boxed{BV\big([a,b]\big) = \Big\{f : [a,b] \to \mathbb{C} \ tal\ que\ V_a^b(f) < \infty\Big\}.}$$

Dada $F \in BV$, a restrição de F a $[a,b]$ está em $BV([a,b])$ e vale a fórmula

$$\boxed{V_a^b(F) = T_F(b) - T_F(a).}$$

Inversamente, dada $F \in BV([a,b])$ e definindo a extensão

$$F(x) = \begin{cases} F(a) \text{ para } x < a, \\ \\ F(b) \text{ para } x > b, \end{cases}$$

segue que $F \in BV$.

A figura abaixo ilustra tal extensão.

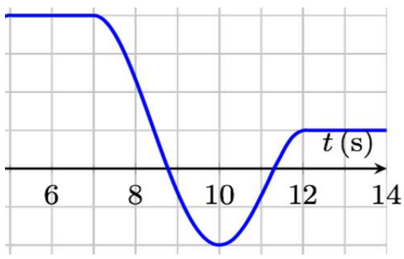


Figura 3.7: Uma função real em $BV\big([7,12]\big)$ estendida a uma função em BV.

Graças a tal artifício, os resultados que veremos para BV são aplicáveis a

$$BV([a,b]).$$

Observemos que se F é de variação limitada, então F é limitada.

A seguir apresentamos algumas (seis no total) observações e exemplos, todas triviais e elucidativas. Solicitamos ao leitor efetuar as necessárias verificações.

Exemplos 3.1 *Abaixo, F e G designam funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. Ainda, a e b são números reais com $a < b$.*

(a) *Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente e limitada, então $F \in BV$. Ainda,*

$$T_F(x) = F(x) - F(-\infty).$$

(b) *BV é um espaço vetorial complexo.*

(c) *Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é diferenciável e F' é limitada, então $F \in BV([a,b])$.*

(d) *Se $F(x) = \sin x$, então $F \in BV([a,b])$ mas $F \notin BV$.*

(e) *A função (par)*

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & se\ x \neq 0, \\ 0, & se\ x = 0, \end{cases}$$

é contínua mas não pertence a $BV([0,b])$ nem a $BV([a,0])$, onde $a < 0 < b$.

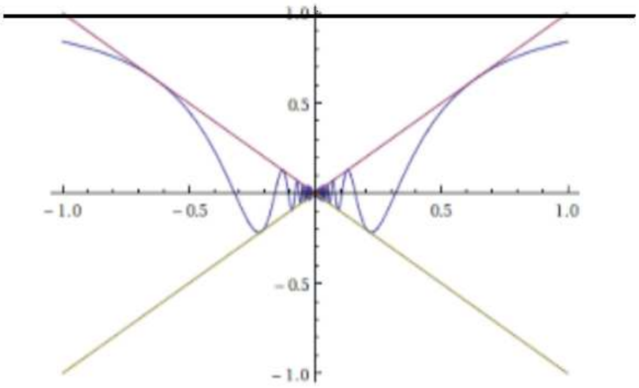


Figura 3.8: O gráfico de $F(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, com $F(0) = 0$ e $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

(f) *Se F é integrável, a função*

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)dt$$

é de variação limitada.

Quanto a verificar tais exemplos, exceto (f), vide também Exercício 27 3.5.

Lema 3.5 (Decomposição de Jordan em BV). *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *em* BV. *Então,*

$$TF + F \quad e \quad TF - F \quad \textit{são crescentes.}$$

Prova.

Dado $x < y$ e $\epsilon > 0$, por definição de sup existem $x_0 < \cdots < x_n = x$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq TF(x) - \epsilon.$$

Então (vide representação gráfica abaixo)

$$\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(y) - F(x)|$$

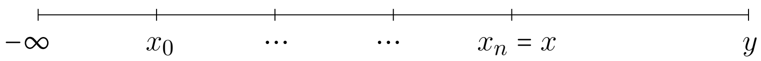


Figura 3.9: A partição $\{x_0 = a < \cdots < x_n = x\} \cup \{y\}$ de $[a, y]$.

é uma soma aproximada para $T_F(y)$ e temos

$$F(y) = [F(y) - F(x)] + F(x).$$

Donde segue

$$\begin{aligned} T_F(y) \pm F(y) \quad &\geq \sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \\ &\quad + |F(y) - F(x)| \pm [F(y) - F(x)] \pm F(x) \\ &\geq T_F(x) - \epsilon + 0 \pm F(x). \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\begin{cases} T_F(y) + F(y) \geq T_F(x) + F(x), \\ T_F(y) - F(y) \geq T_F(x) - F(x) \clubsuit \end{cases}$$

Mantida a notação acima, a representação

$$F = \frac{T_F + F}{2} - \frac{T_F - F}{2}$$

é a **decomposição de Jordan** de F, e

$$\frac{T_F + F}{2} \quad \text{e} \quad \frac{T_F - F}{2}$$

são a **variação positiva** e a **variação negativa** de F, respectivamente.

Teorema 3.12 (Propriedades de BV). *Dada $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, vale o que segue.*

(a) $F \in BV$ *se e somente se* $Re(F) \in BV$ *e* $Im(F) \in BV$.

(b) *Se* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *então* $F \in BV$ *se e somente se* F *é a diferença de duas funções crescentes e limitadas. Nestes casos tais funções podem ser tomadas como*

$$\frac{T_F + F}{2} \quad e \quad \frac{T_F - F}{2}.$$

(c) *Se* $F \in BV$ *e* x *é um número real, então existem*

$$F(x+) = \lim_{y \searrow x} F(y), \quad F(x-) = \lim_{y \nearrow x} F(y) \quad e \quad F(\pm\infty) = \lim_{y \to \pm\infty} F(y).$$

(d) *Se* $F \in BV$, *o conjunto dos pontos de descontinuidade de* F *é enumerável.*

(e) *Se* $F \in BV$ *e* $G(x) = F(x+)$, *então* F' *e* G' *existem e são iguais q.s.*

(f) *Se* $F \in BV([a,b])$ *e um ponto* $c \in (a,b)$, *então a variação total de* F *no intervalo* $[a,b]$ *é a soma das variações totais de* F *em* $[a,c]$ *e* $[c,b]$.

(g) *Se* $F \in BV$, *então* $T_F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pertence a* BV.

Prova.

(a) Trivial.

(b) ($\Leftarrow$) Segue dos Exemplos 3.1(a) e 3.1(b).

($\Rightarrow$) Como $F \in BV$, segue que T_F é limitada e também que F é limitada. Então, pelo Lema 3.5 a equação

$$F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F)$$

expressa F como diferença de funções crescentes, e limitadas.

(c) Segue de (a) e (b).

(d) Segue de (a), (b) e propriedades de continuidade e diferenciabilidade das monótonas [Teorema 3.11(a)].

(e) Segue de (a), (b) e da propriedade Teorema 3.11(c).

(f) Basta notar que $T_F(b) - T_F(a) = [T_F(b) - T_F(c)] + [T_F(c) - T_F(a)]$.

(g) Segue de (b), notando que T_F é crescente e também limitada (pois $F \in BV$)♣

Comentário (dispensável em uma primeira leitura).

Consideremos $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $F\in BV$, e sua representação de Jordan

$$F=\frac{T_F+F}{2}-\frac{T_F-F}{2}.$$

Sejam a, b e c números reais. A seguir, utilizaremos as relações (cheque)

$$\begin{cases} a^+\leq a^++b^+,\ (a+b)^+\leq a^++b^+,\\ a^-\leq a^-+b^-,\ (a+b)^-\leq a^-+b^-,\end{cases}\qquad c^+=\frac{|c|+c}{2}\quad \text{e}\quad c^-=\frac{|c|-c}{2}.$$

Seja $x\in\mathbb{R}$. Temos [cheque, use as relações acima na primeira e essencial igualdade abaixo (as desigualdades mostram que o primeiro sup minora o segundo enquanto as igualdades permitem mostrar que o segundo sup minora o primeiro)]

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}[F(x_j)-F(x_{j-1})]^{\pm}:\,-\infty<x_0<\cdots<x_n=x\right\}$$

$$=\sup\left\{\sum_{k=1}^{m}[F(t_k)-F(t_{k-1})]^{\pm}:\,-\infty=t_0<\cdots<t_m=x\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{k=1}^{m}|F(t_k)-F(t_{k-1})|\pm\sum_{k=1}^{m}[F(t_k)-F(t_{k-1})]:\,-\infty=t_0<\cdots<t_m=x\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{k=1}^{m}|F(t_k)-F(t_{k-1})|:\,-\infty=t_0<\cdots<t_m=x\right\}\pm\frac{F(x)-F(-\infty)}{2}$$
$$=\frac{(T_F\pm F)(x)}{2}\mp\frac{F(-\infty)}{2}.$$

Donde concluímos as identidades (com x_0 podendo assumir $-\infty$ ou não)

$$\boxed{\tfrac{1}{2}(T_F\pm F)(x)\ =\ \sup\left\{\sum_{j=1}^{n}[F(x_j)-F(x_{j-1})]^{\pm}:x_0<\cdots<x_n=x\right\}\ \pm\ \tfrac{1}{2}F(-\infty)\clubsuit}$$

Exemplos com funções oscilatórias para ilustrar o conceito *função de variação limitada* são importantes. Vejamos mais dois.

Exemplo 3.2 Verifique que a função ímpar

$$F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \ \text{ e } \ F(0) = 0 \qquad \left\{\text{cheque } \lim_{x\to+\infty}[x - F(x)] = 0^+\right\},$$

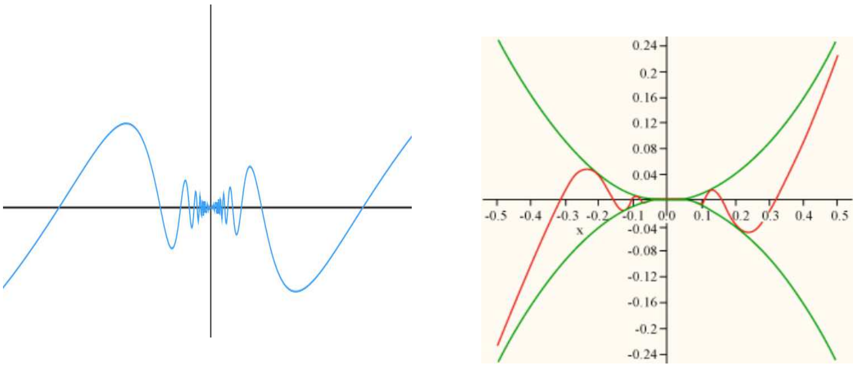


Figura 3.10: O gráfico de $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, com $F(0) = 0$.

com reta assíntota $y = x$ no infinito, está em

$$BV\left(\left[0, \frac{2}{\pi}\right]\right) \quad \text{mas} \quad F \notin BV.$$

Mostre que F atende as condições no Exemplo 3.1 (c), com F' limitada mas não contínua na origem. Assim, F é de variação limitada em $[0, 2/\pi]$ contrariamente à função $x\sin(1/x)$, definida nula na origem. Vide Exemplo 3.1 (e)♣

Exemplo 3.3 Verifique que a função **seno cardinal**

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{se } t \neq 0, \\ 1, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

pertence a $BV([-N, N])$, para todo $N > 0$, mas não pertence a $BV(\mathbb{R})$.

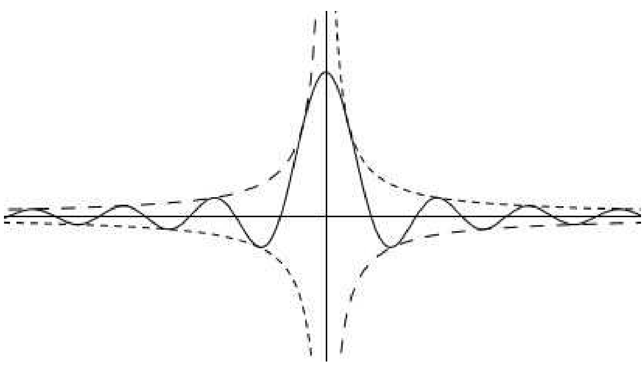


Figura 3.11: O gráfico do seno cardinal.

As propriedades enunciadas em Teorema 3.12(a,b) apontam uma conexão entre funções de variação limitada e a valores complexos e medidas complexas de Borel sobre $\mathbb{R}$ (i.e., definida nos borelianos da reta). Vejamos.

Definamos o **espaço vetorial complexo** NBV ("N" para normalizada):

$$\boxed{NBV = \{F \in BV : F \text{ é contínua à direita e } F(-\infty) = 0\}.}$$

Assim, NBV é o espaço das **funções de variação limitada normalizadas**.

Consideremos uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ arbitrária em BV. As propriedades em Teorema 3.12(a,b) garantem que a função

$$x \mapsto G(x) = F(x+) - F(-\infty)$$

pertence a BV. Melhor ainda,

$$\boxed{G \in NBV.}$$

Ainda mais, pela propriedade Teorema 3.12(e), a função G é derivável e satisfaz

$$G' = F' \text{ q.s.}$$

Suponhamos que tal F (uma função de variação limitada) é real e satisfaz

$$F = F_1 - F_2, \text{ com } F_1 \text{ e } F_2 \text{ crescentes.}$$

Neste caso obtemos

$$G(x) = F_1(x+) - [F_2(x+) + F(-\infty)],$$

que, além das propriedades já citadas, é uma diferença de duas funções crescentes.

A seguir, apresentamos algumas propriedades da variação total T_F, e das variações positiva e negativa

$$\frac{T_F + F}{2} \text{ e } \frac{T_F - F}{2},$$

para funções de variação limitada (i.e., pertencentes a BV).

Lema 3.6 (Propriedades das Variações de F). *Seja* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *em* BV.

(a) $T_F(-\infty)=0$.

(b) Se F *é contínua à direita/esquerda então* T_F *é contínua à direita/esquerda.*

(c) Se F *é real contínua,* $\frac{T_F+F}{2}$ *e* $\frac{T_F-F}{2}$ *são contínuas, crescentes e limitadas.*

(d) Se $F\in NBV$, *então* $T_F\in NBV$.

Prova.

(a) Dado $\epsilon>0$ e $x\in\mathbb{R}$, existe $-\infty<x_0<\ldots<x_n=x$ tal que

$$T_F(x)-\epsilon<\sum_{j=1}^{n}|F(x_j)-F(x_{j-1})|\leq V_{x_0}^{x}(F)=T_F(x)-T_F(x_0)$$

Donde segue, $T_F(x_0)<\epsilon$ e $T(-\infty)=0$ pois T_F é crescente e positiva.

(b) Caso F contínua à esquerda em x. Dado $\epsilon>0$ existe uma partição

$$x_0<\cdots<x_{n-1}<x_n=x \ \text{ tal que } \ T_F(x)-\epsilon<\sum|F(x_j)-F(x_{j-1}|.$$

Dado $\xi\in(x_{n-1},x)$, a desigualdade triangular e a definição de $T_F(\xi)$ mostram

$$\sum|F(x_j)-F(x_{j-1}|\leq T_F(\xi)+|F(x)-F(\xi)| \quad [\text{cheque}].$$

Segue $0\leq T_F(x)-T_F(\xi)\leq\epsilon+|F(x)-F(\xi)|$. Logo, T_F é contínua à esquerda.

Caso F contínua à direita em x. Dado $\epsilon>0$ existe uma partição [cheque]

$$x_0<\cdots<x_i=x<x_{i+1}<\cdots<x_n=x+1 \ \text{ com } \ T_F(x+1)-\epsilon<\sum|F(x_j)-F(x_{j-1}|.$$

Considere $\eta\in(x,x_{i+1})=(x_i,x_{i+1})$ e complete este caso.

(c) Segue de (b) e da decomposição de Jordan de F (Lema 3.5).

(d) Pela propriedade Teorema 3.12 (g), $T_F\in BV$. Encerre com (a) e (b)♣

Seja $f\in L^1(\mathbb{R})$. Então,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt \ \text{ é contínua, } \ F\in NBV \ \text{ e } \ T_F\leq\|f\|_1 \ (\text{cheque}).$$

Teorema 3.13 (Correspondência entre Medidas de Borel Complexas e NBV). *Consideremos o espaço das medidas de Borel complexas sobre* $\mathbb{R}$ *e o espaço* NBV.

(a) *Se* μ *é uma medida de Borel complexa sobre* $\mathbb{R}$*, então*

$$F(x) = \mu\big((-\infty, x]\big) \text{ é uma função em } NBV.$$

(b) *Inversamente, dada* $F \in NBV$ *existe uma única medida de Borel complexa* μ_F*, sobre* $\mathbb{R}$*, tal que* $F(x) = \mu_F\big((-\infty, x]\big)$*. Ainda mais,*

$$|\mu_F| = \mu_{T_F}.$$

Prova.

(a) Decompondo $\mu = (\mu_1^+ - \mu_1^-) + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$, onde $\mu_j^\pm$ são medidas positivas finitas, definimos

$$F_j^\pm(x) = \mu_j^\pm\big((-\infty, x]\big).$$

Evidentemente as funções $F_j^\pm$ são positivas, crescentes e limitadas. Utilizando propriedades de medidas é fácil ver que (verifique) tais funções são contínuas à direita e satisfazem $F_j^\pm(-\infty) = \mu_j^\pm(\varnothing) = 0$ e $F_j^\pm(\infty) = \mu_j^\pm(\mathbb{R}) < \infty$. Assim, $F = (F_1^+ - F_1^-) + i(F_2^+ - F_2^-)$ é contínua à direita e se anula em $-\infty$. Por propriedades de BV [Teorema 3.12(a,b)] segue $F \in BV$. Logo, $F \in NBV$.

(b) Dada $F \in NBV$, pela propriedade em Teorema 3.12(a) as funções $\mathrm{Re}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$ pertencem a NBV. Por propriedades das variações [Lema 3.6(d)] as funções $T_{\mathrm{Re}(F)}$ e $T_{\mathrm{Im}(F)}$ pertencem a NBV. Então, gratos à propriedade Teorema 3.12(b) escrevemos $\mathrm{Re}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$, como diferença de duas funções limitadas e crescentes e em NBV:

$$F = (F_1^+ - F_1^-) + i(F_2^+ - F_2^-).$$

A cada função (crescente, limitada e contínua à direita) $F_j^\pm$ corresponde uma única medida de Borel $\mu_j^\pm = \mu_{F_j^\pm}$ [vide Capítulo 1]. Assim, concluímos

$$F(x) = \mu_F\big((-\infty, x]\big), \text{ onde } \mu_F = (\mu_1^+ - \mu_1^-) + i(\mu_2^+ - \mu_2^-).$$

A prova de $|\mu_F| = \mu_{T_F}$ é esboçada no Exercício 28 3.5♣

Tendo em vista o resultado acima, é natural perguntarmos: quais funções em NBV correpondem a medidas μ tais que $\mu \perp m$ ou $\mu \ll m$? Segue uma resposta.

Proposição 3.6 (Propriedades da Correspondência $\mathbf{F} \in \mathbf{NBV} \longmapsto \mu_{\mathbf{F}}$). *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ em NBV. Valem as propriedades abaixo.*

(a) $F' \in L^1(m)$.

(b) $\mu_F \perp m$ *se e somente se* $F' = 0$ *q.s.*

(c) $\mu_F \ll m$ *se e somente se* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt$.

Prova.

◇ Preparação. Por uma propriedade de BV [Teorema 3.12(e)] existe a derivada F' m-q.s. A correspondência entre medidas de Borel complexas e NBV [Teorema 3.13] garante $F(x) = \mu_F\big((-\infty, x]\big)$ para todo x, com μ_F uma medida de Borel complexa. Por definição de derivada, valem as identidades

$$F'(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{F(x+r) - F(x)}{r} = \lim_{r \to 0^+} \frac{F(x) - F(x-r)}{r} \quad m\text{-q.s.}$$

Logo, reescrevendo obtemos

$$F'(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)}, \text{ com } E_r = (x, x+r] \text{ ou } E_r = (x-r, x], \ m\text{-q.s.}$$

Vejamos que μ_F é regular. Pelo Teorema 3.13(b) temos $|\mu_F| = \mu_{T_F}$ e assim, como T_F é limitada, vemos que μ_{T_F} é finita em compactos. Então, vide comentário à Definição 3.1 [definição de medida regular], a medida de Borel μ_{T_F} é regular. Logo, por definição, μ_F é regular.

O Teorema 3.10 (derivada de uma medida regular com respeito a m) mostra que a representação de Lebesgue-Radon-Nikodym complexa (Teorema 3.5)

$$d\mu_F = d\lambda + f dm, \text{ com } \lambda \perp m \text{ e } f \in L^1(m), \quad \text{satisfaz}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)} = f(x), \text{ com } E_r \text{ como acima}, \quad m\text{-q.s.}$$

(a) Pelos comentários temos $F' = f$ q.s. e $f \in L^1(m)$. Logo, $F' = f \in L^1(m)$.

(b) Como $\lambda \perp m$, temos $\mu_F \perp m$ se e somente se $F'dm \perp m$. Utilizando que $F'dm \ll m$, temos $F'dm \perp m$ se e só se $F'dm = 0$ se e só se $F' = 0$ q.s.

(c) Como $\lambda \perp m$ e $F'dm \ll m$, temos $\mu_F \ll m$ se e somente se $\lambda = 0$. Logo, temos $\mu_F \ll m$ se e somente se $d\mu_F = F'dm$ ou, equivalentemente,

$$F(x) = \mu_F\big((-\infty, x]\big) = \int_{(-\infty, x]} F'dm = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt ♣$$

A condição $\mu_F \ll m$ pode ser expressa em termos de F. Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é dita **absolutamente contínua** se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: *para toda coleção finita de intervalos abertos e disjuntos* $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$ *temos*

$$\sum (b_j - a_j) < \delta \implies \sum |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon.$$

Mais geralmente, F é dita **absolutamente contínua em um intervalo** $[a, b]$ se a condição acima é satisfeita sempre que todos os intervalos (a_j, b_j) da coleção acima estão contidos em $[a, b]$. Valem as seguintes propriedades (cheque).

- F é absolutamente contínua se e somente se $\mathrm{Re}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$ também o são.
- Se F é absolutamente contínua então F é uniformemente contínua.
- Se F é derivável em todo ponto e F' é limitada, pela desigualdade do valor médio
$$|F(b_j) - F(a_j)| \leq (\sup |F'|)(b_j - a_j),$$
segue que F é absolutamente contínua.
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f dm$$
é absolutamente contínua (Corolário 3.1).

Exemplo 3.3. A função $\chi_{[0,\infty)}$ é também chamada **função de Heaviside** $H(t)$.

(a) Mostre que H é de variação limitada mas não é absolutamente contínua.

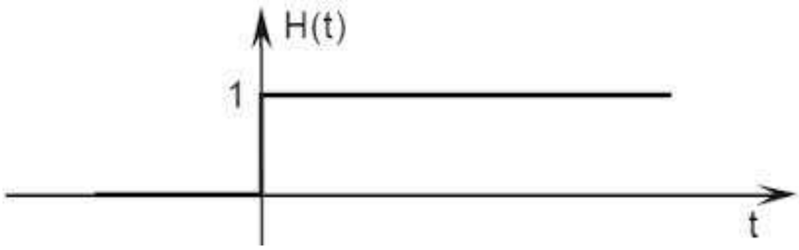


Figura 3.12: A função de Heaviside.

(b) Mostre que H é contínua à direita.

(c) Determine μ_H.

Proposição 3.7 (Caracterização da continuidade absoluta em NBV). *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ em NBV. Então,*

$$F \text{ é absolutamente contínua se e só se } \mu_F \ll m.$$

Prova.

Preparação. Temos que $F \in NBV$ se e só $\mathrm{Re}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$ pertencem a NBV. Ainda, F é absolutamente contínua se e só se $\mathrm{Re}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$ também o são. Uma medida complexa é absolutamente contínua com respeito a m se e só se suas partes real e imaginária também o são. Logo, podemos supor F a valores reais. Então, pelo Lema 3.6(d) [propriedades das variações], a variação total T_F pertence a NBV e pela propriedade Teorema 3.12(b) a função F é a diferença de duas funções crescentes e limitadas e em NBV (logo, contínuas à direita). Ainda, o espaço das funções reais absolutamente contínuas é linear, assim como o espaço das medidas com sinal absolutamente contínuas com respeito a m. Em suma, podemos supor F crescente, limitada e contínua à direita e μ_F uma medida (positiva) de Borel finita.

Com tal simplificação, provemos a equivalência anunciada.

($\Leftarrow$) Pela caracterização da continuidade absoluta em Teorema 3.3, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mu_F(E) < \epsilon$ sempre que $m(E) < \delta$. Então, considerando uma coleção finita de intervalos abertos e disjuntos satisfazendo

$$\delta > \sum (b_j - a_j) = m\Big[\dot{\bigcup} (a_j, b_j] \Big]$$

concluímos que $\sum |F(b_j) - F(a_j)| = \mu_F\Big(\dot{\bigcup} (a_j, b_j] \Big) < \epsilon$.

($\Rightarrow$) Consideremos um boreliano E tal que $m(E) = 0$. Dado ϵ, seja δ como na definição de continuidade absoluta de F. Pelo Teorema 1.6 existe um aberto

$$O = \dot{\bigcup} (a_j, b_j) \supset E$$

[a coleção de intervalos é enumerável] tal que $m(O) = \sum (b_j - a_j) < \delta$.

Donde então segue [seja a coleção finita ou não, cheque]

$$\mu_F(E) \leq \sum \mu_F[(a_j, b_j)] \;\leq\; \sum [F(b_j) - F(a_j)] \;\leq\; \epsilon \clubsuit$$

Corolário 3.3 (NBV e a Forma Fraca do Teorema Fundamental do Cálculo). *São válidas as propriedades abaixo.*

(a) Seja $f \in L^1(m)$. Então, a função integral

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

pertence a NBV, é absolutamente contínua e satisfaz $F' = f$ q.s.

(b) Reciprocamente, se $F \in NBV$ é absolutamente contínua então

$$F' \in L^1(m) \quad e \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt.$$

Prova.

(a) A função $f \in L^1$ determina uma medida de Borel complexa

$$\mu(E) = \int_E f dm.$$

O Teorema 3.13(a) [correspondência entre medidas de Borel complexas e NBV] garante

$$F(x) = \mu\big((-\infty, x]\big) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \in NBV.$$

Então, graças ao Teorema 3.13(b) temos $\mu = \mu_F$.

Como $\mu_F = \mu \ll m$, devido às propriedades Proposição 3.6(a,c) [relativas à correspondência entre NBV e medidas de Borel complexas] deduzimos que

$$F' \in L^1(m) \text{ e } F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt.$$

Da mesma forma, F' determina uma medida de Borel complexa

$$\nu(E) = \int_E F' dm$$

satisfazendo

$$\nu\big((-\infty, x]\big) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt = F(x).$$

Assim, em virtude da unicidade estabelecida no Teorema 3.13(a) concluímos

$$\mu = \nu.$$

Logo, temos

$$\int_E f dm = \int_E F' dm \text{ para todo boreliano } E.$$

Donde segue

$$\int_{\mathcal{E}} f dm = \int_{\mathcal{E}} F' dm \text{ para todo } \mathcal{E} \text{ Lebesgue mensurável } (\mathsf{cheque}).$$

Por fim, gratos à Proposição 2.13(b) concluímos que

$$F' = f \text{ q.s.}$$

[Poderíamos também argumentar que a coleção de conjuntos Lebesgue mensuráveis E tais que

$$\int_E f dm = \int_E F' dm,$$

contém os intervalos abertos, contém os conjuntos de medida nula, é fechada por complementaridade e é uma σ-álgebra (cheque). Logo, tal coleção é $\mathcal{L}$.]

(b) Pela caracterização da continuidade absoluta em NBV [Proposição 3.7], segue

$$\mu_F \ll m.$$

Então, pelas propriedades em Proposição 3.6 (a,c) [relativas à correspondência entre NBV e medidas de Borel complexas] temos que

$$F' \in L^1(m) \quad \text{e, ainda,} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t) dt \clubsuit$$

A seguir, considerando funções definidas em intervalos limitados, melhoramos o resultado acima.

Lema 3.7 (Continuidade absoluta implica variação limitada). *Se F é absolutamente contínua em $[a,b]$, então $F \in BV([a,b])$.*

Prova. Suponhamos $[a,b] = [0,1]$.

Dado $\epsilon = 1$, seja $\delta = 1/(N-1) > 0$ devido à continuidade absoluta de F. A seguir, dada uma partição arbitrária $0 = x_0 < \cdots < x_n = 1$, inserindo os pontos $1/N, \ldots, (N-1)/N$ criamos a partição $0 = y_0 < \cdots < y_m = 1$. Para os pontos de tal partição e no intervalo $[(j-1)/N, j/N]$, digamos $y_k < \ldots < y_{k+l}$, temos

$$(y_{k+1} - y_k) + \cdots + (y_{k+l} - y_{k+l-1}) = 1/N$$

e então a trivial desigualdade $|F(y_{k+1}) - F(y_k)| + \cdots + |F(y_{k+l}) - F(y_{k+l-1})| < 1$. Donde então segue

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{m} |F(y_i) - F(y_{i-1})| < N.$$

Logo, $0 \leq T_F \leq N$ e $F \in BV$ (cheque o caso $[a,b]$ geral)♣

Teorema 3.14 (O Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Lebesgue). *Seja $F : [a,b] \to \mathbb{C}$, com $[a,b]$ contido na reta. São equivalentes:*

(a) F é absolutamente contínua.

(b) $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ para alguma $f \in L^1\big([a,b], m\big)$.

(c) F é diferenciável q.s., com $F' \in L^1\big([a,b], m\big)$ e

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt.$$

Prova.

(a) $\Rightarrow (c)$ É fácil ver que podemos assumir $F(a) = 0$. Pelo lema acima segue $F \in BV([a,b])$. Definindo $F(x) = 0$ se $x < a$ e $F(x) = F(b)$ se $x > b$, vemos que $F \in BV$ e $F \in NBV$. Desta forma, (c) é uma consequência da forma fraca do teorema fundamental do cálculo [Corolário 3.3(b)].

(c) $\Rightarrow (b)$ Óbvio.

(b) $\Rightarrow (a)$ Constantes e funções definidas por integrais são absolutamente contínuas♣

Importante. A função f de Cantor-Lebesgue, cujo gráfico é a escada do Coisa Ruim, é contínua, limitada, crescente, de variação limitada e tem derivada nula q.s. Pelo teorema fundamental do cálculo f não é absolutamente contínua.

A seguinte decomposição de medidas de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ é por vezes importante. Consideremos uma medida de Borel complexa μ sobre $\mathbb{R}^n$. Dizemos que μ é **discreta** se existem um conjunto enumerável de pontos $\{x_j\}_J$ em $\mathbb{R}^n$ e um associado conjunto de números complexos $\{c_j\}_J$ tais que

$$\mu = \sum c_j \delta_{x_j}, \text{ com } \sum |c_j| < \infty \text{ e } \delta_{x_j} \text{ a medida de Dirac no ponto } x_j.$$

[Toda medida (sobre $\mathbb{R}^n$ e de Borel e complexa) discreta é regular, cheque.]

Por outro lado, μ é chamada **contínua** se $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Toda medida complexa μ pode ser escrita de forma única como

$$\mu = \mu_d + \mu_c, \text{ com } \mu_d \text{ discreta e } \mu_c \text{ contínua.}$$

De fato, como μ é finita segue que $\{x : |\mu(x)| \geq 1/n\}$ é finito, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $D = \{x : \mu(x) \neq 0\}$ é enumerável.

Assim, com B percorrendo os borelianos em $\mathbb{R}^n$, definimos as medidas

$$\begin{cases} \mu_d(B) = \mu(B \cap D), \text{ que é discreta, e} \\ \mu_c(B) = \mu(B \cap C), \text{ com } C = D^c, \text{ que é contínua.} \end{cases}$$

É claro que $\mu = \mu_d + \mu_c$, com μ_d concentrada em D e μ_c concentrada em $C = D^c$, e portanto $\mu_d \perp \mu_c$. Vide mnemônico abaixo.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \\
 & & \vdots :: & :: & :: & :: & \vdots \approx & \approx & \approx & \approx & \vdots \\
\mathbb{R}^n & \equiv & \vdots :: & :: & D, \mu_d & :: & \vdots \approx & \approx & C, \mu_c & \approx & \vdots \\
 & & \vdots :: & :: & :: & :: & \vdots \approx & \approx & \approx & \approx & \vdots \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & .
\end{array}$$

É trivial ver que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{se } \mu \text{ é discreta então } \mu \perp m, \\ \text{se } \mu \ll m \text{ então } \mu \text{ é contínua.} \end{array}}$$

Dada uma medida de Borel complexa (regular) qualquer μ, escrevamos

$$\mu = \mu_d + \mu_c.$$

Por Lebesgue-Radon-Nikodym complexo [Teorema 3.5] temos

$$\mu_c = \mu_{sc} + \mu_{ac}, \quad \text{com} \quad \mu_{sc} \perp m \quad \text{e} \quad \mu_{ac} \ll m.$$

Então, encontramos

$$\mu = \mu_d + \mu_{sc} + \mu_{ac}.$$

Como $\mu_c(\{x\}) = m(\{x\}) = 0$ para todo x, segue $\mu_{sc}(\{x\}) = 0$ para todo x. Logo, a medida μ_{sc} é singular com respeito a m e μ_{sc} é contínua. Segue então que

$$\begin{cases} \mu_{sc} \text{ está concentrada em um conjunto } S \text{ contido em } C, \\ \mu_{ac} \text{ está concentrada em } A = (D \cup S)^c. \end{cases}$$

Temos então o mnemônico

$$\mathbb{R}^n \equiv \begin{array}{cccccccccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ \vdots :: & :: & :: & \vdots & \perp & \perp & \perp & \vdots & \ll & \ll & \ll & \ll & \ll & \vdots \\ \vdots :: & D, \mu_d & :: & \vdots & \perp & S, \mu_{sc} & \perp & \vdots & \ll & \ll & A, \mu_{ac} & \ll & \ll & \vdots \\ \vdots :: & :: & :: & \vdots & \perp & \perp & \perp & \vdots & \ll & \ll & \ll & \ll & \ll & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \end{array}$$

A existência de medidas singulares não nulas em $\mathbb{R}^n$ é bem evidente se $n > 1$, pois a medida de superfície na esfera unitária discutida em 2.7 é um exemplo.

Porém, se $n = 1$, este fato não é óbvio. No caso $n = 1$, devido à correspondência entre medidas de Borel complexas e NBV [Teorema 3.13(b)] tais medidas correspondem a funções não constantes $F \in NBV$ tais que F é contínua mas $F' = 0$ q.s. Uma tal função é a função de Cantor construída em 1.5 (estendida à reta, definindo $F(x) = 0$ para $x < 0$ e $F(x) = 1$ para $x > 1$). Mais surpreendente, existem funções contínuas e estritamente crescentes $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $F' = 0$ q.s. Vide Exercício 3.5.40.

Dada $F \in NBV$, é usual denotar

$$\int g d\mu_F,$$

a integral de uma função g com respeito à medida μ_F, por

$$\int g dF \quad \text{ou} \quad \int g(x) dF(x),$$

tais integrais são chamadas **integrais de Lebesgue-Stieltjes**.

Concluímos com uma fórmula de integração por partes para integrais de Lebesgue-Stieltjes. Vide variantes desta fórmula em Exercícios 34 e 35, 3.5.

Teorema 3.15 (Fórmula de Integração por Partes). *Sejam $F, G \in NBV$, com ao menos uma delas contínua. Então, para $-\infty < a < b < \infty$,*

$$\int_{(a,b]} F dG + \int_{(a,b]} G dF = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Prova.

Preparação. Supondo G contínua e fixando-a, vemos que basta provar a fórmula acima para toda $F \in NBV$.

Pela propriedade em Teorema 3.12(a), as funções $\mathrm{Re}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$ pertencem ao espaço vetorial NBV e por linearidade podemos supor que F é real.

Em seguida, notando que $\mathrm{Re}(G)$ e $\mathrm{Im}(G)$ pertencem a NBV e são contínuas, vemos que podemos supor que G e F são reais.

Então, fixando uma arbitrária G real e contínua em NBV, utilizando que F é a diferença de duas funções crescentes limitadas [propriedade Teorema 3.12(b)] supomos que F é crescente e limitada.

Em seguida, por propriedades das variações [Lema 3.6(b)] vemos que T_G é contínua e também, desta feita pela propriedade Lema 3.6(c), que G é a diferença de duas funções crescentes limitadas e contínuas.

Em suma, podemos supor F e G crescentes e limitadas, com G contínua.

A conclusão. Consideremos o boreliano

$$\Omega = \{(x,y) : a < x \le y \le b\}.$$

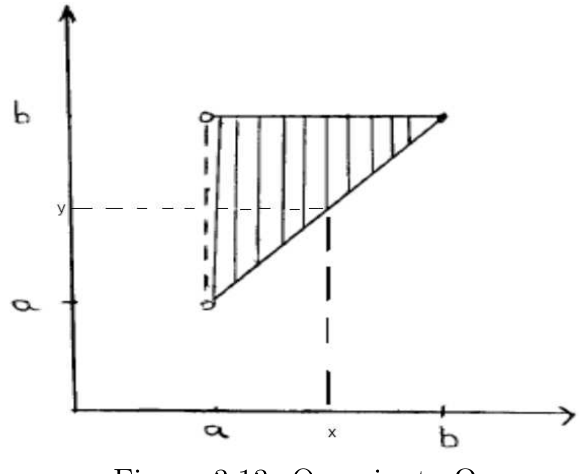


Figura 3.13: O conjunto Ω.

Utilizando o Teorema de Fubini, computemos $(\mu_F \times \mu_G)(\Omega)$ de duas formas. Primeiramente, fixando y e variando x temos

$$\begin{aligned}(\mu_F \times \mu_G)(\Omega) &= \int_{(a,b]} \int_{(a,y]} dF(x)dG(y) \\ &= \int_{(a,b]} [F(y) - F(a)dG(y) \\ &= \int_{(a,b]} FdG - F(a)[G(b) - G(a)].\end{aligned}$$

Por outro lado, notando a identidade $G(x) = G(x^-)$ e que μ_G é finita temos

$$\mu_G\big([x,b]\big) = \lim_{h\to 0^+} \mu_G\big((x-h,b]\big) = \lim_{h\to 0^+} \big[G(b) - G(x-h)\big] = G(b) - G(x).$$

Assim, fixando x e variando y encontramos

$$\begin{aligned}(\mu_F \times \mu_G)(\Omega) &= \int_{(a,b]} \int_{[x,b]} dG(y)dF(x) \\ &= \int_{(a,b]} [G(b) - G(x)]dF(x) \\ &= G(b)[F(b) - F(a)] - \int_{(a,b]} GdF.\end{aligned}$$

Subtraindo estas duas expressões para $(\mu_F \times \mu_G)(\Omega)$ obtemos o desejado♣

REFERÊNCIAS

[1.] Bartle, R. G.., *An extension of Egorov's theorem*, Amer. Math. Monthly, **87** no. 8, pp. 628–633.

[2.] Chae, S. B., *Lebesgue Integration*, 2nd ed., Springer, 1995.

[3.] de Oliveira, O. R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv:1207.1472v2, 2012.

[4.] de Oliveira, O. R. B., *The implicit and the inverse function theorems: easy proofs*, Real Analysis Exchange, Vol. 39(1), 2013/2014, pp. 207-218. Available in `http://arxiv.org/pdf/1212.2066.pdf`

[5.] de Oliveira, O. R. B., *The implicit function theorem when the partial Jacobian matrix is only continuous at the base point*. To appear. Available in `http://arxiv.org/pdf/1312.2445v2.pdf`

[6.] Feldman, M. B., *A proof of Lusin's theorem*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 191–192.

[7.] Folland, G. B., *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[8.] Lima, E., *Curso de Análise* , Vol 1., IMPA, 2009.

[9.] Littlewood, J. E., *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford University Press, 1941.

[10.] Loeb, P. A. and Talvila, E., *Lusin's Theorem and Bochner Integration*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, Vol. 10, (2004), 55-62.

[11.] Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis*, fourth edition, Prentice Hall, 2010.

[12.] Severini, C., *Sulle successioni di funzioni ortogonali* (Italian), Atti Acc. Gioenia. (5) 3, 10 S (1910).

[13.] Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*, Ed. Ciência Moderna, 2003.

[14.] Stein, E. M., and Shakarchi, R., *Real Analysis - Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

[15.] Swartz, C., *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific, 1994.

[16.] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. *Measure and Integral*, Marcel Deker, 1977.