MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT5798 - IMEUSP - 2016

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Estas notas destinam-se aos alunos do curso Medida e Integração - MAT5798-IMEUSP - 2016 e baseiam-se 100% no livro de G. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, John Wiley & Sons, além de uns 20% distribuídos por outros excelentes livros, e artigos, citados na bibliografia. Apesar de se constituírem em quase uma tradução do núcleo de apenas cinco capítulos do livro base, excetuando as maravilhosas notas e exercícios propostos, não devem ser tidas como tal visto que não sou tradutor profissional e uma boa quantidade de material foi alterada e outra introduzida. Os erros de tradução e/ou matemática são de minha responsabilidade. Para finalizar, recomendo a compra e o estudo do merecidamente famoso livro de G. B. Folland.

Capítulo 0 - INTRODUÇÃO

Capítulo 1 - MEDIDAS

Capítulo 2 - INTEGRAÇÃO

Capítulo 3 - MEDIDAS COM SINAL E DIFERENCIAÇÃO

Capítulo 4 - ESPAÇOS L^p

Capítulo 5 - MEDIDAS DE RADON

Capítulo 1

MEDIDAS

Capítulo 2

INTEGRAÇÃO

...entre as muitas definições que tem sido sucessivamente propostas para a integral de funções em uma variável real e a valores reais, eu tenho retido apenas aquelas que, em minha opinião, são indispensáveis para entender as transformações ocorridas com o problema da integração, e para capturar a relação entre a noção de área, tão simples em aparência, e algumas definições analíticas mais complicadas da integral. Alguém pode questionar se é realmente interessante se ocupar com tais complicações, e se não é melhor se restringir ao estudo das funções que necessitam apenas definições simples... Como veremos neste curso, teríamos então que renunciar à possibilidade de resolver muitos problemas há muito tempo apresentados, e cujo enunciado é simples. É para resolver tais problemas e não por amor a complicações que eu introduzi neste livro uma definição de integral mais geral que a de Riemann. *H. Lebesgue, 1903*

2.1 Funções Mensuráveis

Uma função $f : X \to Y$ induz uma aplicação $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, definida por

$$f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\},$$

que preserva uniões, intersecções e complementares. Se $\mathcal{N}$ é uma σ-álgebra sobre Y, então $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$ é uma σ-álgebra sobre X. Se $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ são espaços mensuráveis, dizemos que a função $f : X \to Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-**mensurável**, ou **mensurável**, se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$, para todo $E \in \mathcal{N}$.

Se $f : X \to Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-mensurável e $g : Y \to Z$ é $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$-mensurável, então

$$g \circ f : X \to Z \quad \text{é} \quad (\mathcal{M}, \mathcal{O}) - \text{mensurável}.$$

Proposição 2.1 *Seja $\mathcal{N}$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$. Neste caso, uma aplicação $f : X \to Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-mensurável se e somente se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$, para todo $E \in \mathcal{E}$.*

Prova.

A "ida" é óbvia. Para a "volta", veja que a família $\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ é uma σ-álgebra contendo $\mathcal{E}$. Tal família contém $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E})$ [gerada por $\mathcal{E}$] ♣

Corolário 2.1 *Se X e Y são espaços métricos (ou topológicos), toda função contínua $f : X \to Y$ é $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-mensurável.*

Prova. Exercício.

Se $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável, uma função $f : X \to \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, é dita $\mathcal{M}$-**mensurável**, ou apenas **mensurável**, se é $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ mensurável.

A menos que especificado, as σ-álgebras no contra-domínio são sempre entendidas como $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ [isto é, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ou $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$]. Em particular, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ é **Lebesgue mensurável** se é $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ mensurável. Analogamente, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ é **Borel mensurável** se é $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ mensurável.

Atenção: Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são Lebesgue mensuráveis, não podemos concluir que $f \circ g$ é Lebesgue mensurável, mesmo supondo g contínua. Pois, dado $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ temos que $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$, porém não sabemos se $f^{-1}(E)$ é um boreliano e portanto não podemos garantir que $g^{-1}\big(f^{-1}(E)\big) \in \mathcal{L}$ (Exercício 9 2.1). Entretanto, se f é Borel mensurável, então $f \circ g$ é Lebesgue ou Borel mensurável, conforme g.

Proposição 2.2 *Seja* $(X, \mathcal{M})$ *um espaço mensurável e* $f : X \to \mathbb{R}$. *São equivalentes as afirmações abaixo.*

(a) f *é* $\mathcal{M}$*-mensurável.*

(b) $f^{-1}\big((r, \infty)\big) \in \mathcal{M}$, *para todo* $r \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}\big([r, \infty)\big) \in \mathcal{M}$, *para todo* $r \in \mathbb{R}$.

(d) $f^{-1}\big((-\infty, r)\big) \in \mathcal{M}$, *para todo* $r \in \mathbb{R}$.

(e) $f^{-1}\big((-\infty, r]\big) \in \mathcal{M}$, *para todo* $r \in \mathbb{R}$.

Prova.

Como a σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é gerada por cada uma das famílias de intervalos reais em (b), (c), (d) e (e), basta empregar a Proposição 2.1 (cheque)♣

Se $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável, $f : X \to \mathbb{K}$ é uma função arbitrária e $E \in \mathcal{M}$, dizemos que f é **mensurável sobre** E se

$$f^{-1}(B) \cap E \in \mathcal{M}, \text{ para todo boreliano } B.$$

Equivalentemente, $f|_E$ é $\mathcal{M}_E$-mensurável, onde $\mathcal{M}_E = \{F \cap E : F \in \mathcal{M}\}$.

Seja X um conjunto, $\{(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ uma família de espaços mensuráveis e

$$f_\alpha : X \to Y_\alpha \text{ uma aplicação, para cada } \alpha \text{ em } A.$$

Então, existe a menor σ-álgebra sobre X com respeito à qual todas as aplicações $f_{\alpha's}$ são mensuráveis. A saber, a σ-álgebra gerada pelos conjuntos

$$f_\alpha^{-1}(E_\alpha), \text{ onde } E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha \text{ e } \alpha \in A,$$

chamada de **σ-álgebra gerada pela família de aplicações** $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Assim, considerando o produto cartesiano de conjuntos

$$Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha,$$

temos que a σ-álgebra produto (vide seção 1.2) é a σ-álgebra gerada pelas projeções $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$ (cheque).

Proposição 2.3 *Sejam* $(X,\mathcal{M})$ *e* $(Y_\alpha,\mathcal{N}_\alpha)$, *com* $\alpha \in A$, *espaços mensuráveis. Sejam*

$$Y = \prod_A Y_\alpha,\ \ \mathcal{N} = \bigotimes_A \mathcal{N}_\alpha \ \text{ e } \pi_\alpha : Y \to Y_\alpha, \text{com } \alpha \in A, \text{ as projeções.}$$

Então, uma função $f : X \to Y$ *é* $(\mathcal{M},\mathcal{N})$*-mensurável se e somente se* $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ *é* $(\mathcal{M},\mathcal{N}_\alpha)$*-mensurável, para todo* α *em* A.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & Y \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$

Prova.

Pelo comentário prévio, cada projeção π_α é mensurável. Logo, se f é mensurável, cada $f_\alpha = f \circ \pi_\alpha$ é mensurável. Inversamente, se cada f_α é mensurável, concluímos que para cada $E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$ o conjunto

$$f^{-1}\big(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)\big) \in \mathcal{M}.$$

Donde, pela Proposição 2.1(e comentário acima), f é mensurável♣

Corolário 2.2 *Uma função* $f : X \to \mathbb{C}$ *é* $\mathcal{M}$*-mensurável se e somente se* Ref *e* Imf *são* $\mathcal{M}$*-mensuráveis.*

Prova.

Segue de $\mathcal{B}_\mathbb{C} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$ e da Proposição 2.3 ♣

Para analisar funções com valores em $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, a afirmação abaixo é útil.

Afirmação. *Metrizemos* $\overline{\mathbb{R}}$ *com a distância* $\rho(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. *Então,*

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}.$$

Prova.

Para iniciar, solicitamos ao leitor verificar que ρ é uma métrica e que

$$\mathcal{A} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}$$

é uma σ-álgebra (contendo $\mathcal{B}_\mathbb{R}$).

- $\diamond$ $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{A}$. Como pontos são fechados em $\overline{\mathbb{R}}$, segue que $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty, \infty\}$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$. Visto que

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

é bicontínua, segue que a aplicação identidade $Id : (\mathbb{R}, |\,.\,|) \to (\mathbb{R}, \rho)$ é bicontínua. Portanto, abertos em $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$ são abertos em $\overline{\mathbb{R}}$ e então $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Assim, dado E aberto em $\overline{\mathbb{R}}$, temos que $E \cap \mathbb{R}$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$ e em $\mathbb{R}$, e então $E \in \mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{A}$.

- $\diamond$ $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Dado $E \in \mathcal{A}$ temos

$$E = (E \cap \mathbb{R}) \cup (E \cap \{-\infty, \infty\}),$$

com $E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ e, claramente, $E \cap \{-\infty, \infty\} \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Logo, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ ♣

Por favor, mostre que, analogamente à Proposição 1.1, a σ-álgebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ é gerada por cada uma das duas famílias de abertos

$$\big\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\big\} \text{ e } \big\{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\big\}.$$

Dizemos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{M}$-mensurável se f é $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-mensurável. Vide Exercício 1 2.1.

Proposição 2.4 *Se $f, g : X \to \mathbb{C}$ são $\mathcal{M}$-mensuráveis, então $f + g$ e fg também.*

Prova.

Consideremos

$$\begin{cases} F : X \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ F(x) = (f(x), g(x)) \end{cases}, \quad \begin{cases} S : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ S(z, w) = z + w \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} P : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ P(z, w) = zw. \end{cases}$$

Pela Proposição 1.4 temos $\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$. Logo, pela Proposição 2.3, a função F é $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}})$-mensurável. Pelo Corolário 2.1 as funções S e P são $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensuráveis. Assim sendo,

$$f + g = S \circ F \quad \text{e } fg = P \circ F$$

são $\mathcal{M}$-mensuráveis♣

A Proposição 2.4 é também válida para funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, tomando-se o devido cuidado com as expressões indeterminadas $\infty - \infty$ e $0.\infty$. Recordemos a convenção

$$\boxed{0.\infty = 0.}$$

Vide também Exercício 2, 2.1.

Proposição 2.5 *Se $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$, para $j = 1, 2, \ldots$, são mensuráveis, então*

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x), \qquad g_3(x) = \limsup f_j(x),$$
$$g_2(x) = \inf_j f_j(x), \qquad g_4(x) = \liminf f_j(x)$$

também. Ainda, se existe o limite

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ para todo } x \in X,$$

então f é mensurável.

Prova.

Pela identidade
$$g_1^{-1}\big((a,\infty]\big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}\big((a,\infty]\big),$$
temos que a função g_1 é mensurável (vide Exercício 4 2.1). Como temos

$$g_2 = \sup_j(-f_j),$$

segue que g_2 é mensurável. Pelo já provado para g_1 e g_2, as funções

$$g_3 = \inf_k \sup_{j\geq k} f_j \text{ e } g_4 = \sup_k \inf_{j\geq k} f_j$$

são mensuráveis.

Finalmente, se f existe então temos $f = g_3 = g_4$ e portanto f é mensurável♣.

Corolário 2.3 *Se* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *são mensuráveis, então*

$$\max(f, g) \quad e \quad \min(f, g)$$

são mensuráveis.

Prova. Trivial (segue imediatamente da proposição acima)♣

Corolário 2.4 *Se* $f_j : X \to \mathbb{C}$*, para* $j = 1, 2, \ldots$*, são funções mensuráveis e existe*

$$f(x) = \lim f_j(x), \ \text{para todo } x \text{ em } X,$$

então f *é mensurável.*

Prova. Segue do Corolário 2.2♣

Dada $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, as **partes positiva** e **negativa** de f são

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \qquad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Temos (verifique)

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^- \qquad \text{e} \qquad |f|^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2.$$

Se f é mensurável, pelo Corolário 2.3 segue que f^+ e f^- também o são. Logo, f é mensurável se, e só se, f^+ e f^- também o são.

Dada $f : X \to \mathbb{C}$, sua **decomposição polar** é

$$f = (\operatorname{sgn} f)|f|, \qquad \text{com} \ \operatorname{sgn} z = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & \text{se } z \neq 0, \\ \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Vejamos que se f é mensurável, então $|f|$ e $\operatorname{sgn}(f)$ são mensuráveis. De fato, a função $z \to |z|$ é contínua sobre $\mathbb{C}$ e portanto

$$|f| = |\,.\,| \circ f$$

é mensurável. Ainda, a função $\operatorname{sgn}(z)$ é contínua, exceto na origem. Donde, se U é um aberto em $\mathbb{C}$, o conjunto $\operatorname{sgn}^{-1}(U)$ é ou um aberto ou é da forma $V \cup \{0\}$, onde V é aberto. Logo, a função $\operatorname{sgn}(z)$ é Borel mensurável e portanto $\operatorname{sgn}(f) = \operatorname{sgn} \circ f$ é mensurável.

A seguir, consideremos um espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$. Dado $E \subset X$, a **função característica** χ_E de E (às vezes chamada **função indicador** de E e denotada por 1_E) é definida por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases} \qquad \textsf{Atenção: } \chi_\varnothing(x) = 0, \text{ para todo } x.$$

É claro que χ_E é mensurável se, e só se, $E \in \mathcal{M}$. Uma **função simples** sobre X é uma combinação linear finita, com coeficientes complexos, de funções características de conjuntos mensuráveis. Funções simples não assumem os valores $\pm\infty$. É fácil ver que $f : X \to \mathbb{C}$ é simples se e somente se f é mensurável e a imagem de f é um subconjunto finito de $\mathbb{C}$. De fato, temos

$$f = \sum_{j=1}^{n} z_j \chi_{E_j}, \quad \text{onde } E_j = f^{-1}(\{z_j\}) \text{ e Imagem}(f) = \{z_1, \ldots, z_n\}.$$

Esta é a **representação (forma) standard (padrão, canônica)** de f, exibindo f como uma combinação linear com coeficientes distintos, de funções características de conjuntos disjuntos e não vazios cuja união é X (i.e., uma **partição** de X). Um dos coeficientes z_j pode ser 0, entretanto o termo $z_j \chi_{E_j}$ deve ser mantido na forma standard, já que o conjunto E_j pode ser importante na prática.

É óbvio que se f e g são funções simples então $f + g$ e fg também são simples.

O teorema abaixo é um dos pilares da teoria de Lebesgue. Existe uma anedota "sem graça" comparando os métodos de Lebesgue e Riemann. Segundo tal estória, Lebesgue teria sido melhor caixa de banco que Riemann. Imagine moedas diversas em vários pontos do eixo Ox, e interprete $f(x)$ como o valor da moeda na posição x. Somemos todos os valores. No método de Lebesgue, particionando Oy e formando conjuntos $E_{k's}$ com moedas de valores v_k, obtemos

$$\sum v_k |E_k|.$$

O método de Riemann é menos eficiente já que aproxima o valor total agrupando arbitrariamente as moedas (particionando Ox), e então somando os produtos do número de moedas em um grupo pelo valor de uma moeda qualquer neste grupo.

Teorema 2.1 (Aproximação Básica). *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.*

(a) Se $f : X \to [0, \infty]$ é mensurável, então existe uma sequência (φ_n) de funções simples tal que $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots \le f$ e $\varphi_n \to f$ pontualmente. Ainda mais, $\varphi_n \to f$ uniformemente sobre todo conjunto no qual f é limitada.

Se temos $f \ge c$ para alguma constante $c > 0$, então podemos supor $\varphi_1 \ge c$.

(b) Se $f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável, então existe uma sequência (φ_n) de funções simples tal que $0 \le |\varphi_1| \le |\varphi_2| \le \cdots \le |f|$ e $\varphi_n \to f$ pontualmente. Ainda mais, $\varphi_n \to f$ uniformemente sobre todo conjunto no qual f é limitada.

Se temos $|f| \ge c$ para uma constante $c > 0$, então podemos supor $|\varphi_1| \ge c/3$.

Prova.

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ particionemos o intervalo $[0, n]$ em $n2^n$ subintervalos de igual comprimento, $1/2^n$, e definamos

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^n}, & \text{se } \frac{j-1}{2^n} \le f(x) < \frac{j}{2^n}, \quad \text{com } j = 1, \ldots, n2^n, \\ n, & \text{se } f(x) \ge n. \end{cases}$$

Cada φ_n é positiva, simples e $\varphi_n(x) \le f(x)$. Ainda, temos $\varphi_{n+1}(x) \ge \varphi_n(x)$ pois, se $(j-1)/2^n \le f(x) < j/2^n$ então $(2j-2)/2^{n+1} \le f(x) < 2j/2^{n+1}$ e portanto $\varphi_{n+1}(x) \ge (2j-2)/2^{n+1} = \varphi_n(x)$. Se $f(x) \ge n = n2^{n+1}/2^{n+1}$ então $\varphi_{n+1}(x) \ge n2^{n+1}/2^{n+1} = n = \varphi_n(x)$. Ainda mais, se $f(x) < n$ então

$$0 \le f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{2^n},$$

o que mostra que $\varphi_n(x) \nearrow f(x)$ em todo ponto e também que φ_n converge uniformemente a f sobre os subconjuntos em que f é limitada.

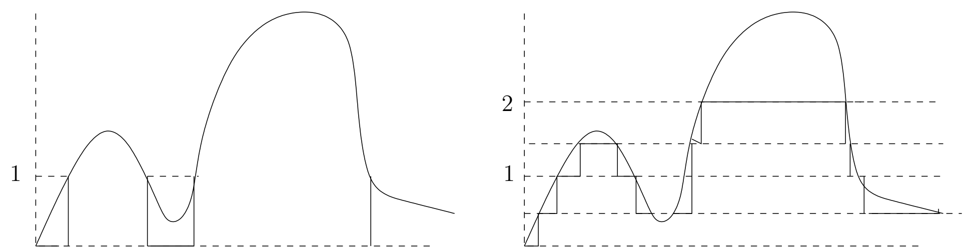

Figura 2.1: Ilustrações para φ_1 e φ_2

O caso $f \geq c$, a seguir, pode ser deixado para uma segunda leitura. Consideremos a função $f - c \geq 0$ e a sequência acima dada e formada por funções simples e positivas (ϕ_n) tal que $\phi_n \nearrow (f - c)$. Então, a sequência

$$\varphi_n = \phi_n + c$$

é dada por funções simples e satisfaz as condições

$$\varphi_n \nearrow f, \quad \varphi_1 \geq c \ \text{ e } \ \varphi_n \xrightarrow{unif.} f \ \text{ nos subconjuntos onde } f \text{ é limitada.}$$

(b) Escrevamos $f = u + iv$. Por (a), existem quatro sequências crescentes de funções simples positivas ψ_n^+, ψ_n^-, ζ_n^+ e ζ_n^- convergindo às partes positivas e negativas u^+, u^-, v^+ e v^-. Todas as funções envolvidas são mensuráveis. Evidentemente

$$\varphi_n = (\psi_n^+ - \psi_n^-) + i(\zeta_n^+ - \zeta_n^-) \ \text{ é simples, } \ \varphi_n \xrightarrow{s} f \ \text{ e}$$

$$|\varphi_n|^2 = (\psi_n^+ - \psi_n^-)^2 + (\zeta_n^+ - \zeta_n^-)^2 = (\psi_n^+)^2 + (\psi_n^-)^2 + (\zeta_n^+)^2 + (\zeta_n^-)^2 \leq |\varphi_{n+1}|^2.$$

Donde segue $|\varphi_n| \nearrow |f|$.

Pelo item (a) segue que $\varphi_n \xrightarrow{unif.} f$ nos subconjuntos onde f é limitada.

O caso $|f| \geq c$, a seguir, pode ser deixado para uma segunda leitura. Temos

$$|f|^2 = u^2 + v^2 \geq c^2.$$

Sejam

$$U = \left\{x : |u(x)| \geq \frac{c}{\sqrt{2}}\right\} \ \text{ e } \ V = \left\{x : |v(x)| \geq \frac{c}{\sqrt{2}}\right\}.$$

É trivial ver que (cheque, vide diagrama abaixo)

$$X = U \,\dot{\bigcup}\, U^c \ \text{ e } \ U^c \subset V.$$

$$\begin{array}{rcl} & & \cdots\ \cdots\ \cdots \qquad\qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ . \\ & & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ X & = & \vdots \qquad U = \left\{|u| \geq \frac{c}{\sqrt{2}}\right\} \qquad \vdots \qquad\quad U^c \qquad\quad \vdots \\ & & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ & & \cdots\ \cdots\ \cdots \qquad\qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ . \end{array}$$

Suponhamos $U \neq \varnothing$ (o caso $U = \varnothing$ é comentado ao longo da prova).

No conjunto U temos

$$u^+ + u^- = |u| \geq \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Sejam U^+ e U^- dados por

$$U^\pm = \left\{x \in U : u^\pm(x) \geq \frac{c}{2\sqrt{2}}\right\}.$$

É trivial ver que (cheque)

$$U = U^+ \dot{\bigcup} (U \smallsetminus U^+) \text{ e } (U \smallsetminus U^+) \subset U^-, \text{ com } U^+ \neq \varnothing \text{ ou } U \smallsetminus U^+ \neq \varnothing.$$

Vide diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots\ \cdots\ \cdots & & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & & \cdots & . \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
U \ = & \vdots & U^+ = \left\{u^+ \geq \frac{c}{2\sqrt{2}}\right\} & \vdots & U \smallsetminus U^+ & & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 & \cdots\ \cdots\ \cdots & & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & & \cdots & .
\end{array}$$

Existe ao menos uma de duas sequências (g_n^+) e (g_n^-) de funções simples, respectivamente definidas nos conjuntos disjuntos U^+ e $U \smallsetminus U^+$ [pois ao menos um destes conjuntos é não vazio], cada qual satisfazendo

$$g_n^+ \nearrow u^+ \text{ com } g_1^+ \geq \frac{c}{2\sqrt{2}}, \quad \text{ e } \quad g_n^- \nearrow u^- \text{ com } g_1^- \geq \frac{c}{2\sqrt{2}}.$$

Estendamos g_n^+ como nula em $U \smallsetminus U^+$ e, ainda, g_n^- como nula em U^+. Certamente existem estas duas extensões [se $U^\pm = \varnothing$ então $g_n^\pm \equiv 0$], as quais também denotamos g_n^+ e g_n^-, com ambas definidas em U e positivas simples.

Para todo ponto $x \in U$, temos

$$g_n^+(x) - g_n^-(x) \longrightarrow u^+(x) - u^-(x) = u(x), \qquad g_n^+(x) + g_n^-(x) \nearrow |u(x)| \quad \text{e}$$

$$g_1^+(x) + g_1^-(x) \geq \frac{c}{2\sqrt{2}}.$$

Quanto ao conjunto U^c, utilizemos o item (a). Então consideramos duas sequências (G_n^+) e (G_n^-) de funções crescentes, simples, positivas, definidas em U^c e convergindo pontualmente a u^+ e u^- (restritas a U^c), respectivamente. Ainda no conjunto U^c, estendemos g_n^+ e g_n^- como G_n^+ e G_n^- respectivamente. Assim, obtemos sequências crescentes (g_n^+) e (g_n^-) de funções definidas em todo o X que são simples e positivas e satisfazem

$$g_n^+ - g_n^- \longrightarrow u, \qquad g_n^+ + g_n^- \nearrow |u| \qquad \text{e} \qquad (g_1^+ + g_1^-)(x) \geq \frac{c}{2\sqrt{2}} \text{ se } x \in U.$$

Estas três afimações acima são válidas, seja U vazio ou não.

Analogamente, encontramos duas sequências crescentes (h_n^+) e (h_n^-) de funções definidas em X que são simples e positivas e satisfazem

$$h_n^+ - h_n^- \longrightarrow v, \qquad h_n^+ + h_n^- \nearrow |v| \qquad \text{e} \qquad (h_1^+ + h_1^-)(x) \geq \frac{c}{2\sqrt{2}} \text{ se } x \in V.$$

Definamos então

$$\varphi_n = (g_n^+ - g_n^-) + i(h_n^+ - h_n^-).$$

Utilizando $X = U \cup V$, segue

$$\varphi_n \longrightarrow u + iv = f, \qquad |\varphi_n|^2 \nearrow |f|^2 \qquad \text{e} \qquad |\varphi_1| \geq \frac{c}{2\sqrt{2}} \text{ em } X \clubsuit$$

Em geral, não é desejável considerar conjuntos nulos ao estudar funções mensuráveis. Neste sentido, medidas completas são muito mais maleáveis.

Proposição 2.6 *As implicações abaixo são verdadeiras se, e só se, μ é completa.*

(a) Se f é mensurável e $f = g$ q.s., então g é mensurável.

(b) Se f_n é mensurável, para $n \in \mathbb{N}$, e $f_n \to f$ q.s., então f é mensurável.

Prova. Exercício 10 2.1. Sugestão para a verificação de (a): se μ não é completa então existe $E \subset N$ com $E \notin \mathcal{M}$ e $\mu(N) = 0$. Logo, temos $\chi_E = 0$ q.s. mas χ_E não é mensurável.

O próximo resultado mostra que é pouco provável que alguém cometa um erro grave ao esquecer de verificar se a medida é completa e será utilizado para definir a classe das funções Lebesgue integráveis.

Proposição 2.7 (Representação de Funções $\overline{\mu}$-mensuráveis). *Seja* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida e* $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ *seu completamento. Suponha que* f *é uma função* $\overline{\mathcal{M}}$*-mensurável sobre* X*. Então, existe uma função* $\mathcal{M}$*-mensurável* g *satisfazendo*

$$f = g \ \overline{\mu}\text{-quase sempre.}$$

Prova.

Podemos supor, sem perda de generalidade, $f : X \to [0, +\infty]$.

Pela definição de $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$, a afirmação é óbvia no caso $f = \chi_E$, com $E \in \overline{\mathcal{M}}$. Logo, a afirmação é válida se f é uma função $\overline{\mathcal{M}}$-mensurável simples.

Quanto ao caso geral, escolhamos uma sequência (φ_n) de funções $\overline{\mathcal{M}}$-mensuráveis simples que converge pontualmente a f, de acordo com o Teorema 2.1 (aproximação básica). Consideremos, para cada n, uma função ψ_n que é $\mathcal{M}$-mensurável simples e satisfazendo $\psi_n = \varphi_n$, exceto em um conjunto $E_n \in \overline{\mathcal{M}}$ tal que $\overline{\mu}(E_n) = 0$. É claro que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

Considerando $N \in \mathcal{M}$ tal que

$$\mu(N) = 0 \text{ e } N \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad \text{(cheque a existência de } N\text{)},$$

definamos

$$g = \lim_{n\to\infty} \chi_{X \setminus N} \psi_n.$$

Pelo Corolário 2.4, a função g é $\mathcal{M}$-mensurável. É óbvio que

$$g = f \text{ sobre } X \setminus N \ \clubsuit$$

2.2 Integração de Funções Positivas

Fixemos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Seja

$$L^+ = \{f : X \to [0, +\infty] : \ f \text{ é mensurável}\}.$$

Se φ é uma função simples em L^+, com representação standard

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

definimos a **integral** de φ, com respeito a μ, por

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j),$$

convencionando $0.\infty = 0$. Notemos que $\int \varphi d\mu$ pode valer ∞. Se não houver risco de dubiedade, abreviamos $\int \varphi d\mu$ por $\int \varphi$ (apesar que em dissertações, teses e artigos é recomendável evitar tal abuso de notação). Por vezes, é conveniente explicitar o argumento de φ, especialmente quando $\varphi(x)$ é dada por uma fórmula em termos de x ou quando há outras variáveis envolvidas. Neste caso escrevemos

$$\int \varphi(x) d\mu(x)$$

[no entanto, alguns autores preferem escrever $\int \varphi \mu(dx)$].

Se $A \in \mathcal{M}$, então $\varphi \chi_A$ também é simples (pois $\varphi \chi_A = \sum a_j \chi_{A \cap E_j}$, sendo que tal representação não é necessariamente a standard) e definimos

$$\int_A \varphi d\mu = \int \varphi \chi_A d\mu.$$

Se $E \in \mathcal{M}$, a forma padrão para χ_E é $1\chi_E + 0\chi_{E^c}$. Logo,

$$\int \chi_E d\mu = \mu(E).$$

Proposição 2.8 *Sejam φ e ψ funções simples em L^+. Vale o que segue.*

(a) $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$, *para todo* $c \geq 0$.

(b) $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$.

(c) Se $\varphi \leq \psi$, *então* $\int \varphi d\mu \leq \int \psi d\mu$.

(d) A aplicação $A \mapsto \int_A \varphi d\mu$ *é uma medida sobre* $\mathcal{M}$.

Prova.

(a) Trivial.

(b) Escrevamos as formas padrões $\varphi = \sum_j a_j \chi_{E_j}$, $\psi = \sum_k b_k \chi_{F_k}$ e $\varphi + \psi = \sum_l c_l \chi_{G_l}$. O espaço X é particionado pelos $E_{j's}$, pelos $F_{k's}$ e pelos $G_{l's}$. É fácil ver que $c_l \mu(G_l \cap E_j \cap F_k) = (a_j + b_k)\mu(G_l \cap E_j \cap F_k)$, para quaisquer j, k e l [alerta:$\mu(\varnothing) = 0$]. Pela aditividade finita de μ segue

$$\begin{cases} \int \varphi & = \sum\limits_j a_j \mu(E_j) = \sum\limits_{j,k,l} a_j \mu(E_j \cap F_k \cap G_l) \\ \int \psi & = \sum\limits_{j,k,l} b_k \mu(E_j \cap F_k \cap G_l) \\ \int (\varphi + \psi) & = \sum\limits_{j,k,l} c_l \mu(E_j \cap F_k \cap G_l) = \sum\limits_{j,k,l} (a_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k \cap G_l). \end{cases}$$

(c) Com a notação em (b), se $\varphi \le \psi$ temos $a_j \mu(E_j \cap F_k \cap G_l) \le b_k \mu(E_j \cap F_k \cap G_l)$ para quaisquer j, k e l. Logo,

$$\int \varphi \le \int \psi.$$

(d) Seja $(A_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $A = \dot{\bigcup}_n A_n$. Então, $\chi_A \chi_{E_j} = \chi_{A \cap E_j}$ e

$$\begin{aligned} \int_A \varphi & = \int \varphi \chi_A = \int \sum_j a_j \chi_{A \cap E_j} \\ & = \sum_j a_j \mu(A \cap E_j) \\ & = \sum_n \sum_j a_j \mu(A_n \cap E_j) \\ & = \sum_n \int \varphi \chi_{A_n} = \sum_n \int_{A_n} \varphi \ \clubsuit \end{aligned}$$

A seguir, estendemos a **integral** a todas as funções $f \in L^+$ definindo

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int \varphi \, d\mu : 0 \le \varphi \le f \text{ e } \varphi \text{ é simples} \right\}.$$

Pela Proposição 2.8(c), as duas definições para $\int f \, d\mu$ coincidem se f é simples, pois a família de funções simples sobre a qual o supremo é computado inclui f. Ainda mais, pela definição é óbvio que

$$\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu, \text{ se } f \le g, \text{ e } \int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu, \text{ com } c \in [0, \infty].$$

A seguir estabelecemos um dos teoremas fundamentais sobre convergência.

Observação 2.1 *Sejam $f, g \in L^+$. Então, são mensuráveis os conjuntos*

$$(a) \quad \{x : f(x) > g(x)\} \qquad\qquad (b) \quad \{x : f(x) \neq g(x)\}$$
$$(c) \quad \{x : f(x) = g(x)\} \qquad\qquad (d) \quad \{x : f(x) \leq g(x)\}.$$

Prova.

Seja $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos números racionais estritamente positivos. Então,

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_n \{x : f(x) > r_n\} \cap \{x : r_n > g(x)\}$$

é mensurável. Logo, $\{x : f(x) \neq g(x)\} = \{x : f(x) > g(x)\} \cup \{x : f(x) < g(x)\}$ é mensurável.

Os conjuntos em (c) e (d) são complementares dos dois primeiros♣

Teorema 2.2 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja $(f_n)_{\mathbb{N}}$, em L^+, com $f_n \leq f_{n+1}$, para todo n, e $f = \lim f_n$. Então,*

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Prova.

- ◇ É óbvio que existe $\lim f_n(x) = f(x) \in [0, \infty]$, para todo $x \in X$. Pela Proposição 2.5 segue que f é mensurável. Pelo já comentado, a sequência $(\int f_n)_{\mathbb{N}}$ é crescente e majorada por $\int f$ e, então, $\lim \int f_n \leq \int f$.

- ◇ A desigualdade reversa. Dado $\epsilon \in (0, 1)$ e φ simples tal que $0 \leq \varphi \leq f$, seja

$$E_n = \{x : f_n(x) \geq \epsilon \varphi(x)\}.$$

Pela Observação 2.1, (E_n) é uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis cuja reunião é X. Assim,

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{E_n} = \int_{E_n} f_n \geq \epsilon \int_{E_n} \varphi.$$

Pela Proposição 2.8(d) e Teorema 1.1(c) segue $\int_{E_n} \varphi \nearrow \int \varphi$ e portanto

$$\lim \int f_n \geq \epsilon \int \varphi, \text{ para todo } \epsilon \in (0, 1).$$

Donde segue $\lim \int f_n \geq \int \varphi$, para todo φ simples tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Logo,

$$\lim \int f_n \geq \int f \, ♣$$

O teorema da convergência monótona é essencial em várias situações, mas sua imediata importância para nós se dá como indicamos a seguir. A definição da integral

$$\int f d\mu$$

envolve o supremo sobre uma enorme (geralmente não enumerável) família de funções simples, e pode ser difícil computar tal integral diretamente da definição. Por tal teorema, para estimar a integral de f basta computar

$$\lim \int \varphi_n d\mu,$$

com (φ_n) uma sequência de funções simples tal que $\varphi_n \nearrow f$, e o Teorema 2.1 (aproximação básica) afirma existir tal sequência. Como primeira aplicação, mostramos a aditividade da integral, estendendo a Proposição 2.8(b) para sequências de funções, positivas, não necessariamente simples.

Teorema 2.3 *Seja* (f_n) *uma sequência, infinita ou não, em* L^+ *e* $f = \sum_n f_n$. *Então,*

$$\int f \, d\mu = \sum_n \int f_n \, d\mu.$$

Prova.

Iniciemos com duas funções f_1 e f_2. Pelo Teorema 2.1 (aproximação básica) existem sequências crescentes (φ_n) e (ψ_n) de funções simples e positivas convergentes a f_1 e f_2. Assim, pelo teorema da convergência monótona e Proposição 2.8(b) temos

$$\begin{aligned}\int (f_1 + f_2) &= \lim \int (\varphi_n + \psi_n) = \lim \left(\int \varphi_n + \int \psi_n \right) \\ &= \lim \int \varphi_n + \lim \int \psi_n = \int f_1 + \int f_2.\end{aligned}$$

Por indução segue

$$\int \sum_1^N f_n = \sum_1^N \int f_n, \text{ para todo } N.$$

Impondo $N \to \infty$ e novamente utilizando o teorema da convergência monótona encontramos

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \clubsuit$$

Atenção. O resultado abaixo inclui um item a mais, (b), que o em Folland, p. 51.

Proposição 2.9 *Sejam $f \in L^+$ e $g \in L^+$.*

(a) Temos $\int f\,d\mu = 0$ se, e somente se, $f = 0$ q.s.

(b) Se $f = g$ q.s. então $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.

Prova.

(a) $\Rightarrow$ Sejam $E_n = \{x : f(x) \geq 1/n\}$ e a função simples e positiva $\varphi_n = \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Temos $0 \leq \varphi_n \leq f$ e, por definição de integral,

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) = \int \varphi_n \leq \int f = 0.$$

Donde segue, $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f = 0$ q.s.

$\Leftarrow$ É claro que $\int f = \sup\left\{\int \varphi : 0 \leq \varphi \leq f \text{ e } \varphi \text{ simples}\right\} = \sup\{0\} = 0$.

(b) Existe $E \subset \{x : f(x) = g(x)\}$ tal que $\mu(E^c) = 0$ (cheque). Donde segue $f\chi_{E^C} = 0$ q.s. e $g\chi_{E^c} = 0$ q.s. Por (a) e pela aditividade da integral (Teorema 2.3) concluímos

$$\int f = \int f\chi_E + \int f\chi_{E^c} = \int_E f = \int_E g \quad \text{e também} \quad \int g = \int_E g \clubsuit$$

Exercício. Em Folland p. 51, a prova do resultado abaixo contém um "errinho"?

Corolário 2.5 *Sejam $(f_n) \subset L^+$ e $f \in L^+$ tais que $f_n(x) \nearrow f(x)$ q.s. Então,*

$$\lim \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

Prova.

Existe E tal que $f_n\chi_E \nearrow f\chi_E$ em todo ponto e $\mu(E^c) = 0$ (cheque). É claro que $f\chi_E = f$ q.s. e $f_n\chi_E = f_n$ q.s. Então, pela Proposição 2.9(b) e o teorema da convergência monótona obtemos

$$\lim \int f_n = \lim \int f_n\chi_E = \int f\chi_E = \int f \clubsuit$$

A hipótese de que $(f_n)_{\mathbb{N}}$ convirja ao menos q.s é essencial ao teorema da convergência monótona. Se $X = \mathbb{R}$ e μ é a medida de Lebesgue, temos que

$$\chi_{[n,n+1]} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad n\chi_{[0,\frac{1}{n}]} \longrightarrow 0.$$

pontualmente. Vide gráficos abaixo.

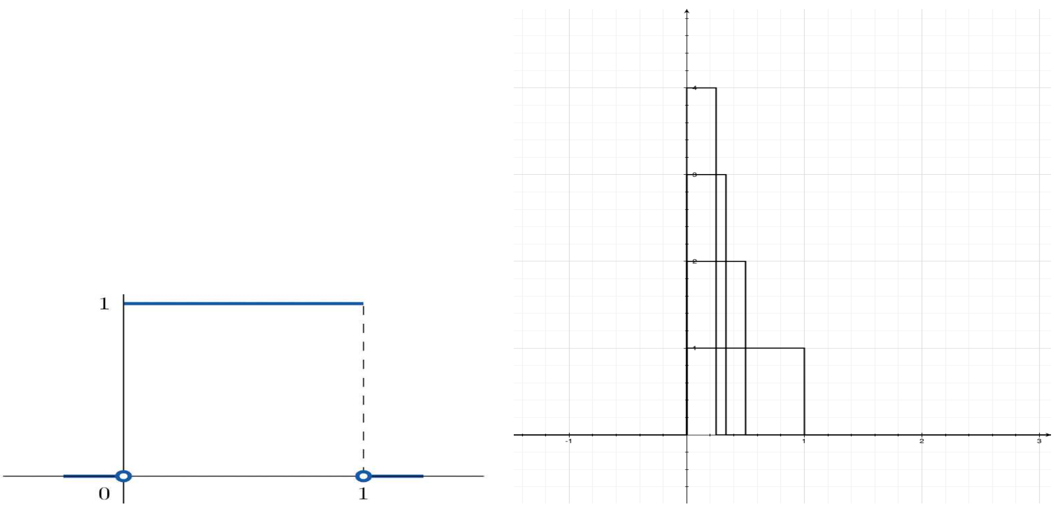

Figura 2.2: O gráfico de $\chi_{[0,1]}$ e gráficos para $n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$

Porém,

$$\int \chi_{[n,n+1]} d\mu = \int n\chi_{[0,\frac{1}{n}]} d\mu = 1, \text{ para todo } n.$$

Pelo esboço dos gráficos vemos que o problema nestes dois exemplos é que a área abaixo do gráfico "foge ao infinito" se $n \to \infty$, e assim a área no limite é menos do que se poderia esperar.

Isto é típico quando a integral do limite não é o limite das integrais, no entanto em tais situações existe ainda uma desigualdade que permanece válida. Nós a deduziremos através do seguinte resultado geral, chamado Lema de Fatou.

Teorema 2.4 (Lema de Fatou). *Seja* (f_n)*uma sequência em* L^+*. Então,*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Prova.

Fixado n, é claro que

$$\int \left(\inf_{k \geq n} f_k \right) \leq \inf_{k \geq n} \int f_k.$$

Impondo $n \to \infty$ e aplicando o teorema da convergência monótona obtemos

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n \clubsuit$$

Notação. Se (f_n) converge a f pontualmente (ou simplesmente), ou uniformemente, ou quase sempre, escrevemos respectivamente

$$f_n \xrightarrow{s} f, \qquad f_n \xrightarrow{u} f \qquad \text{e} \qquad f_n \xrightarrow{q.s.} f.$$

Corolário 2.6 *Se* $(f_n) \subset L^+$, $f \in L^+$ *e* $f_n \xrightarrow{q.s.} f$*, então*

$$\int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Prova.

Como na prova do Corolário 2.5, podemos modificar $f_{n's}$ e f em um conjunto nulo de forma tal que $f_n \xrightarrow{s} f$, sem alterar os valores de suas respectivas integrais. Agora, o resultado é imediato do Lema de Fatou $\clubsuit$

Proposição 2.10 *Seja* $f \in L^+$ *tal que*

$$\int_X f \, d\mu < \infty.$$

Então, $\{x : f(x) = \infty\}$ *é um conjunto nulo e* $\{x : f(x) > 0\}$ *é* σ*-finito.*

Prova. Exercício 12 2.2.

2.3 Integração de Funções Complexas

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável. Definimos

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu, \text{ se a diferença é bem definida em } \overline{\mathbb{R}}.$$

Dizemos que f é **integrável** se

$$\int f^+\, d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int f^-\, d\mu < \infty.$$

Visto que $|f| = f^+ + f^-$, segue que f é integrável se e somente se

$$\int |f|\, d\mu < \infty.$$

Proposição 2.11 *O conjunto das funções integráveis definidas em X e a valores reais, é um espaço vetorial real a a integral é um funcional linear sobre tal espaço.*

Prova. Sejam a e b números reais e $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ integráveis.

A estrutura vetorial segue de $|af + bg| \le |a|\,|f| + |b|\,|g|$. Ainda, é claro que

$$\int af = a \int f.$$

Quanto à aditividade, escrevamos $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. Donde então segue $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. Assim obtemos

$$\int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+.$$

Por fim,

$$\int (f+g) = \int (f+g)^+ - \int (f-g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g \clubsuit$$

Se $f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável, dizemos que f é **integrável** se

$$\int |f|\, d\mu < \infty.$$

Dado $E \in \mathcal{M}$, dizemos que f é **integrável sobre** E se

$$\int_E |f|\, d\mu = \int |f| \chi_E\, d\mu < \infty.$$

As desigualdades

$$|f| \leq |\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f| \leq 2|f|$$

mostram que f é integrável se e somente se $\mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$ são integráveis e, neste caso, definimos

$$\int f\, d\mu = \int \mathrm{Re} f\, d\mu + i \int \mathrm{Im} f\, d\mu.$$

É fácil ver que o conjunto das funções integráveis a valores complexos é um espaço vetorial complexo e que a integral é um funcional $\mathbb{C}$-linear sobre tal espaço. Provisoriamente, denotaremos tal espaço (vetorial complexo) por

$$L^1(\mu), \text{ ou } L^1(X,\mu), \text{ ou } L^1(X), \text{ ou } L^1, \text{ dependendo do contexto.}$$

Proposição 2.12 (Desigualdade Triangular para Integrais). *Se $f \in L^1(X)$, então*

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu.$$

Prova.

Se f é real, temos

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

Se f é a valores complexos, consideremos o número complexo

$$\alpha = \overline{\mathrm{sgn}\left(\int f\right)}.$$

Então,

$$\left|\int f\right| = \alpha \int f = \int \alpha f$$

é um número real e α tem modulo 1. Portanto,

$$\left|\int f\right| = \int \mathrm{Re}(\alpha f) \leq \int |\mathrm{Re}(\alpha f)| \leq \int |\alpha f| = \int |f| \clubsuit$$

Observação 2.2 *Se $f \in L^1(X)$ então $f \in L^1(E)$ para todo mensurável $E \subset X$.*

- *Note-se a analogia com somas não ordenadas: se $(z_j)_J \subset \mathbb{C}$ é uma família somável e $K \subset J$, sabe-se que a sub-família $(z_k)_K$ é somável.*

- *A analogia não se mantém para séries pois*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty \quad \textit{mas} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \infty.$$

Atenção. A prova abaixo difere (um pouco) daquela em Folland p.54.

Proposição 2.13 *Sejam f e g, ambas em L^1.*

(a) O conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ é σ-finito.

(b) São equivalentes:

(b1) $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$, para todo $E \in \mathcal{M}$.

(b2) $\int |f-g|\,d\mu = 0$.

(b3) $f = g$ q.s.

Prova.

(a) Segue da Proposição 2.10, aplicada a $\mathrm{Re}f$ e $\mathrm{Im}f$.

(b2) $\Leftrightarrow$(b3). Segue da Proposição 2.9(a).

(b3) $\Rightarrow$(b1). Podemos supor f real. Dado $E \in \mathcal{M}$, devido à hipótese temos $f\chi_E = g\chi_E$ q.s. Logo, pela Proposição 2.9(b) concluímos

$$\int f\chi_E = \int g\chi_E.$$

(b1) $\Rightarrow$(b2). Pela Observação 2.2 e a Proposição 2.11, podemos supor $g = 0$. Também podemos supor f real. Devido à hipótese temos

$$\int_E f = 0 = \int_{E^c} f \quad \text{e} \quad E = \{x : f(x) \geq 0\} \in \mathcal{M}.$$

Logo,

$$\int |f| = \int_E f - \int_{E^c} f = 0 \clubsuit$$

Comentário.

A proposição acima mostra que *para integrarmos* não faz diferença se alterarmos funções em conjuntos nulos. De fato, podemos integrar funções f que estão *definidas somente* em um conjunto mensurável E, cujo complementar é nulo, simplesmente definindo f como 0 (ou qualquer outro valor) sobre E^c (apesar que prefiro evitar tal artifício). Mostremos tal fato.

Dado o particular valor 0 e definindo

$$F|_E = f \quad \text{e} \quad F|_{E^c} = 0$$

e considerando um aberto O temos

$$F^{-1}(O) = f^{-1}(O) \text{ se } 0 \notin O \quad \text{e} \quad F^{-1}(O) = f^{-1}(O) \bigcup E^c \text{ se } 0 \in O.$$

Claramente F é integrável se e só f é integrável e que então as integrais são iguais. Em particular, podemos tratar funções mensuráveis a valores em $\overline{\mathbb{R}}$ que sejam finitas q.s. como funções reais (i.e., funções a valores reais), para o propósito de integrarmos.

Devido a tal comentário, redefinimos $L^1(\mu)$ como o conjunto das classes de equivalência das funções integráveis sobre X, definidas quase sempre, onde f e g são consideradas **equivalentes** se e somente se

$$f = g \text{ q.s.}$$

Este novo $L^1(\mu)$ é ainda um espaço vetorial complexo (com a adição e a multiplicação ponto a ponto definidas q.s.). Embora doravante vejamos $L^1(\mu)$ com um espaço de classes de equivalência, ainda assim escreveremos "$f \in L^1(\mu)$", significando que f é uma função integrável definida q.s. Este pequeno abuso de notação é usual e raramente causa confusão.

Esta nova definição de $L^1(\mu)$ tem duas vantagens adicionais.

Primeira vantagem. Se $\overline{\mu}$ é o completamento de μ, a Proposição 2.7 (*Representação de funções $\overline{\mu}$-mensuráveis*) fornece uma bijeção entre $L^1(\overline{\mu})$ e $L^1(\mu)$. Então, identificamos

$$L^1(\mu) \equiv L^1(\overline{\mu}).$$

Segunda vantagem. O conjunto L^1 é um espaço métrico com distância

$$\rho(f,g) = \int |f - g| d\mu.$$

De fato, a desigualdade triangular é trivial e a propriedade simétrica é óbvia. Para provar que $\rho(f,g) = 0$ implica $f = g$, é necessário identificar funções que são iguais q.s., de acordo com a Proposição 2.13 (b). É costume nos referimos à convergência em relação a tal métrica como **convergência em** $L^1(\mu)$. Assim,

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \quad \text{se e somente se} \quad \int |f_n - f| d\mu \to 0.$$

O **Teorema da Convergência Dominada**, que provamos a seguir (junto com algumas consequências), é o último dos três resultados básicos sobre convergência (os outros dois são o teorema da convergência monótona e o lema de Fatou). No contexto da teoria da integração sobre $\mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue (vide discussão prévia ao Lema de Fatou), a idéia inerente ao teorema da convergência dominada é a seguinte:

$$\begin{cases} \text{se } f_n \xrightarrow{q.s.} f \\ \text{e} \\ \text{os gráficos de } |f_{n's}| \text{ estão confinados a uma região do plano com área finita,} \end{cases}$$

então
$$\int f_n \, dm \to \int f \, dm.$$

Teorema 2.5 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja* (f_n) *uma sequência em* L^1 *satisfazendo*

(a) $f_n \to f$ *q.s.*

(b) Existe uma função positiva $g \in L^1$ *tal que* $|f_n| \le g$ *q.s., para todo* n.

Nestas condições,
$$\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Prova. Provemos algo mais forte.

Redefinindo as $f_{n's}$ como zero em um conveniente conjunto nulo, podemos supor toda sequência $(f_n(x)$ convergente e $|f_n| \le g$ em todo ponto. Assim, f é mensurável, com $|f| \le g$ e $f \in L^1$. É trivial ver que $|f_n - f| \le g + |f|$. Logo, $g + |f| - |f_n - f| \le 0$. Pelo lema de Fatou temos
$$\int \liminf \big(g + |f| - |f_n - f|\big) \, dx \;\le\; \liminf \int \big(g + |f| - |f_n - f|\big) \, dx.$$
Donde segue
$$\int (g + |f|) \, dx \;\le\; \int (g + |f|) \, dx + \liminf \int -|f_n - f| \, dx.$$
Portanto
$$\limsup \int |f_n - f|\big) \, dx \le 0 \quad \text{e então} \quad \int |f_n - f| \, dx \longrightarrow 0.$$
Em particular, pela desigualdade triangular para integrais segue o anunciado♣

Teorema 2.6 *Seja* (f_n)*uma sequência em* L^1 *tal que*

$$\sum_n \int |f_n|\, d\mu < \infty.$$

Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge (absolutamente) q.s. a uma função em* L^1 *e*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Prova.

Pelo Teorema 2.3 segue que é finita a integral

$$\int \sum_{n=1} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|.$$

Logo,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \in L^1.$$

Podemos supor g finita em todo ponto e a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convergente (absolutamente) em todo ponto. É claro que

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f_n \right| \leq g, \text{ para todo } N.$$

Pelo teorema da convergência dominada aplicado à sequência das somas parciais $f_1 + \cdots + f_N$, com $N = 1, 2, \ldots$, obtemos

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \clubsuit$$

Comentários. No teorema acima, usemos a linguagem de somas não ordenadas. Mantidas as hipóteses do teorema, vale o que segue.

- Existe um conjunto mensurável E, com $\mu(E^c) = 0$, para o qual temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum f_n(x), \text{ para todo } x \in E.$$

- Temos também

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \sum \int f_n d\mu.$$

Definição 2.1 *Dada uma função contínua* $f : X \to \mathbb{C}$*, onde* X *é um espaço métrico (ou topológico), o* **suporte** *de* f *é*

$$supp(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Teorema 2.7 (A Densidade das Funções Simples e Integráveis em L^1). *Sejam $f \in L^1(X,\mu)$ e $\epsilon > 0$.*

(a) Existe uma função simples e integrável $\varphi = \sum a_j \chi_{E_j}$ tal que

$$\int |f - \varphi| \, d\mu < \epsilon.$$

[A densidade se dá na métrica de L^1.]

(b) Suponhamos que μ é uma medida de Lebesgue-Stieltjes na reta real.

(b1) Os conjuntos E_j na definição de φ, em (a), podem ser escolhidos como uniões finitas de intervalos abertos.

(b2) Existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua e de suporte compacto tal que

$$\int |f - g| \, d\mu < \epsilon.$$

Prova.

(a) Seja (φ_n) uma sequência de funções simples como no Teorema 2.1(b). Logo, $|\varphi_n - f| \to 0$ q.s. e $|\varphi_n - f| \leq 2|f|$. Pelo teorema da convergência dominada segue

$$\int |\varphi_n - f| < \epsilon \text{ se } n \text{ é suficientemente grande.}$$

(b1) Mantenhamos a notação em (a). Utilizando a representação (não standard) $\varphi_n = \sum a_j \chi_{E_j}$, com $E_{j's}$ disjuntos dois a dois e $a_{j's} \neq 0$, temos que

$$\mu(E_j) = \frac{1}{|a_j|} \int_{E_j} |\varphi_n| \leq \frac{1}{|a_j|} \int |f| < \infty.$$

Ainda mais, se F é um conjunto mensurável, temos

$$\mu(E_j \Delta F) = \int |\chi_{E_j} - \chi_F|.$$

Portanto, como μ é uma medida de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$, pelo *Primeiro Princípio de Littlewood* (Teorema 1.8) podemos aproximar χ_{E_j}, na métrica de L^1, por somas finitas de funções características χ_{I_k}, onde os conjuntos $I_{k's}$ são intervalos abertos. Isto completa a prova de (b1) (cheque).

(b2) Com a notação acima, se $I_k = (a,b)$, podemos aproximar χ_{I_k} (na métrica de L^1) por funções contínuas que se anulam em $\mathbb{R} \setminus (a,b)$ (cheque)♣

O teorema a seguir mostra um dos pontos fortes da teoria da integração de Lebesgue. Tal teorema é menos restritivo que os teoremas usuais dados em livros de cálculo avançado para a troca de um limite, ou uma derivada, com a integral.

Teorema 2.8 (Continuidade e Derivação sob o Sinal de Integração). *Seja $f : X \times (a,b) \to \mathbb{C}$ tal que $f(\cdot,t) : X \to \mathbb{C}$ é integrável para cada $t \in (a,b)$. Consideremos*

$$F(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x).$$

(a) Suponhamos existir $g \in L^1(X)$ tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$, para todos x, t. Suponhamos também que $f(x,\cdot)$ é contínua em t_0, para cada x. Então, F é contínua em t_0. Se $f(x,\cdot)$ é contínua para cada x, então F é contínua.

(b) Suponha que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe e que existe uma função $g \in L^1(X)$ satisfazendo

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x), \text{ para quaisquer } x \text{ e } t.$$

Então, F é diferenciável e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x).$$

Prova. Podemos supor que f é uma função real [cheque].

Seja (t_n) uma sequência em (a,b) tal que $t_n \to t_0$, com $t_n \neq t_0$.

(a) Definindo $f_n(x) = f(x,t_n)$, temos que $f_n \xrightarrow{simples} f_0$ e $|f_n| \leq g$. Pelo teorema da convergência dominada concluímos que

$$F(t_n) = \int_X f(x,t_n)\, d\mu(x) \to \int_X f(x,t_0)\, d\mu(x).$$

(b) São mensuráveis as seguintes funções (definidas em X),

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0).$$

Pela teorema do valor médio (pois f é real) temos

$$|h_n(x)| \leq \sup\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| : t \in (a,b)\right\} \leq g(x).$$

Portanto, pelo teorema da convergência dominada,

$$\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, d\mu(x) = \lim \int_X h_n(x)\, d\mu(x) = \lim \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = F'(t_0)\clubsuit$$

É importante notar que o teorema acima é de caráter local.

Se μ é a medida de Lebesgue, a integral que desenvolvemos até aqui é a **integral de Lebesgue**.

A relação entre a integral de Riemann e a integral de Lebesgue. Investigaremos a relação entre estas duas integrais utilizando as caracterizações de Darboux para a integral de Riemann em termos das somas inferior e superior.

Seja $[a,b]$ um intervalo compacto na reta. Uma partição de $[a,b]$ é uma sequência finita e ordenada

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

A norma da partição P é

$$|P| = \max\{|x_j - x_{j-1}| : j = 1, \ldots, n\}.$$

Dada uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, as somas inferior e superior de Darboux de f e relativas à partição P são, respectivamente,

$$s(f;P) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{e} \quad S(f;P) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}),$$

com m_j e M_j, respectivamente, o ínfimo e o supremo de f restrita ao sub-intervalo $[x_{j-1}, x_j]$. Isto é,

$$m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x).$$

As integrais inferior e superior são, ainda respectivamente,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P) \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P S(f;P).$$

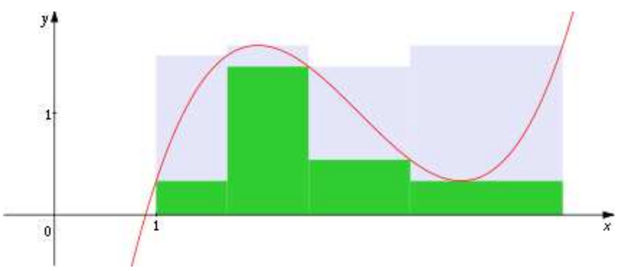

Figura 2.3: Soma inferior e soma superior (Darboux), com quatro sub-intervalos.

Dizemos que f é **Riemann integrável** se tais integrais inferior e superior tem igual valor. Tal valor é a **integral de Riemann** de f que denotamos

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Atenção. A prova a seguir difere (um pouco) daquela em Folland pp. 57–59.

Teorema 2.9 *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada.*

(a) Se f é Riemann integrável, então f é Lebesgue mensurável (logo, Lebesgue integrável pois $[a,b]$ é limitado) e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

(b) **(Critério de Lebesgue para a Integral de Riemann).** *A função f é Riemann integrável se e somente se o conjunto dos pontos de descontinuidades de f tem medida de Lebesgue nula.*

Prova. Mantenhamos as notações introduzidas acima.

Preparação. Graças à translação $f(x)-f(a)$, podemos supor $f(a)=0$ (cheque). Dada uma partição $P=\{a=x_0<\cdots<x_n=b\}$, sejam as funções

$$g_P=\sum_{j=1}^n m_j\chi_{(x_{j-1},x_j]} \quad \text{e} \quad G_P=\sum_{j=1}^n M_j\chi_{(x_{j-1},x_j]}.$$

Temos

$$s(f;P)=\int g_P\,dm \quad \text{e} \quad S(f;P)=\int G_P\,dm.$$

Existe uma sequência crescente de partições $(P_k)_{\mathbb{N}}$ [i.e., $P_k\subset P_{k+1}$ para todo k] cuja norma tende a zero tal que [cheque]

$$s(f;P_k)\nearrow \underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \text{e} \quad S(f;P_k)\searrow \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

A sequência de funções (g_{P_k}) é crescente enquanto (G_{P_k}) é decrescente. Ainda mais, temos $g_{P_k}\le f\le G_{P_k}$ para todo k. Sejam

$$g=\lim g_{P_k} \quad \text{e} \quad G=\lim G_{P_k}.$$

É claro que as funções g e G são mensuráveis, limitadas, Lebesgue integráveis e $g\le f\le G$. Pelo teorema da convergência dominada segue

$$\int g\,dm=\lim\int g_{P_k}\,dm=\lim s(f;P_k)=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Analogamente,

$$\int G\,dm=\lim\int G_{P_k}\,dm=\lim S(f;P_k)=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

(a) Por hipótese, temos

$$\int (G - g)\, dm = 0 \quad \text{e} \quad G - g \geq 0.$$

Logo,

$$g = G = f \text{ q.s.}$$

Sendo m uma medida completa, pela Proposição 2.6 vemos que f é mensurável. Segue então que

$$\int_{[a,b]} f\, dm = \int_a^b f(x)dx.$$

(b) ($\Rightarrow$) Toda função $\chi_{(c,\,d]}$ é contínua à esquerda e assim, g_{P_k} e G_{P_k} também. Seja

$$E = \{x : g(x) = G(x) = f(x)\},\ \text{logo } \mu(E^c) = 0.$$

Como $g_{P_k} \nearrow g$ e $G_{P_k} \searrow G$, segue que a função f é contínua à esquerda nos pontos de E (cheque). Analogamente (redefinindo g_{P_k} e G_{P_k} via funções da forma $\chi_{[c,d)}$), vemos que f é contínua à direita q.s.

($\Leftarrow$) Se f é contínua em x, é claro que $g_{P_k}(x) \nearrow f(x)$ e $G_{P_k}(x) \searrow f(x)$. Logo, devido à hipótese, temos $g = G$ q.s e

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \clubsuit$$

A integração imprópria de Riemann é então reduzivel à integração de Lebesgue. Algumas integrais impróprias de Riemann (as absolutamente convergentes) podem ser interpretadas diretamente como integrais de Lebesgue, porém outras requerem um procedimento limite. Por exemplo, se f é Riemann-integrável em $[0, b]$, para todo $b > 0$, e Lebesgue-integrável em $[0, \infty)$, então

$$\int_{[0,\infty)} f dm = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx$$

(pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue), entretanto o limite à direita pode existir mesmo quando f não é (Lebesgue) integrável. Por favor, verifique o exemplo $f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\chi_{(n,n+1]}$.

Doravante, a menos que citado o contrário,

$$\int_a^b f(x)dx$$

é a integral de Lebesgue.

(Integral de Lebesgue) X (Integral de Riemann) . Umas poucas observações, comparando a construção das integrais de Riemann e de Lebesgue, podem ser úteis. Seja $f \geq 0$ uma função limitada e mensurável em $[a,b]$. Para computar a integral de Riemann de f, particionamos $[a,b]$ em sub-intervalos e aproximamos f inferiormente e superiormente por funções constantes em cada sub-intervalo. Para computar a integral de Lebesgue de f, selecionamos uma sequência de funções simples que cresce para f. Em particular, se escolhermos a sequência construída na prova do Teorema 2.1(a), estamos de fato particionando a imagem de f em subconjuntos de sub-intervalos I_j e e aproximando f por uma constante em cada conjunto $f^{-1}(I_j)$. Este procedimento requer uma teoria da medida mais sofisticada pois os conjuntos $f^{-1}(I_j)$ podem ser complicados, mesmo se f é contínua, mas é mais apropriado e flexível - e mais suscetível a generalizações (na teoria de Lebesgue, a hipótese "f é mensurável" remove a necessidade de considerarmos aproximações inferiores e superiores; no entanto, tais considerações podem ser postas em prática em teoria abstrata). Vide Exercício 24 2.3.

A teoria de Lebesgue oferece duas vantagens palpáveis sobre a teoria de Riemann. Primeiro, ela apresenta teoremas de convergência muito mais poderosos, tais como os teoremas da convergência monótona e convergência dominada. Estes não apenas conduzem a resultados anteriormente inalcançáveis como também reduzem o trabalho para provar teoremas clássicos. Segundo, uma classe maior de funções pode ser integrável. Por exemplo, se R é o conjunto dos números racionais em $[0,1]$, a função característica χ_R não é Riemann-integrável, pois é descontínua em todo ponto, mas é Lebesgue-integrável e

$$\int \chi_R dm = 0$$

(este exemplo é trivial pois $\chi_R = 0$ q.s.; para um mais interessante vide Exercício 25 2.3). Obviamente, quase todas as funções encontradas em análise clássica são (localmente) Riemann-integráveis e a generalidade vista até aqui é raramente útil para computar integrais específicas. Porém, sob tal generalidade, vários dos espaços métricos de funções com métricas dadas em termos de integrais são completos quando utilizamos funções Lebesgue-integráveis mas não se usamos apenas funções Riemann-integráveis. Veremos tal situação mais atentamente no capítulo Espaços L^p (já provamos a completude de $L^1(\mu)$, veladamente, no Teorema 2.6).

Para uma interpretação bastante básica, escrevamos

$$y = f(x), \text{ com } f : [a, b] \to [0, +\infty).$$

As figuras abaixo ilustram as integrais de Riemann e de Lebesgue.

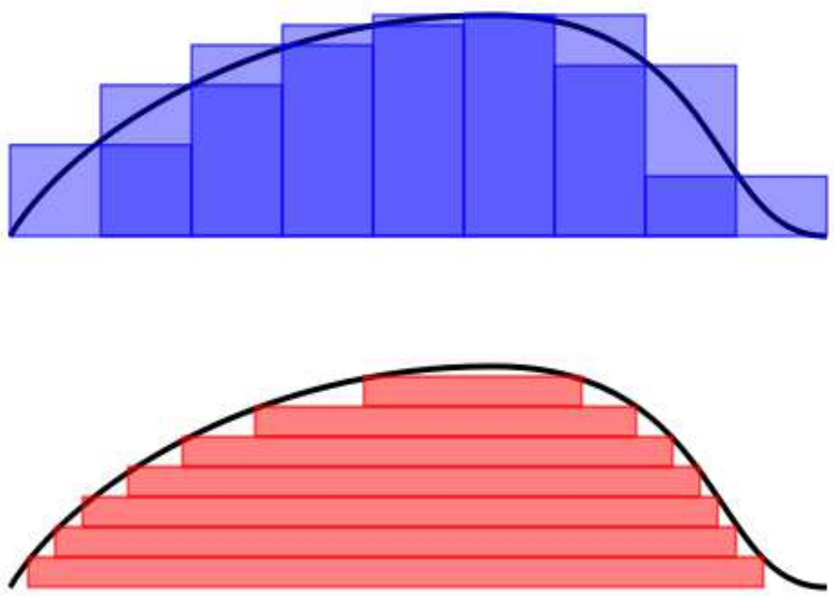

Figura 2.4: Interpretação para a integral de Riemann (figura superior) e para a integral de Lebesgue (figura inferior).

Uma frase interessante (curiosa) sobre a integral de Lebegue é

> *A integral de Lebesgue é aquela em que as "linhas" são adicionadas ao invés das "colunas".*

Pode-se dizer que a integral de Riemann é de inspiração *geométrica* pois é o limite de uma soma de áreas de retângulos

$$f(x_j)\Delta x_j$$

e que a integral de Lebesgue é de inspiração *aritmética* pois é o limite de uma soma de valores assumidos

$$y_j m(E_j), \text{ onde } E_j = f^{-1}\Big([y_j, y_{y_{j+1}}]\Big).$$

Os limites da integral de Lebesgue. Vale a pena destacar que temos o seguinte valor para a integral imprópria de Riemann (cheque)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Donde segue o seguinte valor para a integral de Lebesgue (cheque)

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dm = \infty.$$

Ainda mais, existe a integral imprópria de Riemann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Fourier2.pdf`, seção 2.16.

A integral imprópria de $(\sin x)/x$ é dita de tipo **integral oscilatória**.

Isto mostra que a integral de Lebesgue não capta oscilações e que nem sempre a integral de Lebesgue é a ferramenta adequada para estudar

- integrais impróprias (em particular, integrais oscilatórias) e
- valor principal de Cauchy de uma integral.

Paralelismo entre integral de Lebesgue e somas não ordenadas. Temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = \infty$$

Sabe-se que podemos reordenar a série harmônica alternada de tal forma a obter uma série convergente a qualquer valor desejado na reta real ou mesmo a $\pm\infty$.

A série harmônica alternada é o mais famoso exemplo de série patológica. Isto mostra que a teoria de séries (um "instrumento muito fino") é adequada para estudar séries "delicadas" como esta (condicionalmente convergente).

As séries não patológicas (as não condicionalmente convergentes) podem ser mais facilmente analisadas com a teoria das somas não ordenadas. [Analogamente, integrais não oscilatórias podem ser estudadas com a teoria de Lebesgue.]

A função gama (Γ). Encerramos esta seção introduzindo a função gama, que utilizaremos um bom número de vezes, mais à frente. Dado $z \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(z) > 0$, inicialmente definimos a função

$$f_z : (0,\infty) \to \mathbb{C} \text{ pela fórmula } f_z(t) = t^{z-1}e^{-t},$$

onde, $t^{z-1} = \exp[(z-1)\log t]$.

Visto que $|t^{z-1}| = t^{\mathrm{Re}\,z-1}$, obtemos $|f_z(t)| \le t^{\mathrm{Re}\,z-1}$ e também $|f_z(t)| \le C_z e^{-t/2}$ para todo $t \in [1,\infty]$ (o valor preciso da constante positiva C_z pode ser facilmente encontrado majorando $t^{\mathrm{Re}\,z-1}e^{-t/2}$ porém isto não é importante nesta introdução). Como temos

$$\int_0^1 t^a\,dt < \infty \quad \text{para } a > -1 \ \text{ e } \ \int_1^\infty e^{-t/2}\,dt < \infty,$$

concluímos que a função $f_z \in L^1\big((0,\infty)\big)$ para $\mathrm{Re}(z) > 0$. Definimos então,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad \text{para } \mathrm{Re}\,z > 0.$$

Pela fórmula de integração por partes obtemos

$$\int_\epsilon^N t^z e^{-t}\,dt = -t^z e^{-t}\Big|_\epsilon^N + z\int_\epsilon^N t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Então, impondo $\epsilon \to 0$ e $N \to \infty$ vemos que para $\mathrm{Re}z > 0$, a função Γ satisfaz a **equação funcional**

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Esta equação pode ser utilizada para estender Γ para quase todo o plano complexo. De fato, na faixa vertical $-1 < \mathrm{Re}z \le 0$ podemos definir $\Gamma(z)$ pela fórmula

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Assim procedendo, por indução definimos Γ em $\mathbb{C}$ exceto nos pontos z tais que $\mathrm{Re}z = -1$, $\mathrm{Re}z = -2$, $\mathrm{Re}z = -3$, etc.

É claro que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1.$$

Desta forma, aplicando a equação funcional n-vezes concluímos que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

[para outra prova deste fato, vide Exercício 29 2.3]. Muitas das aplicações da função Γ envolvem o fato de propiciar uma extensão da função fatorial para números não inteiros.

2.4 Modos de Convergência

Notação. Seja X um espaço métrico. Se $x_n \to x \in X$, escrevemos $x_n \xrightarrow{X} x$.

Se (f_n) é uma sequência de funções a valores complexos, definidas em um conjunto (sem estrutura) X, a afirmação "$f_n \to f$ se $n \to \infty$" pode ter diferentes sentidos, tais como convergência simples ou uniforme. Se X é um espaço mensurável, ou de medida, podemos falar de convergência q.s., ou convergência em L^1. É claro que convergência uniforme implica convergência pontual, que por sua vez implica em convergência q.s. (mas o reverso não é válido, em geral). Entretanto, tais modos de convergência não implicam em convergência em L^1, ou vice-versa. É muito útil ter em mente os exemplos que seguem, em $\mathbb{R}$ e com a medida de Lebesgue. Consideremos as sequências de funções:

(E1) $f_n = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}$

(E2) $f_n = \chi_{(n,n+1)}$.

(E3) $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$.

(E4) $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_4 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}$, $f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}$, $f_7 = \chi_{[3/4,1]}$ e, em geral, $f_n = \chi_{[j/2^k,(j+1)/2^k]}$ onde $n = 2^k + j$ e $0 \le j < 2^k$.

- Em (E1), (E2) e (E3), temos que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ uniformemente, simplesmente e q.s., respectivamente, mas $f_n \nrightarrow 0$ em L^1 (pois $\int |f_n| = 1$ para todo n).

- Em (E4), temos que $f_n \to 0$ em L^1 pois $\int |f_n| = 2^{-k}$ para $2^k \le n \le 2^{k+1}$, entretanto a sequência numérica $(f_n(x))_{\mathbb{N}}$ é divergente qualquer que seja x em $[0,1]$ já que existem infinitos índices n para os quais $f_n(x) = 0$ e também infinitos índices n para os quais $f_n(x) = 1$.

Por outro lado, se $f_n \xrightarrow{q.s.} f$ e $|f_n| \le g \in L^1$, para todo n, então $f_n \xrightarrow{L^1} g$ (segue do teorema da convergência dominada pois $|f_n - f| \le 2g$). Veremos logo mais (Corolário 2.7) que

se $f_n \xrightarrow{L^1} f$ então alguma subsequência de (f_n) converge a f q.s.

Outro modo de convergência que é frequentemente útil é a convergência em medida. Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, dizemos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, é de **Cauchy em medida** se para todo $\epsilon > 0$ temos

$$\mu\Big(\big\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\big\}\Big) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

e que (f_n) **converge em medida** a f (mensurável) se para todo $\epsilon > 0$ temos

$$\mu\Big(\big\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\big\}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Escrevemos

$$f_n \xrightarrow{m} f \text{ se } f_n \text{ converge a } f \text{ em medida.}$$

Exercício. As sequências (E1), (E3) e (E4) acima convergem a zero em medida. A sequência em (E2) não é de Cauchy em medida. Se uma sequência converge em medida então a sequência é de Cauchy em medida.

Proposição 2.14 *Se $f_n \to f$ em $L^1(X)$, então $f_n \to f$ em medida.*

Prova.

Fixemos $\epsilon > 0$ e consideremos o conjunto $E_{n,\epsilon} = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$. Então,

$$\epsilon\mu(E_{n,\epsilon}) \leq \int_{E_{n,\epsilon}} |f_n - f| \leq \int |f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \clubsuit$$

Teorema 2.10 *Suponha que (f_n) é uma sequência de Cauchy em medida.*

(a) Existe f mensurável tal que $f_n \xrightarrow{m} f$, e existe (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \xrightarrow{q.s.} f$.

(b) Se $f_n \to g$ em medida, então $g = f$ q.s [onde f é como em (a)].

Prova.

Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, para n, m grandes o suficiente temos

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \leq \epsilon.$$

(a) Seja $(g_j) = (f_{n_j})$ uma subsequência de (f_n) satisfazendo $\mu(E_j) \leq 2^{-j}$, onde $E_j = \{x : |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geq 2^{-j}\}$. Cada $F_k = \bigcup_{j\geq k} E_j$ satisfaz a desigualdade

$$\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-k}2 = 2^{1-k}.$$

Dado $x \in F_k^c = \bigcap_{j\geq k} E_j^c$, para $i \geq j \geq k$ temos

$$\textbf{(Teo.2.10.1)} \qquad |g_i(x)-g_j(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x)-g_l(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq 2^{-j}2 = 2^{1-j}.$$

Logo, a sequência $(g_j(x))$ é de Cauchy e convergente, para cada $x \in F_k^c$, onde k é arbitrário. Donde, existe $\lim g_j(x) = f(x)$ para cada $x \in \bigcup_{k\geq 1} F_k^c$. O conjunto

$$F = \Big(\bigcup_{k\geq 1} F_k^c\Big)^c = \bigcap_{k\geq 1} F_k$$

tem medida nula, pois $\mu(F_k) \to 0$. Definindo $f(x) = 0$, para $x \in F$, temos que $g_j\chi_{F^c} \to f$ em todo ponto. Pelo Corolário 2.4, a função f é mensurável. Deduzimos também que $g_j \to f$ q.s.

Retornando à desigualdade (Teo.2.10.1), fixando $x \in F_k^c$ e $j = k$, e impondo $i \to \infty$, obtemos a desigualdade $|g_j(x) - f(x)| \leq 2^{1-j}$. Donde segue que $\{x : |g_j(x) - f(x)| > 2^{1-j}\} \subset F_j$. É então claro que $g_j \xrightarrow{m} f$, pois $\mu(F_j) \to 0$.

Consequentemente, $f_n \xrightarrow{m} f$ pois

$$\Big\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\Big\} \subset \Big\{x : |f_n(x) - g_j(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\Big\} \bigcup \Big\{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\Big\},$$

e as medidas dos conjuntos à direita tendem a zero se n e j tendem a ∞.

(b) Seja g (mensurável) tal que $f_n \xrightarrow{m} g$. Então, para todo n temos

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \subset \Big\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\Big\} \bigcup \Big\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\Big\}.$$

Em (a) vimos que $\mu(\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\})$ tende a zero quando $n \to \infty$. Por hipótese, $\mu(\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\})$ tende a zero quando $n \to \infty$. Assim, obtemos

$$\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) = 0, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Logo, $f = g$ q.s.♣

Corolário 2.7 *Dada* $f_n \xrightarrow{L^1} f$, *existe uma subsequência* (f_{n_j}) *tal que* $f_{n_j} \xrightarrow{q.s.} f$.

Prova.

Segue da Proposição 2.14 e Teorema 2.10 (verifique)♣

2.4.1 Os Três Princípios de Littlewood

> *The extent of knowledge required is nothing like so great as is sometimes supposed. There are three principles, roughly expressible in the following terms: Every [measurable] set is nearly a finite union of intervals; every [measurable] function is nearly continuous; every pointwise convergent sequence of [measurable] functions is nearly uniformly convergent. Most of the results of [the theory] are fairly intuitive applications of these ideas, and the student armed with them should be equal to most occasions when real variable theory is called for. If one of the principles would be the obvious means to settle the problem if it were 'quite' true, it is natural to ask if the 'nearly' is near enough, and for a problem that is actually solvable it generaly is.* J. E. Littlewood.

Embora as noções de conjuntos mensuráveis e funções mensuráveis representem ferramentas novas, não devemos negligenciar suas relações com os antigos conceitos agora substituídos. Littlewood resumiu apropriadamente tais conexões na forma de três princípios que fornecem um guia útil e intuitivo ao estudo inicial da teoria da medida.

(L1) Todo conjunto é aproximadamente uma união finita de intervalos.

(L2) Toda função é aproximadamente contínua.

(L3) Toda sequência convergente é aproximadamente uniformemente convergente.

Os conjuntos e funções citados acima são assumidos, obviamente, mensuráveis. A palavra chave em tais princípios é "aproximadamente", a qual deve ser entendida apropriadamente em cada contexto. Uma versão precisa do primeiro princípio é dada no Teorema 1.8 (em Folland, Proposition 1.20, p. 37).

Uma formulação exata do **Terceiro Princípio de Littlewood** é dada pelo importante e surpreendente resultado abaixo, devido a Severini (1910) e Egoroff (1911). Para melhor apreciar suas hipóteses, vejamos um exemplo.

Exemplo. Se $X = \mathbb{R}$ e $f_n = \chi_{[-n,n]}$, então $f_n \xrightarrow{q.s.} 1$ mas (f_n) não converge uniformemente no complementar de conjuntos limitados.

A dificuldade no exemplo é contornável. O ingrediente faltando é $\mu(X) < \infty$.

Teorema 2.11 Teorema de Severini-Egoroff (abstrato) - O Terceiro Princípio de Littlewood. *Seja $\mu(X) < \infty$. Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis, a valores complexos, tal que $f_n \to f$ q.s. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $E \subset X$ tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre E e $\mu(E^c) < \epsilon$.*

Prova.

Podemos supor que $f_n \to f$ em todo ponto (cheque). Dados k e n, em $\mathbb{N}$, seja

$$E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{ x : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Fixado k, temos que $E_n(k)$ decresce se n cresce, e $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \varnothing$. Por hipótese $\mu(X) < \infty$ e assim $\mu(E_n(k)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dado $\epsilon > 0$ e $k = 1, 2, 3, \ldots$, escolhamos $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tais que $\mu(E_{n_k}(k)) < \epsilon 2^{-k}$ e E definido por

$$E^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k).$$

É fácil ver que $\mu(E^c) < \epsilon$. Para concluir, dado $x \in E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)^c$ e k arbitrário temos que $x \notin E_{n_k}(k)$ e portanto para todo $n \geq n_k$ vale que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

Isto é, $f_n \xrightarrow{unif} f$ sobre E♣

O tipo de convergência citada na conclusão do teorema de Egoroff é às vezes chamada **convergência quase uniforme**. A convergência quase uniforme implica na convergência q.s. e na convergência em medida (Exercício 39 2.4).

O diagrama abaixo resume as relações entre os diferentes tipos de convergência, no caso $\mu(X) < \infty$. As flechas indicam as implicações.

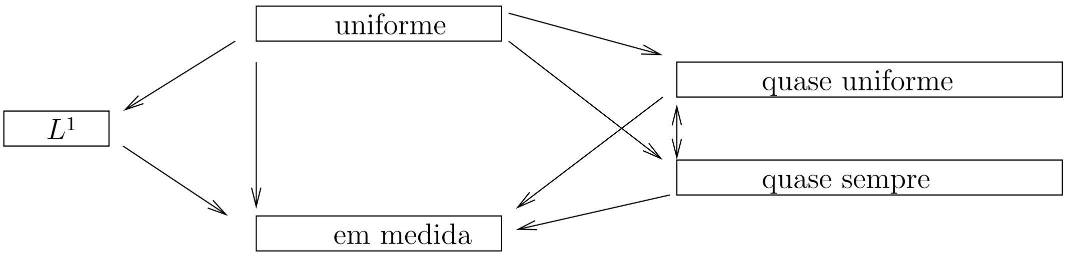

Figura 2.5: Relações entre as convergências, no caso $\mu(X) < \infty$.

O próximo resultado atesta a validade do **Segundo Princípio de Littlewood**. O teorema afirma que, sob hipóteses adequadas, a restrição de uma função mensurável f é uma função contínua a menos de um conjunto de medida pequena. No entanto, não garante um fato bem mais forte: f é a restrição de uma função contínua (a menos de um conjunto de medida pequena). Para tal fato, vide a próxima seção.

A prova abaixo baseia-se no primeiro princípio de Littlewood e é uma adaptação da demonstração (abstrata) de Feldman (1981), vide também Loeb/Talvila (2004), cujas leituras recomendo fortemente (vide bibliografia). Ambas baseiam-se na seguinte idéia: para "transformar" uma função não contínua em uma função contínua, precisamos de alguma forma garantir que $f^{-1}(A)$ seja aberto, quando A é aberto. Se isto não ocorre, então devemos eliminar o que está "atrapalhando". Observemos que, considerando um aberto $B \supset f^{-1}(A)$, o que "atrapalha" para $f^{-1}(A)$ ser exatamente o aberto B é o conjunto

$$B \setminus f^{-1}(A).$$

Ou seja, grosseiramente falando, as descontinuidades devem estar localizadas em $B \setminus f^{-1}(A)$. Ora, descartemos então tais conjuntos $B \setminus f^{-1}(A)$!

Destaque-se que a prova a seguir mostra que o Teorema de Lusin (clássico) pertence à Teoria Geométrica da Medida e não à Teoria da Integração.

Teorema 2.12 Lusin (clássico) - O Segundo Princípio de Littlewood. *Seja $f : E \to \mathbb{C}$ mensurável, com $E \subset \mathbb{R}$, e $\epsilon > 0$. Então, existe um fechado $F \subset E$ tal que*

$$f|_F \ \ \textit{é contínua e} \ \ m(E \setminus F) < \epsilon.$$

Prova (Feldman, 1981; Loeb-Talvila, 2004). Vide comentários acima.

Seja $\{A_n\}_{\mathbb{N}}$ uma base de abertos de $\mathbb{R}^2$ e, B_n aberto em $\mathbb{R}$ e contendo $f^{-1}(A_n)$. Mostremos que $f|_{\mathcal{E}}$ é contínua, onde

$$\mathcal{E} = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}[B_n \setminus f^{-1}(A_n)].$$

Seja $x \in \mathcal{E}$ e qualquer A_N contendo $f(x)$. Logo, $x \in f^{-1}(A_N) \subset B_N$. O conjunto $B_N \cap \mathcal{E}$ é aberto em $\mathcal{E}$, e contém x. Se $y \in B_N \cap \mathcal{E}$, deduzimos que $y \in f^{-1}(A_N)$. Assim, $f(y) \in A_N$. Isto mostra que $f|_{\mathcal{E}}$ é contínua.

Pelo Teorema 1.7 (b) [propriedades de regularidade da medida de Lebesgue-Stieltjes], podemos supor $m[B_n \setminus f^{-1}(A_n)] < \epsilon/2^{n+1}$. Então,

$$m(E \setminus \mathcal{E}) \leq \sum m\big[B_n \setminus f^{-1}(A_n)\big] < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelo Teorema 1.7 (c), existe um fechado $F \subset \mathcal{E}$ tal que $m(\mathcal{E} \setminus F) < \epsilon/2$. Então,

$$f|_F \ \ \text{é contínua e} \ \ m(E \setminus F) \leq m(E \setminus \mathcal{E}) + m(\mathcal{E} \setminus F) < \epsilon \clubsuit$$

Abaixo segue uma demonstração usual do teorema de Lusin (as provas usuais baseiam-se no teorema de Severini-Egoroff), sugerida por Folland (Exercício 44 2.4). Note que a prova abaixo utiliza a teoria da integração, também.

Segunda prova do teorema de Lusin. Suponhamos $E = [a, b]$. Como f é finita, $A_n = \{x : |f(x| \leq n\} \nearrow [a, b]$. Assim, já que $m([a, b]) < \infty$, pelo Teorema 1.1(c) existe N tal que $f|_{A_N}$ é limitada, integrável, e $m([a, b] \setminus A_N) < \epsilon$.

Seja $A = A_N$. Pelo Teorema 2.7(b), existe uma sequência de funções contínuas (g_n) tal que $\int_A g_n \to \int_A f$. Pelo Corolário 2.7, existe uma subsequência (g_{n_j}) tal que $g_{n_j} \xrightarrow{q.s.} f$ sobre A. Trocando (g_n) por (g_{n_j}), assumimos que $g_n \xrightarrow{q.s.} f$ em A.

Pelo teorema de Egoroff, existe $B \subset A$ tal que $g_n|_B \xrightarrow{unif} f|_B$ e $\mu(A \setminus B) < \epsilon$. Deduzimos então que $f|_B$ é contínua. Finalmente, pelo Teorema 1.6, existe um compacto $K \subset B$ tal que $\mu(B \setminus K) < \epsilon$. É claro que $f|_K$ é contínua. É fácil ver que $[a, b] = ([a, b] \setminus A) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus K) \cup K$. Logo, $\mu([a, b] \setminus K) \leq 3\epsilon \clubsuit$

2.4.2 Teoremas de Severini-Egoroff e Lusin Revisitados

Uma interessante discussão do teorema de Egoroff, incluindo algumas condições necessárias e suficientes para a convergência uniforme, se encontra em Bartle.

Em certos casos, o teorema de Lusin pode ser utilizado para caracterizar funções mensuráveis. De fato, Bourbaki define uma função como mensurável se ela satisfaz a conclusão do teorema de Lusin. Vide Cohn, e Wheeden/Zygmund. A versão já dada do teorema de Lusin, não garante o seguinte fato: f é a restrição de uma função contínua (a menos de um conjunto de medida pequena). Provamos no Teorema 2.15 este fato, que é bem mais forte que a versão já dada.

Esta seção será útil ao apresentarmos **Medidas de Radon**- Capítulo 5.

Teorema 2.13 Severini-Egoroff (clássico). *Seja E Lebesgue mensurável, com $m(E) < \infty$. Sejam $f_n : E \to \mathbb{C}$, com $n = 1, 2\ldots$, funções mensuráveis tais que $f_n \xrightarrow{q.s.} f$. Dado $\epsilon > 0$, existe um fechado $F \subset E$ com $f_n \xrightarrow{u} f$ sobre F e $\mu(F^c) < \epsilon$.*

Prova. Exercício.

Para provarmos a versão que segue do teorema de Lusin, primeiro recordemos a versão elementar do célebre teorema de extensão de Tietze.

Teorema 2.14 ("Baby" Tietze). *Seja F um subconjunto fechado em $\mathbb{R}$ e $f : F \to \mathbb{C}$ contínua. Então, existe uma função contínua $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\Phi|_F = f \quad e \quad \sup_{\mathbb{R}} |\Phi(\xi)| \leq \sup_{F} |f(x)|.$$

Prova.

Particionemos $F^c = \dot{\bigcup}_n I_n$ como uma união contável (finita ou não) de intervalos abertos e não vazios $I_n = (a_n, b_n)$, dois a dois disjuntos. É claro que a_n e b_n pertencem a F. Definimos

$$\begin{cases} \Phi(x) = f(x), \quad \text{se } x \in F, \\ \Phi[a_n + t(b_n - a_n)] = f(a_n) + t[f(b_n) - f(a_n)], \ \text{para } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

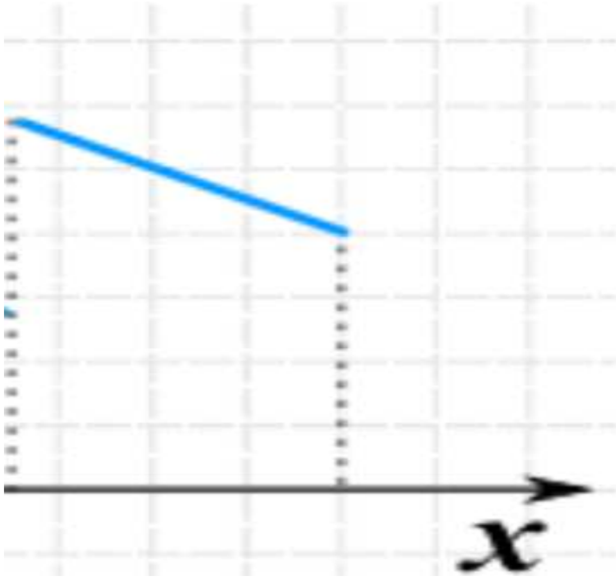

Figura 2.6: A Φ é linear em cada $[a_n, b_n]$, com $\Phi(a_n) = f(a_n)$ e $\Phi(b_n) = f(b_n)$.

Claramente Φ estende f, satisfaz a desigualdade enunciada e é contínua em (a_n, b_n). Ainda mais, Φ é contínua à direita em a_n e à esquerda em b_n.

Dado $p \in F$, mostremos que Φ é contínua à esquerda em p. Dada uma bola aberta O contendo o ponto $\Phi(p) = f(p)$, pela continuidade de f existe um intervalo

$$J = (p - r, p], \text{ com } r > 0, \text{ tal que } f(J \cap F) \subset O.$$

Se $J \cap F = \{p\}$, temos $p = b_n$ para algum n e Φ é contínua à esquerda em b_n.

Se existir $q \in J \cap F$, com $q \neq p$, então $f\big([q,p] \cap F\big) \subset O$, onde O é uma bola aberta e convexa. Assim, pela construção de Φ concluímos que

$$\Phi\big([q,p]\big) \subset O.$$

A continuidade à direita de Φ no ponto p segue imediatamente ao trocarmos a função $f(x)$ pela função $f(-x)$ ♣

Como corolário, mostremos que o suporte da extensão pode ser escolhido próximo de F, tanto no sentido topológico (métrico) como em medida.

Corolário 2.8 *Seja $\epsilon > 0$. Adicionalmente, Φ pode ser escolhida satisfazendo*

(a) supp(Φ) contido no aberto $\{x : d(x; F) < \epsilon\}$.

(b) $m[$supp$(\Phi) \setminus F] < \epsilon$

(c) supp(Φ) é compacto, se F é compacto.

Prova.

Para cada intervalo limitado $[a_n, b_n]$ seja $J_n = (c_n, d_n) \subset [a_n, b_n]$ satisfazendo

$$0 < c_n - a_n < \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \quad \text{e} \quad 0 < b_n - d_n < \frac{\epsilon}{2^{n+2}}.$$

Pomos

$$\Phi(a_n) = f(a_n), \quad \Phi(c_n) = \Phi(d_n) = 0 \;\; \text{e} \;\; \Phi(b_n) = f(b_n),$$

com Φ linear nos subintervalos $[a_n, c_n]$, $[c_n, d_n]$ e $[d_n, b_n]$.

No intervalo $[a_n, b_n = \infty)$, se houver, pomos

$$\Phi(a_n) = f(a_n) \;\; \text{e} \;\; \Phi\left(a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}\right) = 0,$$

com

$$\begin{cases} \Phi \text{ linear em } \left[a_n, c_n = a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}\right] \\ \text{e} \\ \Phi \text{ nula em } \left[a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, d_n = \infty\right). \end{cases}$$

Definimos Φ no intervalo $(-\infty, b_n]$ (se houver) de forma análoga.

É evidente que Φ é contínua em (a_n, b_n), contínua à direita em a_n e contínua à esquerda em b_n. Pela prova do "Baby Tietze", Φ é contínua em $\mathbb{R}$. É claro que Φ satisfaz a desigualdade desejada.

Vejamos as propriedades adicionais.

(a) Se $\Phi(x) \neq 0$, então x pertence ou a F ou a $\bigcup_n [a_n, c_n]$ ou a $\bigcup_n [d_n, b_n]$. Logo,

$$d(x; F) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donde segue

$$\text{supp}(\Phi) \subset \left\{x : d(x; F) \leq \frac{\epsilon}{2}\right\} \subset \{x : d(x; F) < \epsilon\}.$$

(b) Seja $q \in \text{supp}(\Phi) \setminus F$. Então, $q \in F^c$ e assim q pertence a algum (a_n, b_n). Entretanto, $q \in \text{supp}(\Phi)$ e assim $q \in [a_n, c_n] \cup [d_n, b_n]$. Para finalizar, temos

$$m[\text{supp}(\Phi) \setminus F] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^{n+2}} < \epsilon.$$

(c) Trivial♣

A seguir, melhorando o teorema de Lusin (clássico), apresentamos uma versão melhor do segundo princípio de Littlewood.

Teorema 2.15 Teorema de Lusin (O Segundo Princípio de Littlewood). *Seja $f : E \to \mathbb{C}$, Lebesgue mensurável. Para cada $\epsilon > 0$ existe uma função contínua $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e um conjunto fechado $F \subset E$ tal que*

$$\Phi|_F = f \quad e \quad m(E \setminus F) < \epsilon.$$

Adicionalmente, podemos escolher Φ tal que

(a) $\sup\{|\Phi(\xi)| : \xi \in \mathbb{R}\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in E\}$

(b) supp$(\Phi) \subset \{x : d(x; E) < \epsilon\}$.

(c) supp(Φ) é compacto se E é limitado.

(d) $m\big[\text{supp}(\Phi) \setminus E)\big] < \epsilon$.

Prova.

Segue do Lusin clássico, do Teorema de Tietze e de seu corolário (verifique.)♣

2.5 Medidas Produto

Sejam $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ espaços mensuráveis. Na seção 1.2 apresentamos a σ-álgebra produto $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ sobre o produto cartesiano

$$X\times Y.$$

Agora, construímos uma medida sobre a σ-álgebra $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ que é, em um sentido óbvio, o produto das medidas μ e ν.

Para iniciar, definimos um **retângulo** (presumido mensurável) como um conjunto da forma

$$A\times B,\ \text{onde } A\in\mathcal{M} \text{ e } B\in\mathcal{N}.$$

A Proposição 1.2 garante que a σ-álgebra $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ é gerada pela coleção $\mathcal{E}$ de tais retângulos. Isto é, $\sigma(\mathcal{E})=\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. É fácil ver que

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D) \quad \text{e} \quad (A\times B)^c=(A\times B^c)\uplus(A^c\times Y).$$

Isto mostra que $\mathcal{E}$ é uma família elementar (Definição 1.4) de subconjuntos de $X\times Y$. A Proposição 1.5 garante que a coleção $\mathcal{A}$ das uniões finitas e disjuntas de elementos de $\mathcal{E}$ [retângulos (mensuráveis)] é uma álgebra. Ainda, é claro que

$$\mathcal{E}\subset\mathcal{A}\subset\mathcal{M}\bigotimes\mathcal{N}$$

e tal fato garante que a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ coincide com $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. Isto é,

$$\boxed{\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}.}$$

Suponhamos que $A\times B$ é um retângulo e, ainda, dado por uma reunião disjunta contável (finita ou não) de retângulos $A_j\times B_j$. Então, para $x\in X$ e $y\in Y$,

$$\chi_A(x)\chi_B(y)=\chi_{A\times B}(x,y)=\sum\chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y).$$

Integrando em relação a x e utilizando o Teorema 2.3 obtemos

$$\mu(A)\chi_B(y)=\int\chi_A(x)\chi_B(y)\,d\mu(x)=\sum\int\chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)\,d\mu(x)=\sum\mu(A_j)\chi_{B_j}(y).$$

Em seguida, integrando na variável y encontramos a fórmula

(For. 2.5.1) $$\mu(A)\nu(B)=\sum\mu(A_j)\nu(B_j).$$

Aproveitemos tal fórmula. Dado um conjunto E em $\mathcal{A}$ e particionado como

$$E = \dot{\bigcup_j}(A_j \times B_j),$$

uma união disjunta e contável finita ou infinita (o caso infinito se revelará útil logo mais) de retângulos $A_j \times B_j$, definimos

$$\boxed{\pi(E) = \sum \mu(A_j)\nu(B_j).}$$

Mostremos que a função $\pi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ está bem definida (vide figura abaixo). De fato, se E é também uma união contável disjunta de $C_{k's} \times D_{k's}$, temos o

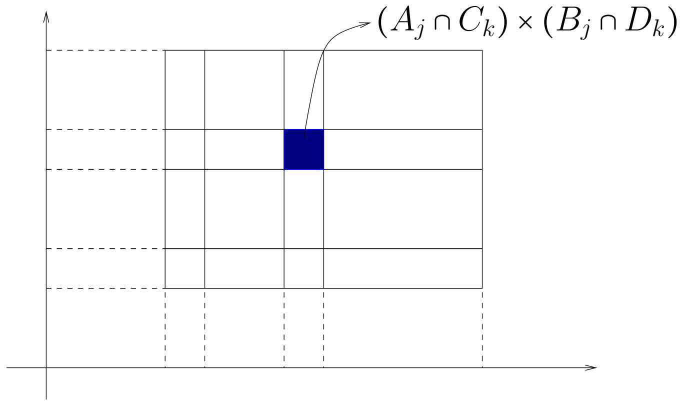

Figura 2.7: Ilustração ao particionamento ou de $A_j \times B_j$ ou de $C_k \times D_k$.

refinamento comum

$$E = \dot{\bigcup}(A_j \cap C_k) \times (B_j \cap D_k)$$

e então, pela fórmula (For. 2.5.1),

$$\sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) = \sum_{j,k} \mu(A_j \cap C_k)\nu(B_j \cap D_k) = \sum_k \mu(C_k)\nu(D_k).$$

É bem fácil ver que π é uma pré-medida (Definição 1.10) sobre a álgebra $\mathcal{A}$. De fato, se

$$\dot{\bigcup_{\mathbb{N}}} E_j = E \in \mathcal{A}, \quad \text{com cada} \quad E_j \in \mathcal{A},$$

então cada E_j é uma reunião finita de retângulos disjuntos $A_k^j \times B_k^j$ e portanto

$$E = \dot{\bigcup_{j,k}} A_k^j \times B_k^j.$$

Donde segue, pela definição de π (dada acima),

$$\pi(E) = \sum_{j,k} \mu(A_k^j)\nu(B_k^j) = \sum_j \pi(E_j).$$

Devido ao Teorema 1.4(a) segue que π gera uma **medida exterior** π^* sobre

$$X \times Y$$

cuja restrição à σ-álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ é uma medida que estende π. Chamamos esta medida de **produto** de μ e ν e a denotamos por

$$\mu \times \nu.$$

Isto é,

$$(\mu \times \nu)(E) = \inf \left\{ \sum_j \pi(E_j) : E_j \in \mathcal{A} \text{ e } E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} E_j \right\}, \text{ para cada } E \in \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}.$$

Temos então o mnemônico, em que $\imath$ e $\jmath$ são inclusões,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\imath"'] & {[0,\infty]} \\ \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \arrow[r, "\jmath"'] \arrow[ur, "\mu\times\nu"] & \mathcal{P}(X \times Y). \arrow[u, "\pi^*"'] \end{tikzcd}$$

Ainda, como cada conjunto na álgebra $\mathcal{A}$ é uma reunião finita e disjunta de retângulos, encontramos a fórmula, válida para cada E na σ-álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$,

(For.2.5.2) $$(\mu \times \nu)(E) = \inf \left\{ \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) : A_j \in \mathcal{M}, B_j \in \mathcal{N} \text{ e } E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} (A_j \times B_j) \right\}.$$

Ainda mais, se μ e ν são σ-finitas, digamos

$$X = \bigcup_{\mathbb{N}} A_j \quad \text{com} \quad \mu(A_j) < \infty \quad \text{e} \quad Y = \bigcup_{\mathbb{N}} B_k \quad \text{com} \quad \nu(B_k) < \infty,$$

então temos

$$X \times Y = \bigcup_{j,k} (A_j \times B_k) \text{ e } (\mu \times \nu)(A_j \times B_k) < \infty,$$

e constatamos que também $\mu \times \nu$ é uma medida σ-finita. Neste caso, graças ao Teorema "de pré-medida a medida" 1.4(c) concluímos que $\mu \times \nu$ é a única medida sobre a σ-álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ [= $\sigma(\mathcal{A})$] satisfazendo

$$\boxed{(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{para todo retângulo} \quad A \times B.}$$

Pois, sob tais condições, $\mu \times \nu$ é a única extensão de π (certifique-se).

A mesma construção se aplica a uma quantidade finita qualquer de fatores. Isto é, suponhamos que $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$, com $j = 1, \ldots, n$, são espaços mensuráveis. Definindo um retângulo como um conjunto $A_1 \times \cdots \times A_n$, com $A_j \in \mathcal{M}_j$, segue que a coleção $\mathcal{A}$ das reuniões finitas e disjuntas de retângulos é uma álgebra e o mesmo procedimento acima produz uma medida

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$$

sobre $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$ tal que

$$(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(A_j).$$

Se as medidas $\mu_{j's}$ são σ-finitas, de forma tal que a extensão da coleção $\mathcal{A}$ até $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$ é unicamente determinada, as propriedades associativas certamente aguardadas são válidas. Por exemplo, identificando $X_1 \times X_2 \times X_3$ com $(X_1 \times X_2) \times X_3$ temos

$$\mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2 \bigotimes \mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2) \bigotimes \mathcal{M}_3$$

[o primeiro produto é gerado por retângulos da forma $A_1 \times A_2 \times A_3$, com $A_j \in \mathcal{M}_j$, e o segundo produto por retângulos da forma $B \times A_3$, com $B \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ e $A_3 \in \mathcal{M}_3$], e também temos $\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$ [tais produtos coincidem sobre retângulos $A_1 \times A_2 \times A_3$ e então, por unicidade, coincidem sobre todo o domínio]. Vide Exercício 45 2.5.

Os resultados a seguir admitem extensões óbvias para produtos de medidas com n fatores. Entretanto, por simplicidade, abordaremos o caso $n = 2$.

Consideremos dois espaços de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Seja $E \subset X \times Y$. Para $x \in X$ e $y \in Y$, definimos a **x-seção** E_x e a **y-seção** E^y, ambas de E, por

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \qquad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

[Interpretamos E_x como uma seção "vertical" e E^y como uma seção "horizontal".]

Dada $f : X \times Y \to \mathbb{C}$, definimos a **x- seção** f_x e a **y-seção** f^y, ambas de f,

$$f_x : Y \to \mathbb{C}, \text{ por } f_x(y) = f(x, y) \quad \text{e} \quad f^y : X \to \mathbb{C} \text{ por } f^y(x) = f(x, y).$$

Proposição 2.15 *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$*, espaços mensuráveis.*

(a) Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*, então* $E_x \in \mathcal{N}$*, para todo* $x \in X$*, e* $E^y \in \mathcal{M}$*, para todo* $y \in Y$*.*

(b) Se f *é* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*-mensurável, então* f_x *é* $\mathcal{N}$*-mensurável, para todo* $x \in X$*, e* f^y *é* $\mathcal{M}$*-mensurável para todo* $y \in Y$*.*

Prova.

(a) Seja $\mathcal{R}$ a coleção de todos os subconjuntos E de $X \times Y$ tais que $E_x \in \mathcal{N}$, para todo x, e $E^y \in \mathcal{M}$ para todo y. É óbvio que $\mathcal{R}$ contém todos os retângulos $[(A \times B)_x$ é igual a A ou $\varnothing$, conforme $x \in A$ ou $x \in A^c]$. Visto que

$$\left(\bigcup_j E_j\right)_x = \bigcup_j (E_j)_x \quad \text{e} \quad (E^c)_x = (E_x)^c,$$

e analogamente para as y-seções, deduzimos que $\mathcal{R}$ é uma σ-álgebra. Donde segue $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{R}$, o que prova (a).

(b) Segue de (a) pois,

$$(f_x)^{-1}(C) = [f^{-1}(C)]_x \quad \text{e} \quad (f^y)^{-1}(C) = [f^{-1}(C)]^y \clubsuit$$

Antes de prosseguir, provemos um lema. Definimos uma **classe monótona** sobre um espaço X como um subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ que é fechado para a união de sequências crescentes e para a intersecção de sequências decrescentes [isto é, se $E_j \in \mathcal{C}$ e $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ então $\cup_j E_j \in \mathcal{C}$ e, analogamente para intersecções]. É claro que toda σ-álgebra é uma classe monótona. Ainda mais, a intersecção de uma família arbitrária de classes monótonas é também uma classe monótona. Portanto, para toda coleção $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ existe a menor classe monótona contendo $\mathcal{E}$, a qual chamamos de **classe monótona gerada por** $\mathcal{E}$.

Lema 2.1 (Classe Monótona). *Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de subconjuntos de* X*. A classe monótona* $\mathcal{C}$*, gerada por* $\mathcal{A}$*, concide com a* σ*-álgebra* $\sigma(\mathcal{A})$*, gerada por* $\mathcal{A}$*.*

Prova.

- Preparação. Como $\sigma(\mathcal{A})$ é uma classe monótona, segue $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Para provar $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$, vejamos que $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra. Dado $E \in \mathcal{C}$, definamos

$$\mathcal{C}(E) = \{F \in \mathcal{C} : \ E \smallsetminus F, \ F \smallsetminus E \text{ e } E \cap F \text{ pertencem a } \mathcal{C}\}.$$

É óbvio que $\varnothing$ e E pertencem a $\mathcal{C}(E)$. Ainda, $F \in \mathcal{C}(E)$ se e só se $E \in \mathcal{C}(F)$.

- ◇ $\mathcal{C}(E)$ é uma classe monótona. Suponha (F_n) crescente em $\mathcal{C}(E)$. Então $E \setminus (\bigcup F_n) = \bigcap(E \setminus F_n)$, intersecção de uma sequência decrescente em $\mathcal{C}$, pertence a $\mathcal{C}$. Também os conjuntos

$$(\bigcup F_n) \setminus E = \bigcup(F_n \setminus E) \ \text{ e } \ (\bigcup F_n) \bigcap E = \bigcup(F_n \bigcap E),$$

ambos uniões de sequências crescentes em $\mathcal{C}$, pertencem a $\mathcal{C}$. Portanto,

$$\bigcup F_n \in \mathcal{C}(E).$$

Verifique para uma sequência (F_n) decrescente em $\mathcal{C}(E)$.

- ◇ $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(E)$, para todo $E \in \mathcal{C}$. Se E pertence à algebra $\mathcal{A}$, é óbvio que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E)$ e então, como $\mathcal{C}$ é a menor classe monótona contendo $\mathcal{A}$, segue que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(E)$. Dessa forma, dado $F \in \mathcal{C}$ temos que

$$F \in \mathcal{C}(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

Logo, por uma das observações iniciais, $E \in \mathcal{C}(F)$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Donde segue $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(F)$, para todo $F \in \mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(F)$ para todo $F \in \mathcal{C}$.

- ◇ $\mathcal{C}$ é uma álgebra. Pelo provado imediatamente acima, dados $E \in \mathcal{C}$ e $F \in \mathcal{C}$, temos $E \setminus F \in \mathcal{C}$ e $E \cap F \in \mathcal{C}$. Ainda, $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Em consequência, $\mathcal{C}$ é fechado para os complementares [se $E \in \mathcal{C}$, então $E^c = X \setminus E \in \mathcal{C}$] e para as uniões finitas [dados $E, F \in \mathcal{C}$, então $E \bigcup F = (E^c \bigcap F^c)^c \in \mathcal{C}$].

- ◇ $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra. Dada uma sequência (E_n) em $\mathcal{C}$, temos

$$\bigcup_{\mathbb{N}} E_j = E_1 \bigcup (E_1 \cup E_2) \bigcup (E_1 \cup E_2 \cup E_3) \bigcup \cdots.$$

Então, como $\mathcal{C}$ é fechada para reuniões finitas e para sequências crescentes, concluímos que

$$\bigcup_j E_j \in \mathcal{C} \clubsuit$$

Chegamos agora aos principais resultados desta seção, os quais relacionam integrais sobre $X \times Y$ com integrais sobre X e sobre Y.

Teorema 2.16 *Sejam* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *e* $(Y,\mathcal{N},\nu)$ *espaços de medidas* σ*-finitas. Dado* E *em* $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$*, as funções* $x\mapsto\nu(E_x)$ *e* $y\mapsto\mu(E^y)$ *são mensuráveis e*

(For. 2.16.1) $$(\mu\times\nu)(E)=\int_X \nu(E_x)\,d\mu(x)=\int_Y \mu(E^y)\,d\nu(y).$$

Ainda mais,

$$\nu(E_x)=\int \chi_E(x,y)d\nu(y) \quad e \quad \mu(E^y)=\int \chi_E(x,y)d\mu(x).$$

Prova.

- O caso μ e ν finitas.

  Seja $\mathcal{C}$ a coleção de todos os conjuntos em $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ para os quais as fórmulas For. 2.16.1 são verdadeiras. Para um retângulo $E=A\times B$, é claro que $\nu(E_x)=\chi_A(x)\nu(B)$ e $\mu(E^y)=\mu(A)\chi_B(y)$ e assim deduzimos $E\in\mathcal{C}$. Pela aditividade, a álgebra das reuniões finitas de retângulos disjuntos [recordemos que tal álgebra gera $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$] está contida em $\mathcal{C}$. Ainda mais, pelo Lema 2.2, a classe monótona gerada por esta álgebra coincide com $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. Para obtermos $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\subset\mathcal{C}$, basta então vermos que $\mathcal{C}$ é uma classe monótona.

  Consideremos uma sequência crescente (E_n) em $\mathcal{C}$ e o conjunto $E=\bigcup_n E_n$. As funções $f_n(y)=\mu[(E_n)^y]$ são mensuráveis e $f_n(y)\nearrow f(y)=\mu(E^y)$. Assim, f é mensurável e gratos ao teorema da convergência monótona obtemos

  $$\int_Y \mu(E^y)\,d\nu(y)=\lim\int_Y \mu[(E_n)^y]\,d\nu(y)=\lim(\mu\times\nu)(E_n)=(\mu\times\nu)(E).$$

  Analogamente, $(\mu\times\nu)(E)=\int\nu(E_x)\,d\mu(x)$. Logo, $\bigcup_n E_n\in\mathcal{C}$.

  De forma similar, se (E_n) é uma sequência decrescente em $\mathcal{C}$, então a função $y\mapsto\mu[(E_1)^y]$ é limitada, pela constante $\mu(X)$, e graças ao teorema da convergência dominada concluímos que $\bigcap_n E_n\in\mathcal{C}$. Por fim, $\mathcal{C}$ é monótona.

- O caso μ e ν σ-finitas.

  Escrevamos $X\times Y$ como uma reunião de uma sequência crescente $(X_j\times Y_j)$ de retângulos de medida finita. Se $E\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, o argumento anterior se aplica ao conjunto $E\cap(X_j\times Y_j)$, para cada j, e então gratos à identidade $\nu\{[E\bigcap(X_j\times Y_j)]_x\}=\chi_{X_j}(x)\nu(E_x\bigcap Y_j)$ [se $x\notin X_j$ temos $0=0$], encontramos

  $$\mu\times\nu\big[E\cap(X_j\times Y_j)\big]=\int\chi_{X_j}(x)\nu(E_x\cap Y_j)\,d\mu(x)=\int\chi_{Y_j}(y)\mu[E^y\cap X_j)]\,d\nu(y).$$

  Aplicando o teorema da convergência monótona encerramos este caso♣

Teorema 2.17 (Fubini-Tonelli). *Consideremos $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ dois espaços de medidas σ-finitas.*

(a) (Tonelli) Seja $f \in L^+(X \times Y)$. Então as funções

$$g(x) = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad e \quad h(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$

pertencem a $L^+(X)$ e $L^+(Y)$, respectivamente, e

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y).$$

(b) (Fubini) Consideremos uma função f integrável em $X \times Y$. Então a função $f_x \in L^1(Y)$ q.s. sobre X e a função $f^y \in L^1(X)$ q.s. sobre Y. Escrevamos

$$g(x) = \int_Y f_x\, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad e \quad h(y) = \int_X f^y\, d\mu = \int_X f(x,y)\, d\mu(x),$$

respectivamente definidas q.s. sobre X e Y. Segue então que a função $g \in L^1(X)$, a função $h \in L^1(Y)$ e a fórmula dada em (a) é válida.

Prova.

(a) Pelo Teorema 2.16, as fórmulas são válidas se f é uma função característica e então, por linearidade, são também válidas para funções simples positivas. Se $f \in L^+(X\times Y)$, sabemos que existe uma sequência (φ_n) de funções simples positivas tal que $\varphi_n \nearrow f$ pontualmente. Fixada tal (φ_n), pelo Teorema 2.16 as correspondentes funções $g_n(x)$ e $h_n(y)$ são mensuráveis e, pelo teorema da convergência monótona segue que $g_n \nearrow g$ e $h_n \nearrow h$, ambas pontualmente. Logo, as funções g e h são mensuráveis e satisfazem

$$\int_X g\, d\mu = \lim \int_X g_n\, d\mu = \lim \int_{X\times Y} \varphi_n\, d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu),$$
$$\int_Y h\, d\nu = \lim \int_Y h_n\, d\nu = \lim \int_{X\times Y} \varphi_n\, d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu),$$

como anunciado. Isto conclui o teorema de Tonelli e mostra que

$$\text{se } \; f \in L^+(X\times Y) \; \text{ e } \; \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) < \infty,$$

então temos $g < \infty$ q.s. e $h < \infty$ q.s. Isto é, $f_x = f(x,\cdot) \in L^1(Y)$ q.s. em X e $f^y = f(\cdot,y) \in L^1(X)$ q.s. em Y.

(b) Basta aplicar o teorema de Tonelli às funções $(\mathrm{Re} f)^\pm$ e $(\mathrm{Im} f)^\pm$♣

Algumas observações são necessárias.

Quatro Comentários.

◇ Geralmente, escrevemos brevemente

$$\int_Y \left[\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right] d\nu(y) = \iint f(x,y)\, d\mu(x) d\nu(y) = \iint f\, d\mu\, d\nu.$$

◇ A hipótese de σ-finitude é necessária (vide exercício 46 2.5).

◇ A hipótese $f \in L^+(X \times Y)$ ou $f \in L^1(\mu \times \nu)$ é necessária, por dois motivos.

Primeiro, é possível que as funções f_x e f^y sejam mensuráveis, para todo x e para todo y, respectivamente, e que as (respectivas) integrais iteradas

$$\iint f\, d\mu\, d\nu \quad \text{e} \quad \iint f\, d\nu\, d\mu$$

existam mesmo se f não é uma função $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mensurável. No entanto, tais integrais iteradas não precisam ser iguais (vide exercício 47 2.5).

Segundo, se f é positiva, é possível que as funções f_x e f^y sejam ambas integráveis, para todo x e para todo y, e que as (respectivas) integrais iteradas $\iint f\, d\mu\, d\nu$ e $\iint f\, d\nu\, d\mu$ existam mesmo se

$$\int |f| d(\mu \times \nu) = \infty.$$

Destaquemos que, uma vez mais, as integrais iteradas não precisam ser iguais (vide exercício 48 2.5).

◇ Os teoremas de Fubini e de Tonelli são frequentemente utilizados em conjunto. Tipicamente, desejamos reverter a ordem de integração em uma integral dupla

$$\iint f\, d\mu\, d\nu.$$

Primeiro, verificamos que

$$\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) < \infty$$

utilizando o teorema de Tonelli para computar tal integral como uma integral iterada. *Então*, aplicamos o teorema de Fubini para concluir a igualdade

$$\iint f\, d\mu\, d\nu = \iint f\, d\nu\, d\mu.$$

Vide exercícios em Folland, 2.6, pp 76–77.

Mesmo que μ e ν sejam medidas completas, a medida produto $\mu\times\nu$ geralmente não é completa. De fato, suponha que exista um conjunto não vazio $A \in \mathcal{M}$ tal que

$$\mu(A) = 0 \text{ e que } \mathcal{N} \neq \mathcal{P}(Y)$$

(por exemplo, $\mu = \nu = m$ com m a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$). Dado um conjunto $E \in \mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{N}$, pela Proposição 2.15(a) temos que $A \times E \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Entretanto,

$$A \times E \subset A \times Y \text{ sendo que } (\mu \times \nu)(A \times Y) = \mu(A)\nu(Y) = 0.$$

Se desejamos trabalhar com medidas completas, é natural considerarmos o completamento da medida produto $\mu \times \nu$. Neste contexto, a relação entre a mensurabilidade de uma função definida no produto cartesiano $X\times Y$ e a mensurabilidade das x-seções e das y-seções da função em questão não é tão simples. Mesmo assim, felizmente o teorema de Fubini-Tonelli é ainda válido se convenientemente reformulado. A seguir, apresentamos tal reformulação.

Teorema 2.18 (Fubini-Tonelli para Medidas Completas). *Consideremos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dois espaços de medidas σ-finitas e completas. Denotemos por $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ o completamento de $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$. Seja f uma função $\mathcal{L}$-mensurável e suponhamos que*

$$(a)\ f \geq 0 \quad ou \quad (b)\ f \in L^1(\lambda).$$

Então, a função f_x é $\mathcal{N}$-mensurável q.s. em X e f^y é $\mathcal{M}$-mensurável q.s. em Y. Se a hipótese (b) ocorre, então f_x e f^y são também integráveis, para quase todo x e para quase todo y. Ainda mais, as funções

$$x \mapsto \int_Y f_x \, d\nu \quad e \quad y \mapsto \int_X f^y \, d\mu$$

são mensuráveis, e sob a hipótese (b) também integráveis e neste caso temos

$$\int_{X\times Y} f \, d\lambda = \iint f(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) = \iint f(x,y) \, d\nu(y) \, d\mu(x).$$

Prova. Exercício 49 2.5.

É interessante destacar a grande diferença entre os teoremas de Fubini na integração de Riemann e o teorema de Fubini em medida abstrata.

O teorema de Fubini em espaços abstratos é mais geral que os teoremas de Fubini da integração (própria e imprópria) de Riemann e também muito mais poderoso. O teorema de Fubini abstrato não envolve topologia, a função não precisa ser necessariamente limitada, a classe de domínios onde a função está definida (esta é, de fato, a família dos conjuntos mensuráveis) é possivelmente bastante ampla, e permite mudar a ordem de integração sob poucas condições. Em particular, se $f : X \times Y \to [0, \infty)$ é Lebesgue integrável então as integrais

$$\int f(x,y)d\mu \text{ e } \int f(x,y)d\nu$$

existem [em $\overline{\mathbb{R}}$] e esta propriedade não vale em geral na integração de Riemann. Vide M. Spivak, Calculus on Manifolds, Fubini's Theorem, Remark 4.

A bastante forte propriedade associativa para somas não ordenadas é análoga ao teorema de Fubini em espaços abstratos. De fato, a associatividade para somas enumeráveis é exatamente o teorema de Fubini para conjuntos (espaços) enumeráveis com a medida de contagem [notemos que tais espaços são σ-finitos].

Destaque-se também que a prova do teorema de Fubini em medidas abstratas é bastante elaborada. Isto não ocorre dentro da teoria de Riemann. De fato, segundo a integração de Riemann e considerando uma função **contínua**

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

é bem simples provar em cursos básicos de Cálculo (na graduação) as identidades

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx.$$

Já com um pouco de esforço, obtém-se o teorema de Fubini para uma função

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} \text{ Riemann integrável.}$$

Vide M. Spivak, Calculus on Manifolds.

Teoremas de Fubini, segundo a integração imprópria de Riemann, para funções

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

são muito importantes (mas, em geral, omitidos nos livros textos). Vide

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Fourier2.pdf`, seções 2.7 e 2.10.

2.6 A Integral de Lebesgue n-dimensional

A medida de Lebesgue m^n sobre $\mathbb{R}^n$ é o completamento do produto da medida de Lebesgue, sobre $\mathbb{R}$, por si mesma n vezes. Isto é, m^n é o completamento de $m \times \cdots \times m$ sobre

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \bigotimes \cdots \bigotimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

ou, equivalentemente (verifique), o completamento de $m \times \cdots \times m$ sobre

$$\mathcal{L} \bigotimes \cdots \bigotimes \mathcal{L}.$$

O domínio $\mathcal{L}^n$ de m^n é a classe dos conjuntos **Lebesgue mensuráveis** em $\mathbb{R}^n$. Às vezes, consideraremos m^n como uma medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, uma subclasse de $\mathcal{L}^n$. Quando não há risco de equívocos, em geral omitimos o expoente n e escrevemos m para m^n. Ainda, como no caso $n = 1$, escrevemos

$$\int f(x)dx \quad \text{para} \quad \int f\,dm.$$

Para iniciar, estendamos alguns dos resultados em 1.5 ao caso n-dimensional. No que segue, dado $E = \prod_{j=1}^{n} E_j$ um retângulo em $\mathbb{R}^n$ nos referimos aos conjuntos E_j como **lados** ou **arestas** de E. Se os lados de E são intervalos, dizemos que E é um **paralelepípedo** (com lados paralelos aos hiperplanos coordenados).

Teorema 2.19 (**Propriedades de Regularidade**) *Seja $E \in \mathcal{L}^n$.*

(a) $m(E) = \inf\{m(O) : O \supset E \text{ e } O \text{ é aberto}\}$

(b) $m(E) = \sup\{m(K) : K \subset E \text{ e } K \text{ é compacto}\}$.

(c) Para todo $\epsilon > 0$, existe um aberto $O \supset E$ tal que $m(O \setminus E) < \epsilon$.

(d) $E = G \setminus (G \setminus E)$, com G um G_δ e $m(G \setminus E) = 0$.

(e) Para todo $\epsilon > 0$, existe um fechado $F \subset E$ tal que $m(E \setminus F) < \epsilon$.

(f) $E = H \bigcup (E \setminus H)$ com H um F_σ e $m(E \setminus H) = 0$.

(g) Se $m(E) < \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe uma coleção finita $P_1, \ldots, P_N$ de paralelepípedos abertos disjuntos tais que

$$m\left[E \Delta \left(\dot{\bigcup_{j=1}^{N}} P_j\right)\right] < \epsilon.$$

Prova.

(a) Podemos supor $m(E) < \infty$. Pela definição de produtos de medidas, vide (For.2.5.2), existe uma sequência (R_j) de retângulos tal que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \quad \text{e} \quad \sum m(R_j) \leq m(E) + \epsilon.$$

Aplicando o Teorema 1.6 aos lados de R_j obtemos um retângulo $O_j \supset R_j$ cujos lados são conjuntos abertos e

$$m(O_j) \leq m(R_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Então, o aberto $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ contém E e

$$m(O) \leq \sum m(O_j) \leq m(E) + 2\epsilon.$$

(b) É evidente que $m(E) \geq m(K)$, para todo compacto $K \subset E$.

◇ Caso E limitado. Dado $\epsilon > 0$, por (a) existe O aberto satisfazendo

$$O \supset \overline{E} \setminus E \quad \text{e} \quad m(O) \leq m(\overline{E} \setminus E) + \epsilon.$$

Podemos supor O limitado. Assim, $m[O \setminus (\overline{E} \setminus E)] \leq \epsilon$. Por outro lado, $K = \overline{E} \setminus O$ é compacto e $K \subset E$. É fácil mostrar que $E \setminus K \subset O \setminus (\overline{E} \setminus E)$. Donde segue

$$m(E) - m(K) \leq \epsilon.$$

◇ Caso E ilimitado. Cada $E_j = E \cap B(0;j)$ é limitado e $m(E_j) \nearrow m(E)$. Existe um compacto $K_j \subset E_j$ tal que

$$|m(E_j) - m(K_j)| < \frac{1}{j}.$$

Donde segue

$$\lim m(K_j) = \lim \Big[m(E_j) + [m(K_j) - m(E_j)] \Big] = m(E).$$

(c) O caso E limitado é trivial, por (a). Se E é ilimitado, cada $E_j = E \cap B(0;j)$ é limitado e $m(E_j) \nearrow m(E)$. Logo, existe O_j aberto e contendo E_j tal que

$$m(O_j \smallsetminus E_j) < \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Então,

$$O = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j \supset E \quad \text{e} \quad m(O \smallsetminus E) < \sum \frac{\epsilon}{2^j} \leq \epsilon.$$

(d) Segue trivialmente de (c) [cheque].

(e) Segue de (c) aplicado a $E^c \in \mathcal{L}^n$.

(f) Segue trivialmente de (e).

(g) Seja (O_j) a cobertura aberta de E na prova de (a). Logo, $m(\bigcup O_j) < \infty$. Cada lado de O_j é uma reunião enumerável de intervalos abertos e podemos para cada um dos lados escolher uma quantidade finita destes intervalos e então com todos estes intervalos formarmos uma reunião finita S_j de paralelepípedos abertos satisfazendo

$$S_j \subset O_j \quad \text{e} \quad m(S_j) \geq m(O_j) - \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Se N é grande o suficiente, então a "cauda"

$$\sum_{j=N}^{+\infty} m(O_j)$$

é menor que ϵ e obtemos

$$m\left(E \smallsetminus \bigcup_{j=1}^{N} S_j\right) \leq m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} O_j\right) + m\left(\bigcup_{j=1}^{N} (O_j \smallsetminus S_j)\right) \leq 2\epsilon$$

e, ainda,

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{N} S_j \smallsetminus E\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} O_j \smallsetminus E\right) \leq \epsilon.$$

Donde segue

$$m\left[E\Delta\left(\bigcup_{j=1}^{N} S_j\right)\right] \leq 3\epsilon,$$

sendo que

$$S = \bigcup_{j=1}^{N} S_j$$

é uma união finita de paralelepípedos abertos.

[Para o que segue, pode ser útil acompanhar pela figura abaixo.] Utilizando os hiperplanos paralelos aos planos coordenados passando por cada um dos vértices de cada um dos paralelepípedos, particionamos S como uma união finita de paralelepípedos abertos disjuntos

$$P_1, \ldots, P_p$$

e um conjunto nulo (contido na união dos hiperplanos).

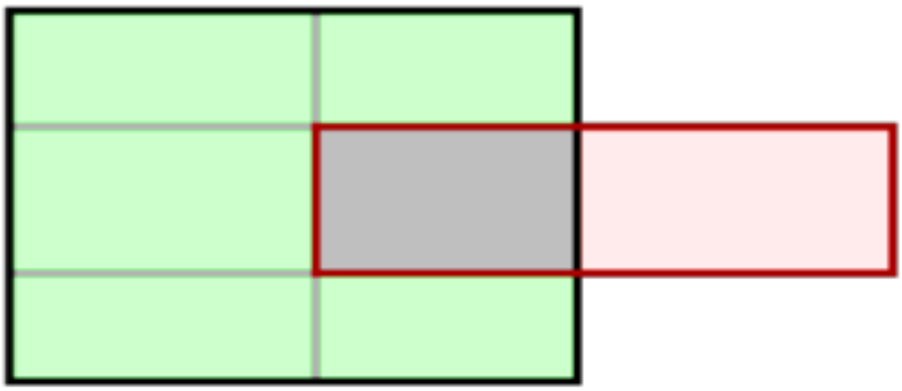

Figura 2.8: Uma disposição de dois retângulos (no sentido usual) que gera sete sub-retângulos.

Tal coleção de paralelepípedos nos é suficiente♣

Teorema 2.20 [Aproximação básica em $L^1(m)$]. *Seja $f \in L^1(m)$ e $\epsilon > 0$.*

(a) Existe uma função simples

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{P_j}, \text{ com cada } P_j \text{ um paralelepípedo,}$$

tal que

$$\int |f - \varphi| \, dm < \epsilon.$$

(b) Existe uma função g contínua e de suporte compacto tal que

$$\int |f - g| \, dm < \epsilon.$$

Prova.

(a) Analogamente ao Teorema 2.7(a), existe uma função simples $\psi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}$ tal que

$$\int |f - \psi| \, dm < \epsilon.$$

Podemos supor todo $a_j \neq 0$ e neste caso temos $m(E_j) < \infty$, pois $\psi \in L^1$. Pelo Teorema 2.19(g), encontramos uma união disjunta de paralelepípedos $S_j = P_1 \cup \cdots \cup P_{J(j)}$ satisfazendo

$$m\Big(E_j \Delta S_j\Big) < \frac{\epsilon}{|a_1| + \cdots + |a_N|}.$$

Sob tal condição segue

$$\int |\chi_{E_j} - \chi_{S_j}| = m(E_j \Delta S_j) < \frac{\epsilon}{|a_1| + \cdots + |a_N|}.$$

Então, a função simples $\varphi = \sum a_j \chi_{S_j}$ satisfaz

$$\int |\psi - \varphi| < \epsilon.$$

Logo,

$$\int |\varphi - f| \leq 2\epsilon.$$

É claro que φ é combinação linear finita de características de paralelepípedos.

(b) Por (a), basta mostrar que a função χ_P, onde P é um paralelepípedo aberto e limitado $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ é aproximável em L^1 por funções contínuas de suporte compacto.

Seja $\epsilon > 0$ e pequeno o suficiente.

Consideremos a "função trapezoidal" $f_j : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por

$$f_j = \begin{cases} 1, \text{ sobre } (a_j + \epsilon, b_j - \epsilon), \\ 0, \text{ sobre } (-\infty, a_j] \bigcup [b_j, +\infty), \text{ e} \\ \text{linear no complementar.} \end{cases}$$

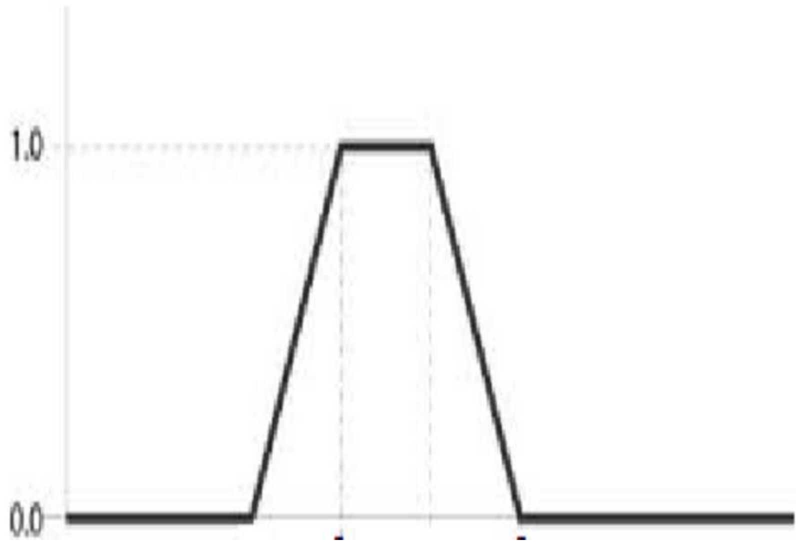

Figura 2.9: O gráfico da "função trapezoidal" f_j.

É claro que

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

é contínua de suporte compacto e

$$\int |f - \chi_P| \le (2\epsilon)^n \clubsuit$$

(Medida de Lebesgue) X (Conteúdo de Jordan). Comparemos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ com a correlata teoria da medida dada em livros básicos.

A seguir, um **cubo** em $\mathbb{R}^n$ é um paralelepípedo fechado cujos lados tem igual comprimento. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja $\mathcal{C}_k$ a coleção dos cubos cujos lados tem comprimento $1/2^k$ e cujos vértices pertencem à grade

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{2^k}\right)^n = \frac{\mathbb{Z}}{2^k} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}}{2^k}.$$

Isto é, o cubo

$$C = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j] \text{ pertence a } \mathcal{C}_k$$

se e somente se $2^k a_j$ e $2^k b_j$ são inteiros e

$$b_j - a_j = \frac{1}{2^k}.$$

O espaço todo é a reunião dos cubos na coleção $\mathcal{C}_k$ e tais cubos tem interiores disjuntos (i.e., "non-overlapping" ou sem sobreposição).

Os cubos em $\mathcal{C}_{k+1}$, são subcubos dos cubos em $\mathcal{C}_k$ e são obtidos bisectando os lados dos cubos em $\mathcal{C}_k$.

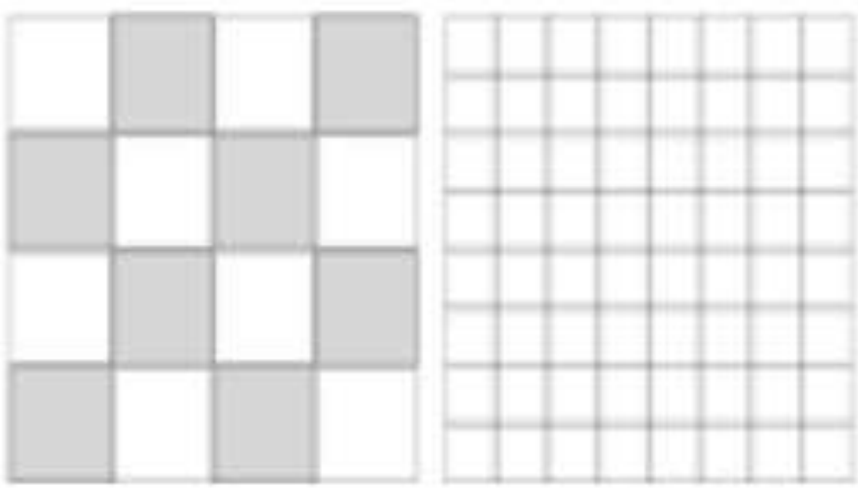

Figura 2.10: No plano cartesiano. Os dezesseis cubos (à esquerda) da coleção $\mathcal{C}_k$ geram, após bisecção, 64 cubos (sub-cubos à direita) na coleção $\mathcal{C}_{k+1}$.

A **coleção dos cubos diádicos** é a reunião

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k.$$

Fixado k e um cubo C em $\mathcal{C}_k$ então os cubos em $\mathcal{C}_{k+1}$ ou são sub-cubos de C ou tem interior disjunto do interior de C.

Por conseguinte, dados dois cubos diádicos, ou um deles está contido no outro ou seus interiores são disjuntos.

Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, definimos as aproximações interiores e exteriores de E

$$\underline{A}(E,k) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_k \text{ e } C \subset E} C, \qquad \overline{A}(E,k) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_k \text{ e } C \cap E \neq \varnothing} C$$

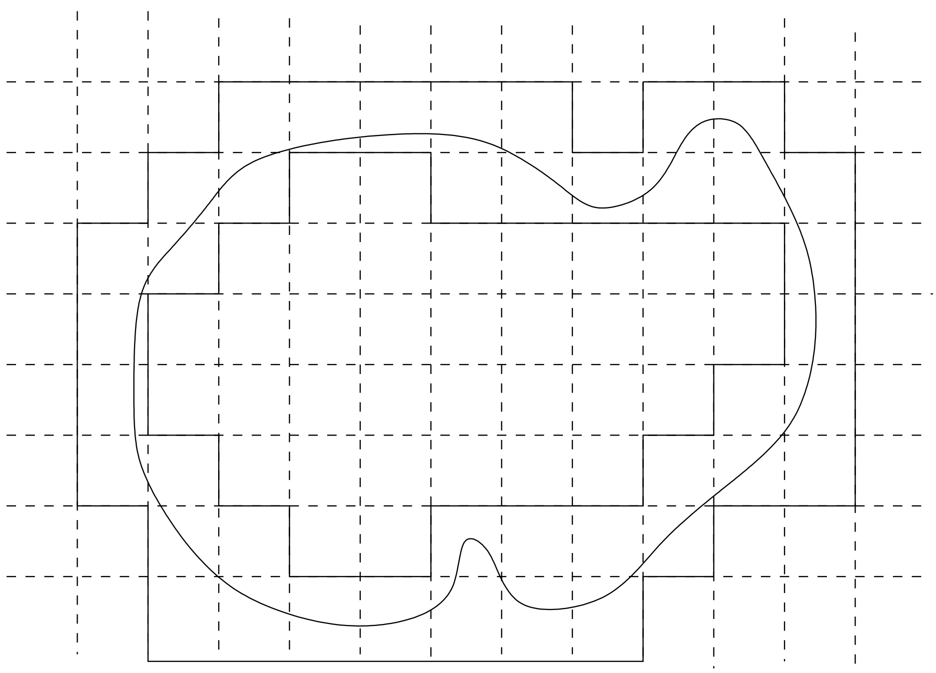

Figura 2.11: Aproximações aos conteúdos interior e exterior de um conjunto.

A medida de $\underline{A}(E,k)$ (no sentido ingênuo ou de Lebesgue) é 2^{-nk} vezes o número de cubos em $\mathcal{C}_k$ que estão contidos em E, e a denotamos por $m[\underline{A}(E,k)]$.

Analogamente para $m[\overline{A}(E,k)]$.

Ainda, os conjuntos $\underline{A}(E,k)$ claramente crescem com k enquanto os conjuntos $\overline{A}(E,k)$ decrescem com k (pois cada cubo em $\mathcal{C}_k$ é uma união de cubos em $\mathcal{C}_{k+1}$). Existem então os limites

$$\underline{\kappa}(E) = \lim_{k\to\infty} m[\underline{A}(E,k)], \qquad \overline{\kappa}(E) = \lim_{k\to\infty} m[\overline{A}(E,k)].$$

Tais limites são o **conteúdo interior** e **exterior** de E. Se tais conteúdos são iguais, o valor comum $\kappa(E)$ é o **conteúdo de Jordan** de E.

Dois comentários são pertinentes.

Primeiro, geralmente o conteúdo de Jordan é definido utilizando paralelepípedos em vez de cubos diádicos, mas o resultado é o mesmo (como é intuitivo).

Segundo, embora todas as definições acima façam sentido para um conjunto arbitrário $E \subset \mathbb{R}^n$, a teoria do conteúdo de Jordan é relevante apenas se E é limitado, pois caso contrário temos $\overline{\kappa}(E) = \infty$.

Sejam

$$\underline{A}(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{A}(E,k), \qquad \overline{A}(E) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A}(E,k).$$

Então temos

$$\begin{cases} \underline{A}(E) \subset E \subset \overline{A}(E), \ \text{com } \underline{A}(E) \text{ e } \overline{A}(E) \text{ borelianos,} \\ \\ \underline{\kappa}(E) = m[\underline{A}(E)] \text{ e } \overline{\kappa}(E) = m[\overline{A}(E)]. \end{cases}$$

Logo, o conteúdo de Jordan de E existe se e somente se $m[\overline{A}(E) \setminus \underline{A}(E)] = 0$ e, neste caso, E é Lebesgue mensurável e $m(E) = \kappa(E)$.

Para melhor clarificar a relação entre medida de Lebesgue e o processo de aproximação conduzindo ao conteúdo de Jordan, provamos o lema abaixo cuja segunda parte será útil posteriormente [vide a introdução ao teorema da mudança de variável na integral de Lebesgue e a prova deste teorema, Teorema 2.21(b)].

Lema 2.2 *Seja O um aberto em $\mathbb{R}^n$. Então,*

(a) $O = \underline{A}(O)$.

(b) O é uma reunião enumerável de cubos diádicos com interiores disjuntos.

Prova.

(a) Seja $x \in O$. Como O^c é fechado, temos $r = d(x; O^c) > 0$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{n}/2^k < r$. Existe um cubo $C \in \mathcal{C}_k$ tal que $x \in C$. O diâmetro de C satisfaz $\operatorname{diam}(C) = \sup\{|a-b| : a, b \in C\} \leq \sqrt{n 2^{-2k}} < r$. Portanto, $x \in C \subset B(x; r) \subset O$. Donde segue que $x \in \underline{A}(O, k) \subset \underline{A}(O)$. Por fim, é claro que $\underline{A}(O) \subset O$.

(b) Consideremos as coleções $\mathcal{A}_k = \{C : C \in \mathcal{C}_k \text{ e } C \subset O\}$. Seja $S_0 = \mathcal{A}_0$. Dado $j \geq 1$, seja S_j a coleção dos cubos em $\mathcal{A}_j$ que não são subcubos de nenhum cubo em $S_0 \cup \cdots \cup S_{j-1}$. Um cubo qualquer em $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$, não é subcubo de um outro cubo em S. Logo, os cubos em S tem interiores disjuntos. Dado $x \in O$, existe o menor k tal que $x \in \mathcal{A}_k$. Assim, x está em um cubo de S_k♣

O Lema 2.2 implica facilmente que *a medida de Lebesgue de um conjunto aberto qualquer é igual a seu conteúdo interior* (cheque).

Por outro lado, suponha que $F \subset \mathbb{R}^n$ é compacto. Seja Q um cubo, grande o suficiente, cujo interior contém F. Se $C \in \mathcal{C}_k$ e $C \subset Q$, então ou temos $C \cap F \neq \varnothing$ ou temos $C \subset Q \setminus F$. Donde segue (para k grande o suficiente)

$$m[\overline{A}(F, k)] + m[\underline{A}(Q \setminus F, k)] = m(Q) \quad \text{(cheque)}.$$

Impondo $k \to \infty$ encontramos $\overline{\kappa}(F) + \underline{\kappa}(Q \setminus F) = m(Q)$.

No entanto, $Q \setminus F$ é a união do conjunto aberto $\operatorname{int}(Q) \setminus F$ com a fronteira de Q, a qual tem conteúdo zero. Concluímos então

$$\underline{\kappa}(Q \setminus F) = \underline{\kappa}[\operatorname{int}(Q) \setminus F] = m(Q \setminus F).$$

Isto é, a *medida de Lebesgue de todo compacto é igual ao seu conteúdo exterior*.

Tais resultados e o Teorema 2.19, itens (a) e (b), permitem comparar a medida de Lebesgue e o conteúdo de Jordan. O conteúdo de Jordan de E é definido por aproximações de E, por dentro e por fora, dadas por reuniões finitas de cubos. A medida de Lebesgue é obtida por um processo de aproximação com duas etapas. Primeiro, aproximamos E por fora, utilizando conjuntos abertos, e por dentro via conjuntos compactos. Por fim, aproximamos os abertos por dentro e os compactos por fora, através de uniões finitas de cubos. Os conjuntos Lebesgue mensuráveis são exatamente aqueles para os quais tais aproximações por dentro/por fora e por fora/por dentro fornecem a mesma resposta no limite. Vide Exercício 19 1.4.

O Teorema de Mudança de Variável na Integral de Lebesgue.

Comecemos com uma observação muito simples em geometria cartesiana plana.

Computemos a área do paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado pelos vetores $\overrightarrow{u} = (a,b)$ e $\overrightarrow{v} = (c,d)$, ambos com extremidade inicial na origem $O = (0,0)$.

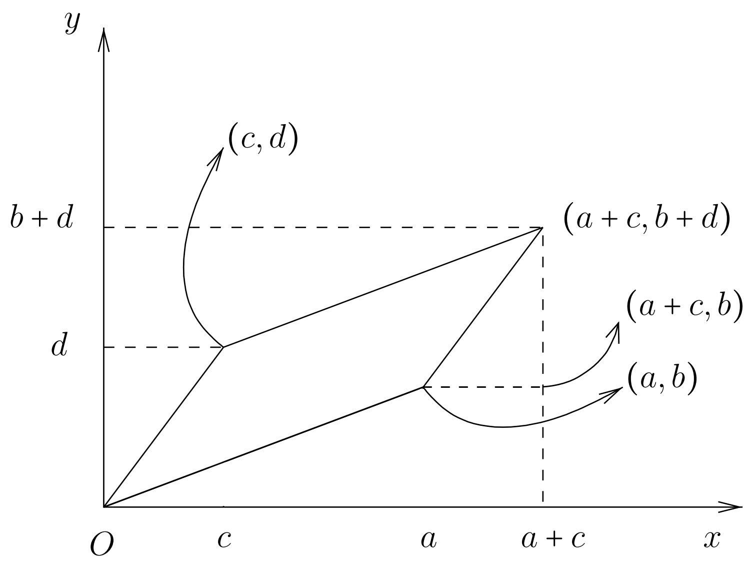

Figura 2.12: Área de um paralelogramo no plano cartesiano.

Admitindo a disposição de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ na figura acima, a área $A(\mathcal{P})$ do paralelogramo $\mathcal{P}$ é dada pela área do retângulo de vértices

$$O = (0,0), \quad (a+c,0), \quad (a+c,b+d) \text{ e } (0,b+d)$$

subtraindo-se as áreas de dois trapézios congruentes e dois triângulos congruentes. Encontramos então

$$\begin{aligned} A(\mathcal{P}) &= (a+c)(b+d) - 2\left[\frac{(a+c+c)b}{2}\right] - 2\left(\frac{cd}{2}\right) \\ &= ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \clubsuit \end{aligned}$$

A seguir, acompanhemos o efeito de uma mudança linear de coordenadas em integrais de Lebesgue. Identifiquemos uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com a matriz

$$(T_{ij}) = (e_i \cdot Te_j), \quad \text{onde } \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ é a base canônica de } \mathbb{R}^n,$$

com determinante $\det T$. Se $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ também é linear, vale a fórmula

$$\det(T \circ S) = (\det T)(\det S).$$

Indicamos por

$$GL(n),$$

o grupo das transformações lineares inversíveis sobre $\mathbb{R}^n$. Sabidamente toda T em $GL(n)$ é um produto finito de três tipos de transformações elementares.

Tipo 1. Troca duas coordenadas e fixa as demais.

Tipo 2. Multiplica uma coordenada por uma constante não nula e fixa as outras.

Tipo 3. Adiciona um múltiplo de uma coordenada a uma outra coordenada e fixa as demais.

Em símbolos, escrevemos

$$\begin{array}{lll}
T_1(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_n), & & \det T_1 = -1 \\
T_2(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, cx_j, \ldots, x_n), & \text{onde} & c \neq 0,\ \det T_2 = c, \\
T_3(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j + cx_k, \ldots, x_n), & \text{onde} & k \neq j,\ \det T_3 = 1.
\end{array}$$

[A matriz associada a T_3 é triangular e assume o valor 1 em toda a diagonal.]

Tal fatoração é válida pois toda matriz inversível é linha-reduzível à matriz identidade.

Toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua. De fato, pela desigualdade

$$|Tx| \leq M|x| \text{ para todo } x, \text{ onde } M = |Te_1| + \cdots + |Te_n|,$$

obtemos

$$T\big(B(x;r)\big) \subset B(Tx; Mr), \text{ para quaisquer } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } r > 0.$$

Ainda mais, se $N \subset \mathbb{R}^n$ é nulo então $T(N)$ também é nulo. De fato, dado $\epsilon > 0$ existe um aberto O tal que

$$O \supset N \quad \text{e} \quad m(O) < \epsilon.$$

Como já vimos, O é uma reunião de cubos diádicos I_k com interiores disjuntos e cada qual de centro x_k e lado de comprimento r_k. Portanto, temos

$$\sum r_k^n = m(O) < \epsilon \quad \text{e} \quad I_k \subset B\left(x_k; r_k\sqrt{n}\right).$$

Valem então as inclusões

$$T(N) \subset \bigcup T(I_k) \subset \bigcup B\big(Tx_k; Mr_k\sqrt{n}\big),$$

que exibem $T(N)$ como subconjunto de uma união de bolas.

Valem também as desigualdades

$$m\left[\bigcup B\left(Tx_k; Mr_k\sqrt{n}\right)\right] \leq \sum \left(2Mr_k\sqrt{n}\right)^n < \left(2M\sqrt{n}\right)^n \epsilon.$$

Logo, $T(N)$ é subconjunto de um G_δ nulo e portanto $T(N)$ é nulo (cheque).

Assim, se T é inversível então vale a propriedade

$$T(\mathcal{L}^n) = \mathcal{L}^n.$$

De fato, se $B \cup N \in \mathcal{L}^n$, com B boreliano e N nulo, então o conjunto

$$T(B \cup N) = T(B) \cup T(N)$$

é Lebesgue mensurável pois o conjunto $T(B)$ é boreliano [já que T^{-1} é contínua] e o conjunto $T(N)$ é nulo. Mostramos que

$$T(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}.$$

Analogamente, temos

$$T^{-1}(\mathcal{L}^n) \subset \mathcal{L}^n.$$

Proposição 2.16 *Sejam T em $GL(n)$ e $E \in \mathcal{L}^n$. Então $T(E) \in \mathcal{L}^n$ e*

(2.16.1) $$m[T(E)] = |\det T| m(E).$$

Prova.

Comentamos acima que $T(\mathcal{L}^n) = \mathcal{L}^n$. Notemos que se a identidade (2.16.1) vale para S, T em $GL(n)$ então também vale para $S \circ T$:

$$m[(S \circ T)(E)] = |\det S| m[T(E)] = |\det S| |\det T| m(E) = |\det(S \circ T)| m(E).$$

Assim, basta checar (2.16.1) para T_1, T_2 e T_3.

◇ Para T_1 e T_2, com $|\det T_1| = 1$ e $|\det T_2| = |c|$, notemos que m é σ-finita e que as funções de conjuntos

$$m[T_1(E)] \ \text{ e } \ \frac{1}{|c|} m[T_2(E)], \text{ ambas na variável } E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

definem medidas, que coincidem com m em cada retângulo $E_1 \times \cdots \times E_n$, cada $E_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Logo, pela unicidade da medida produto estas três medidas coincidem sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e, por fim, sobre $\mathcal{L}^n$.

◇ Para T_3, onde $|\det T_3| = 1$, usamos as fórmulas para $E = \mathcal{E}$ uni-dimensional

$$m(\mathcal{E}) = m(\mathcal{E} + c) = \int \chi_{\mathcal{E}+c}(t) dt = \int \chi_{\mathcal{E}}(t - c) dt$$

e o Teorema de Fubini-Tonelli se $E \in \mathcal{L}^n$, integrando primeiro em x_j,

$$\begin{aligned}
m[T_3(E)] &= \int \chi_{T_3(E)}(x) dx \\
&= \int \chi_E \circ T_3^{-1}(x) dx = \\
&= \int \dots \int \left[\int \chi_E(x_1, \dots, x_j - c x_k, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_j \right] dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n \\
&= \int \dots \int \left[\int \chi_E(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_j \right] dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n \\
&= \int \chi_E dx \\
&= m(E) \\
&= |\det T_3| m(E) \clubsuit
\end{aligned}$$

Corolário 2.9 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mensurável e positiva e T em $GL(n)$. Então*

(a) A função $f \circ T$ é mensurável.

(b) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det T| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f \circ T)(x)dx.$

Prova.

(a) Como $T(\mathcal{L}^n) = \mathcal{L}^n$, dado um boreliano $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ temos $T^{-1}\big[f^{-1}(B)\big] \in \mathcal{L}^n$.

(b) Pela Proposição 2.16, dado $E \in \mathcal{L}^n$ temos

$$\int \chi_E(x)dx = m(E) = \frac{1}{|\det T^{-1}|} m[T^{-1}(E)] = |\det T| \int \chi_{T^{-1}(E)}(x)dx$$
$$= |\det T| \int (\chi_E \circ T)(x)dx.$$

Isto mostra que (b) é válida para toda função simples em L^+. Então, pelo teoremas 2.1(a) e convergência monótona, (b) é válida para todo $f \in L^+$♣

Corolário 2.10 *A medida de Lebesgue é invariante por transformações ortogonais (rotações, reflexões e composições de ambas).*

Prova.

Transformações ortogonais satisfazem $TT^* = I$, onde T^* é a transposta de T e I é a identidade. Visto que $\det T^* = \det T$, temos que $|\det T| = 1$♣

Estendamos o Corolário 2.9 a funções diferenciáveis. Fixemos a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Seja $G = (g_1, \ldots, g_n)$ uma função definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$ com componentes g_i de classe C^1, isto é, com derivadas parciais $\partial g_i / \partial x_j$ contínuas. Indicamos por $DG(x)$ a aplicação linear dada pela matriz jacobiana

$$JG(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right).$$

Identificamos DG e JG. Se G é linear temos $JG(x) = G(x)$, para todo x.

A aplicação G é dita um **difeomorfismo** se é bijetora e, ainda, $JG(x)$ é inversível em todo ponto. Neste caso, o teorema da função inversa (vide referências [4], [5], [8] ou [13]) garante que $G(\Omega)$ é um aberto, a aplicação $G^{-1} : G(\Omega) \to \Omega$ é um difeomorfismo de classe C^1 e que vale a fórmula

$$JG^{-1}(y) = [JG(x)]^{-1}, \text{ onde } y = G(x).$$

A seguir, supomos que G é um difeomorfismo e notamos que G preserva borelianos.

Dada uma aplicação linear $T = (T_{ij}) \in GL(n)$, definimos

$$\|x\| = \max_j |x_j| \quad \text{e} \quad \|T\| = \max_i \sum_j |T_{ij}| \qquad (\text{atenção: } \|I\| = 1).$$

É fácil ver que $\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|$. Consideremos um cubo de centro a e lado $2r$

$$Q = Q(a;r) = \{x : \|x - a\| \leq r\}, \quad m(Q) = (2r)^n,$$

compacto e em Ω. Como a função G é de classe C^1, encontramos o majorante

$$M = \sup\{\|JG(y)\| : y \in Q\} < \infty.$$

Então, dado um ponto $x \in Q$, pelo teorema do valor médio para funções em uma variável real e a valores reais temos que existe um ponto $y \in Q$ tal que

$$g_i(x) - g_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(y)(x_j - a_j).$$

Logo, $\|G(x) - G(a)\| \leq Mr$. Donde segue $G\big(Q(a;r)\big) \subset Q\big(G(a); Mr\big)$ e então

$$\boxed{m[G(Q)] \leq M^n m(Q).}$$

Vale uma desigualdade análoga para G^{-1}. É fácil ver que G preserva os subconjuntos nulos de Ω (cheque) e os subconjuntos Lebesgue mensuráveis de Ω (cheque).

Dada uma aplicação $T \in GL(n)$ e utilizando a desigualdade destacada acima para a composta $T^{-1} \circ G$, junto com a Proposição 2.16, obtemos a desigualdade

$$\textbf{(Teo.2.21)}\ m[G(Q)] = |\det T| m\big[T^{-1}(G(Q))\big] \leq |\det T| \left(\sup_{y \in Q} \|T^{-1} JG(y)\| \right)^n m(Q).$$

Teorema 2.21 (Mudança de Variável na Integral de Lebesgue). *Sejam $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 e $f : G(\Omega) \to \mathbb{C}$.*

(a) Se f é Lebesgue mensurável, então $f \circ G$ é Lebesgue mensurável.

(b) Se $f \geq 0$ ou $f \in L^1\big(G(\Omega)\big)$, então

$$\int_{G(\Omega)} f(y)\, dy = \int_{\Omega} (f \circ G)(x) |\det JG(x)|\, dx.$$

(c) Seja E mensurável, com $E \subset \Omega$. Então, $G(E)$ é mensurável e

$$m[G(E)] = \int_E |\det JG(x)|\, dx.$$

Prova.

(a) Dado $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, pelo comentário acima, $G^{-1}\big[f^{-1}(B)\big]$ é Lebesgue mensurável.

(b) Seja Q um cubo (compacto) não degenerado em Ω e $\varepsilon \in 1/\mathbb{N}$. A função em duas variáveis $\|JG(z)^{-1}JG(y)\|$ é contínua e é constante e igual a 1 na diagonal (compacta) Δ de $Q \times Q$.

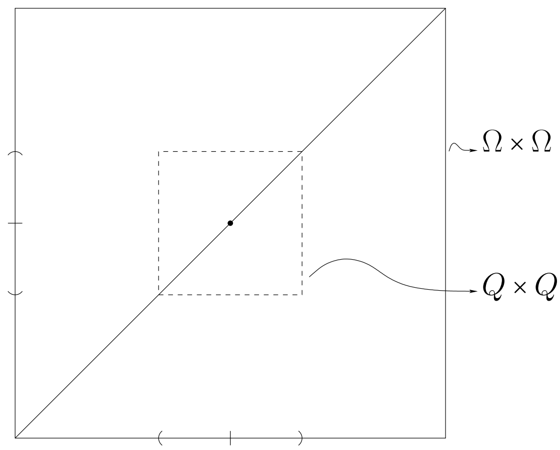

Figura 2.13: A diagonal compacta Δ de $Q \times Q$.

Logo, existe um $\delta \in 1/\mathbb{N}$ tal que se (z, y) está no disco fechado centrado em Δ e de raio δ então

$$\|JG(z)^{-1}JG(y)\|^n \leq 1 + \varepsilon$$

[notemos que se $z \in Q$ e $\|h\| \leq \delta$, então $(z, z) + (0, h)$ pertence a tal disco].

Subdividamos Q em subcubos $Q_1^\delta, \ldots, Q_N^\delta$, onde $N = N(\delta)$, com interiores disjuntos, lados de comprimento inferior a δ e respectivos centros $x_1, \ldots, x_N$. A desigualdade (Teo.2.21) com $Q = Q_j^\delta = Q_j$ e $T = JG(x_j)$, acarreta

$$\begin{aligned} m[G(Q)] &\leq \sum_{1\leq j\leq N} m[G(Q_j)] \\ &\leq \sum_{1\leq j\leq N} |\det JG(x_j)| \Big(\sup_{y\in Q_j} \|JG(x_j)^{-1} JG(y)\| \Big)^n m(Q_j) \\ &\leq (1+\varepsilon) \sum_{1\leq j\leq N} |\det JG(x_j)| m(Q_j). \end{aligned}$$

O último somatório é a integral da função $\sum_{j=1}^N |\det JG(x_j)| \chi_{\mathrm{int}(Q_j)}(x)$. Tal função é majorada por uma constante e converge pontualmente a $|\det JG(x)|$ se $x \in Q \smallsetminus \bigcup_{\delta,j} \partial Q_j^\delta$, para $\delta \to 0$. Então, como $\bigcup_{\delta,j} \partial Q_j^\delta$ tem medida nula, pelo teorema da convergência dominada e impondo $\delta \to 0$ e $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$m[G(Q)] \leq \int_Q |\det JG(x)|\, dx.$$

Tal desigualdade vale também para uma união contável de cubos diádicos com interiores disjuntos, pois as fronteiras dos cubos tem medida nula, e assim (pelo Lema 2.2) para abertos em Ω .

Dado um mensurável $E \subset \Omega$, seja $E_k = E \bigcap \Omega_k$, contido no aberto limitado

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : |x| < k \text{ e } |\det JG(x)| < k\}.$$

Fixado k, existe uma sequência de abertos O_j contidos em Ω_k satisfazendo

$$O_j \searrow E_k \text{ e } E_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} O_j \smallsetminus N, \text{ com } m(N) = 0.$$

Então, pelo teorema da convergência dominada segue

$$m[G(E_k)] \leq \lim m[G(O_j)] \leq \lim \int_{O_j} |\det JG(x)| dx = \int_{E_k} |\det JG(x)| dx.$$

Impondo $k \to \infty$ segue [por construção e convergência monótona, (cheque)]

$$m[G(E)] \leq \int_E |\det JG(x)| dx.$$

Assim, se $f = \sum a_j \chi_{A_j}$ é uma função simples positiva sobre $G(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{G(\Omega)} f(y) dy = \sum a_j m(A_j) &\leq \sum a_j \int_{G^{-1}(A_j)} |\det JG(x)| dx \\ &= \int_\Omega (f \circ G)(x) |\det JG(x)| dx. \end{aligned}$$

Teorema 2.1(a) e o teorema da convergência monótona implicam que a desigualdade imediatamente acima vale para qualquer f mensurável e positiva. Analogamente, trocando f por $(f \circ G)|\det JG|$ e a função G por G^{-1},

$$\int_{\Omega}(f \circ G)(x)|\det JG(x)|dx$$

$$\leq \int_{G(\Omega)}(f \circ G \circ G^{-1})(y)|\det JG\big(G^{-1}(y)\big)||\det JG^{-1}(y)|dy = \int_{G(\Omega)} f(y)dy.$$

Provamos (b) para $f \geq 0$ e o caso $f \in L^1$ é então trivial [tal argumento é simelhante a vários para somas não ordenadas]. Isto encerra (b).

(c) Segue de (b) aplicado à função $f = \chi_{G(E)}$♣

Importante. A forma usual e fácil para provar que

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{j=N} |\det JG(x_j)|m(Q_j)$$

converge (uniformemente) à integral de Lebesgue

$$\int_Q |\det JG|dm$$

é notar que $|\det JG(x)|$ restrita a Q tem integral de Riemann n-dimensional

$$I = \int_Q |\det JG(x)|dx$$

coincidindo com a integral de Lebesgue e, ainda, que Σ é uma soma de Riemann compreendida entre uma soma inferior de Darboux e uma soma superior de Darboux , respectivamente

$$s = \sum m_j m(Q_j) \quad \text{e} \quad S = \sum M_j m(Q_j),$$

com m_j o inf e M_j o sup da função $|\det JG|$ no cubo Q_j. Consequentemente,

$$|\Sigma - I| \leq |S - s| \xrightarrow{\delta \to 0} 0.$$

Entretanto, a integral de Riemann n-dimensional não é abordada neste curso.

2.7 Integração em Coordenadas Polares

Os mais importantes sistemas de coordenadas não lineares são (em $\mathbb{R}^2$) as coordenadas polares

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

e (em $\mathbb{R}^3$) as coordenadas esféricas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$$

Vide figura abaixo

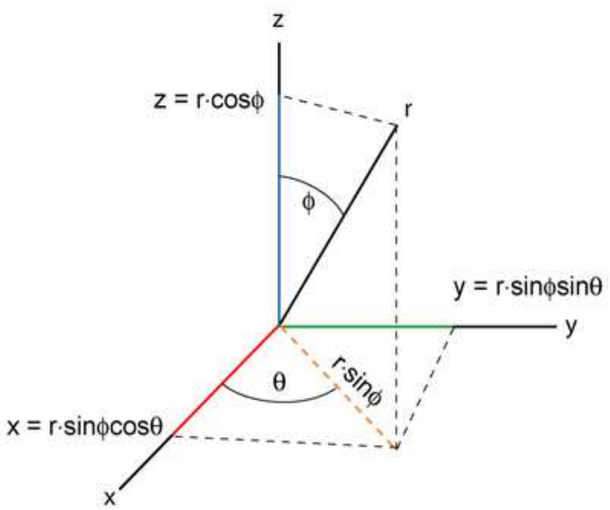

Figura 2.14: Coordenadas esféricas do ponto (x, y, z)

A aplicação do Teorema de mudança de variável na integral de Lebesgue (2.21) a estes dois sistemas de coordenadas conduz às fórmulas ingenuamente enunciadas

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta \quad \text{e} \quad dx\,dy\,dz = r^2 \sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

Existem sistemas de coordenadas que são semelhantes e em dimensões mais elevadas, os quais se tornam mais complicados conforme a dimensão aumenta (vide Exercício 65 2.7). Para a maioria dos propósitos no entanto basta conhecer qual medida de Lebesgue é efetivamente o produto da medida $r^{n-1}dr$ sobre $(0, \infty)$

e uma certa "medida de superfície" sobre a esfera unitária ($d\theta$ para $n = 2$ e $\sin\phi\, d\theta\, d\phi$ para $n = 3$).

Nossa construção desta medida de superfície é motivada por um fato familiar da geometria plana. A saber, se S_θ é um setor do disco de raio r com ângulo central θ (i.e., a região do disco que está contida nos dois lados do ângulo), a área $m(S_\theta)$ é proporcional a θ. De fato,

$$m(S_\theta) = \frac{r^2\theta}{2}.$$

Esta equação pode ser resolvida para θ e então utilizada para definir a medida angular θ em termos da área $m(S_\theta)$. A mesma idéia funciona em dimensões superiores: definiremos a medida de superfície de um subconjunto da esfera unitária em termos da medida de Lebesgue do correspondente setor da bola unitária.

Para a esfera unitária, escrevamos

$$S^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n : |\omega| = 1\}.$$

Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, as **coordenadas polares** de x são

$$r = |x| \in (0,\infty), \qquad \omega = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}.$$

A aplicação

$$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,\infty) \times S^{n-1}, \quad \text{dada por } \Phi(x) = (r,\omega),$$

é bicontínua e $\Phi^{-1}(r,\omega) = r\omega$.

Denotaremos por m_* a medida de Borel sobre $(0,\infty) \times S^{n-1}$ induzida por Φ através da medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. Isto é,

$$m_*(E) = m[\Phi^{-1}(E)], \quad \text{onde } E \in \mathcal{B}_{(0,\infty)\times S^{n-1}}.$$

Ainda, definimos a medida $\rho = \rho_n$ sobre os borelianos $R \subset (0,\infty)$ por

$$\rho(R) = \int_R r^{n-1} dr, \ \text{ onde } dr = dm(r) \qquad \left[\rho(R) = \int \chi_R(r) r^{n-1} dr = \int \chi_R d\rho\right].$$

Se $h : (0,\infty) \to [0,\infty]$ é ρ-mensurável, por aproximação segue (cheque)

$$\int h d\rho = \int h(r) r^{n-1} dr.$$

Teorema 2.22 (Coordenadas Polares e a Integral de Lebesgue). *Existe uma única medida de Borel $\sigma = \sigma_{n-1}$ sobre S^{n-1} tal que*

$$m_* = \rho \times \sigma.$$

Se f é Borel mensurável sobre $\mathbb{R}^n$, com $f \geq 0$ ou $f \in L^1(m)$, então

$$\textbf{(Teo.2.22.1)} \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f(r\omega)r^{n-1}d\sigma(\omega)dr \qquad \begin{bmatrix} dx = dm(x) \\ dr = dm(r) \end{bmatrix}.$$

Prova.

- Admitamos que σ existe. Então, (Teo.2.22.1) para $f = \chi_B$, com B um boreliano de $\mathbb{R}^n$, meramente reformula a identidade $m_* = \rho \times \sigma$ pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B \, dx = m(B) = m_*[\Phi(B)],$$

$$\chi_B(r\omega) = 1 \text{ se e somente se } \chi_{\Phi(B)}(r,\omega) = 1 \text{ e, ainda,}$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} \chi_B(r\omega)r^{n-1}d\sigma(\omega)dr = \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_0^\infty \chi_{\Phi(B)}(r,\omega)d\rho(r)d\sigma(\omega) = (\rho\times\sigma)[\Phi(B)].$$

Assim, com argumentos usuais de aproximação e linearidade concluímos que (Teo.2.22.1) também vale para uma f Borel mensurável e positiva arbitrária. Em suma, (se σ existe) Teo.2.22.1 segue da identidade $m(B) = m_*[\Phi(B)]$.

- Construção de σ sobre S^{n-1}. Dado um boreliano $A \subset S^{n-1}$ e $a > 0$, seja

$$A_a = \Phi^{-1}\big((0,a] \times C\big) = \{r\omega : 0 < r \leq a \text{ e } \omega \in A\} \quad (\text{contido em } \mathbb{R}^n).$$

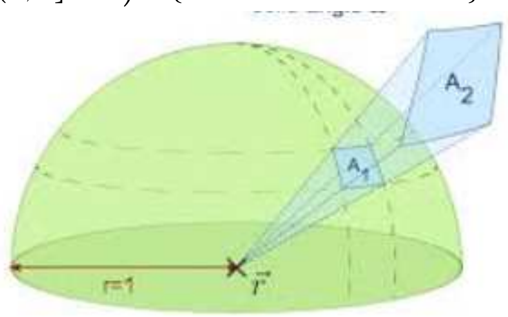

Figura 2.15: Os setores esféricos (sólidos) A_1 e A_2.

Se a fórmula (Teo.2.22.1) deve valer para $f = \chi_{A_1}$, necessariamente seguem

$$m(A_1) = \int_0^1 \int_A r^{n-1}d\sigma(\omega)dr = \sigma(A)\int_0^1 r^{n-1}dr = \frac{\sigma(A)}{n}.$$

Tais identidades mostram como definir $\sigma(A)$.

Definimos então $\boxed{\sigma(A) = nm(A_1)}$.

Visto que a aplicação

$$S^{n-1} \supset A \longmapsto A_1 \subset \mathbb{R}^n$$

associa borelianos a conjuntos borelianos e comuta com uniões, intersecções e complementares, concluímos que σ é uma medida de Borel sobre S^{n-1} (cheque). Ainda, como A_a é a imagem de A_1 pela homotetia $x \mapsto ax$, pela Proposição 2.16 temos $m(A_a) = a^n m(A_1)$ e assim, para $a < b \leq \infty$ temos

$$m_*\big((a,b] \times A\big) = m(A_b \setminus A_a) = \frac{b^n - a^n}{n}\sigma(A) = \sigma(A)\int_a^b r^{n-1}dr$$
$$= (\rho \times \sigma)\big((a,b] \times A\big).$$

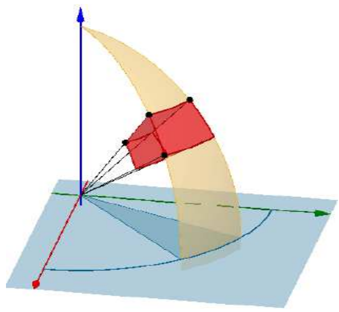

Figura 2.16: Representação para o sólido $A_b \setminus A_a$.

Vejamos que basta esta fórmula para definir m_*. Fixado um boreliano $A \subset S^{n-1}$, a coleção $\{(a,b] \times A : 0 \leq a < b \leq \infty\}$ é uma família elementar de subconjuntos de $(0,\infty) \times A$ e, graças à Proposição 1.5, a coleção $\mathcal{A}_A$ das uniões finitas e disjuntas de elementos de tal família elementar é uma álgebra sobre $(0,\infty) \times A$ que gera a σ-álgebra

$$\mathcal{M}_A = \{R \times A : R \in \mathcal{B}_{(0,\infty)}\}.$$

Pelos cômputos precedentes temos $m_* = \rho \times \sigma$ sobre a álgebra $\mathcal{A}_A$ e pela unicidade para medidas produtos [Teorema 1.4(c)] segue a igualdade

$$m_* = \rho \times \sigma \text{ sobre } \mathcal{M}_A.$$

Entretanto, a união $\bigcup\{\mathcal{M}_A : A \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}\}$ é precisamente o conjunto dos retângulos Borel mensuráveis de $(0,\infty) \times S^{n-1}$ e então, utilizando novamente a unicidade garantida pelo Teorema 1.4(c) obtemos a identidade $m_* = \rho \times \sigma$ sobre todos os borelianos de $(0,\infty) \times S^{n-1}$♣

O teorema acima se estende facilmente a uma f Lebesgue mensurável (cheque).

Corolário 2.11 (A Integral de uma Função Radial). *Se f é uma função mensurável sobre $\mathbb{R}^n$, positiva ou integrável, tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função g sobre $(0,\infty)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1})\int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr.$$

Prova.

Consequência trivial do Teorema 2.22♣

Corolário 2.12 *Sejam $\epsilon > 0$ e $C > 0$ e $B = B(0;\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \epsilon\}$. Suponha que f é uma função mensurável sobre $\mathbb{R}^n$.*

$$(a)\quad \begin{cases} \text{Se } |f(x)| & \leq \frac{C}{|x|^a} \text{ sobre } B \text{ para algum } a < n, \text{ então } f \in L^1(B). \\ \text{Se } |f(x)| & \geq \frac{C}{|x|^n} \text{ sobre } B, \text{ então } f \notin L^1(B). \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} \text{Se } |f(x)| & \leq \frac{C}{|x|^a} \text{ sobre } B^c \text{ para algum } a > n, \text{ então } f \in L^1(B^c). \\ \text{Se } |f(x)| & \geq \frac{C}{|x|^n} \text{ sobre } B^c, \text{ então } f \notin L^1(B^c). \end{cases}$$

Prova.

Segue do Corolário 2.11 aplicado às funções $|x|^{-a}\chi_B$ e $|x|^{-a}\chi_{B^c}$♣

Logo mais computaremos $\sigma(S^{n-1})$. Utilizaremos que $\sigma(S^1) = 2\pi$.

Proposição 2.17 (A Integral da gaussiana). *Se $a > 0$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

Prova.

Denotemos a integral por I_n. Se $n = 2$, pelo Corolário 2.11 temos

$$I_2 = 2\pi\int_0^\infty e^{-ar^2}rdr = -\left(\frac{\pi}{a}\right)e^{-ar^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{a}.$$

Sabendo que

$$e^{-a|x|^2} = \prod_{j=1}^n e^{-ax_j^2} > 0,$$

gratos ao Teorema de Tonelli deduzimos que $I_n = (I_1)^n$. Em particular, $I_1 = (I_2)^{1/2}$. Finalmente obtemos $I_n = (\pi/a)^{n/2}$♣

Proposição 2.18 (Área da Esfera Unitária). *Vale a fórmula*

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Prova.

Pela Proposição 2.17, Corolário 2.11, Proposição 2.17 e a substituição $s = r^2$,

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr$$
$$= \frac{\sigma(S^{n-1})}{2} \int_0^\infty s^{(n/2)-1} e^{-s} ds = \frac{\sigma(S^{n-1})}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \clubsuit$$

Corolário 2.13 (Volume da Bola Unitária). *Vale a fórmula*

$$m\big(B(0;1)\big) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Prova.

Pela definição de σ, a equação funcional para Γ e a Proposição 2.18 segue

$$m\big(B(0;1)\big) = \frac{\sigma(S^{n-1})}{n} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \clubsuit$$

Já mostramos no 2.3 que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Agora, computemos Γ em $\mathbb{Z}/2$.

Proposição 2.19 *Vale a fórmula*

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}.$$

Prova.

Gratos à equação funcional temos $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Ainda, introduzindo a substituição $s = r^2$ e utilizando a Proposição 2.17 obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty s^{-1/2} e^{-s} ds = 2\int_0^\infty e^{-r^2} dr = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi} \clubsuit$$

Uma consequência surpreendente da Proposição 2.18 e da fórmula $\Gamma(n) = (n-1)!$ é que, seja n par ou ímpar, a medida de superfície da esfera unitária e a medida de Lebesgue da bola unitária, ambas em $\mathbb{R}^n$, são sempre múltiplos racionais de potências inteiras de π (cheque), e também que a potência de π cresce uma unidade quando n aumenta duas unidades.

2.7.1 Expressão para as Coordenadas Polares

Em $\mathbb{R}^2$ temos as coordenadas polares

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad 0 < r < +\infty\,,\ 0 < \theta < 2\pi.$$

Em $\mathbb{R}^3$ temos as coordenadas esféricas

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\sin\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix},$$

onde $0 < r < +\infty$, $0 < \theta_1 < \pi$ e $0 < \theta_2 < 2\pi$. Vide figura abaixo

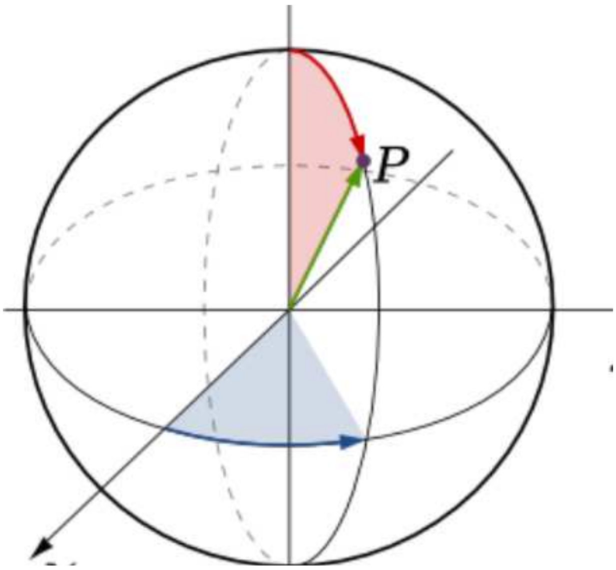

Figura 2.17: Coordenadas esféricas de $P = (x_1, x_2, x_3)$.

Generalizemos tais coordenadas a $\mathbb{R}^n$, supondo n suficientemente grande.

A primeira coordenada esférica é obtida projetando o vetor posição $\overrightarrow{x}$ sobre o eixo Ox_1, na direção do semi-espaço superior, utilizando o ângulo θ_1, onde $0 < \theta_1 < \pi$, de Ox_1 a $\overrightarrow{x}$. Temos,

$$x_1 = |x|\cos\theta_1.$$

A projeção $\overrightarrow{v}$, de $\overrightarrow{x}$ sobre o hiperplano $x_1 = 0$, tem comprimento $|x| \sin\theta_1$ e projetando-a na direção e sobre o eixo Ox_2, utilizando o ângulo θ_2, de Ox_2 a $\overrightarrow{v}$ e com $0 < \theta_2 < \pi$, , encontramos a segunda coordenada

$$x_2 = |x| \sin\theta_1 \cos\theta_2.$$

A projeção $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{v}$ sobre o hiperplano $x_2 = 0$ tem comprimento $|x| \sin\theta_1 \sin\theta_2$ e projetando-a na direção do eixo Ox_3, usando o ângulo θ_3, onde $0 < \theta_3 < \pi$, medido de Ox_3 a $\overrightarrow{w}$, encontramos a terceira coordenada

$$x_3 = |x| \sin\theta_1 \, \sin\theta_2 \cos\theta_3.$$

Por indução temos

$$x_4 = |x| \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 cos\theta_4,$$

$$x_5 = |x| \sin\theta_1 \, \sin\theta_2 \, \sin\theta_3 \, \sin\theta_4 \cos\theta_5, \text{ etc.}$$

Este processo continua até

$$x_{n-2} = r \, \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2}$$

quando conclui com, em analogia com as coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} x_{n-1} = r \, \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-3} \, \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \\ \text{e} \\ x_n = r \, \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-3} \, \sin\theta_{n-2} \, \sin\theta_{n-1}, \\ \text{onde } 0 < \theta_{n-1} < 2\pi. \end{cases}$$

Temos então,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r \, \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \vdots \\ r \, \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\ r \, \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \\ r \, \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2} \, \sin\theta_{n-1} \end{pmatrix}$$

onde, $0 < r < +\infty$, $0 < \theta_j < \pi$ para $1 \le j \le n-2$ e, por último, $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^4$, para $0 < r < +\infty$, $0 < \theta_j < \pi$, $j = 1, 2$, e $0 < \theta_3 < 2\pi$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\,\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\,\sin\theta_1\,\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ r\,\sin\theta_1\,\sin\theta_2\,\sin\theta_3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.23 *Se $n \geq 3$ então,*

$$\det J\varphi \;=\; r^{n-1}\,\sin^{n-2}\theta_1\,\sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}.$$

Prova.

É fácil verificar a fórmula para $n = 3$.

Suponhamos a fórmula válida para $n-1$ e provemos a validade para n.

A matriz jacobiana de φ têm por i-ésima linha $\nabla\varphi_i$, o gradiente da i-ésima função coordenada φ_i de φ ou, equivalentemente, por i-ésima coluna a derivada de φ em relação a sua i-ésima ordenada. Ainda, como temos

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta_j} = 0 \quad \text{se} \quad j > i,$$

segue que a partir de duas posições acima da diagonal principal as entradas da matriz jacobiana são nulas.

O jacobiano de φ é então,

$$\begin{vmatrix}
\cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 0 \\
\sin\theta_1\sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1} & . & . & . & -r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\
\sin\theta_1\sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1} & . & . & . & r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}
\end{vmatrix}.$$

Expandindo-o pela primeira linha temos dois determinantes de ordem $n-1$.

Iniciando pela posição $(1,1)$ temos $\cos\theta_1$ vezes um determinante de ordem $n-1$ cuja primeira coluna, oriunda da segunda coluna do determinante acima, têm o fator $r\cos\theta_1$ em cada entrada.

Para as demais colunas pomos $\sin\theta_1$ em evidência.

O primeiro determinante é então, $\cos\theta_1 r\cos\theta_1 \sin^{n-2}\theta_1$ multiplicado por

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_2 & -r\sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ \sin\theta_2\sin\theta_3 ... \sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1} & . & . & . & . & -r\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ \sin\theta_2\sin\theta_3 ... \sin\theta_{n-1} & . & . & . & . & r\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \end{vmatrix},$$

que é, por hipótese de indução,

$$\gamma = r^{n-2}\sin^{n-3}\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}.$$

Desenvolvendo $\det J\varphi$ a partir da posição $(1,2)$, temos o cofator

$$-(-r\sin\theta_1) = r\sin\theta_1$$

multiplicado por um determinante de ordem $n-1$ com todas as entradas múltiplas de $\sin\theta_1$. O segundo determinante é então, é fácil ver,

$$r\sin\theta_1\sin^{n-1}\theta_1$$

multiplicado pelo mesmo determinante acima. Assim, o jacobiano de φ é

$$\begin{aligned} r\cos^2\theta_1\sin^{n-2}\theta_1\gamma + r\sin^n\theta_1\gamma &= r\sin^{n-2}\theta_1\gamma \\ &= r\sin^{n-2}\theta_1 r^{n-2}\sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2} \\ &= r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2} \clubsuit \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

[1.] Bartle, R. G.., *An extension of Egorov's theorem*, Amer. Math. Monthly, **87** no. 8, pp. 628–633.

[2.] Chae, S. B., *Lebesgue Integration*, 2nd ed., Springer, 1995.

[3.] de Oliveira, O. R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv:1207.1472v2, 2012.

[4.] de Oliveira, O. R. B., *The implicit and the inverse function theorems: easy proofs*, Real Analysis Exchange, Vol. 39(1), 2013/2014, pp. 207-218. Available in `http://arxiv.org/pdf/1212.2066.pdf`

[5.] de Oliveira, O. R. B., *The implicit function theorem when the partial Jacobian matrix is only continuous at the base point*. To appear. Available in `http://arxiv.org/pdf/1312.2445v2.pdf`

[6.] Feldman, M. B., *A proof of Lusin's theorem*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 191–192.

[7.] Folland, G. B., *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[8.] Lima, E., *Curso de Análise* , Vol 1., IMPA, 2009.

[9.] Littlewood, J. E., *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford University Press, 1941.

[10.] Loeb, P. A. and Talvila, E., *Lusin's Theorem and Bochner Integration*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, Vol. 10, (2004), 55-62.

[11.] Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis*, fourth edition, Prentice Hall, 2010.

[12.] Severini, C., *Sulle successioni di funzioni ortogonali* (Italian), Atti Acc. Gioenia. (5) 3, 10 S (1910).

[13.] Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*, Ed. Ciência Moderna, 2003.

[14.] Stein, E. M., and Shakarchi, R., *Real Analysis - Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

[15.] Swartz, C., *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific, 1994.

[16.] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. *Measure and Integral*, Marcel Deker, 1977.