MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT5798 - IMEUSP - 2016

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Estas notas destinam-se aos alunos do curso Medida e Integração - MAT5798-IMEUSP - 2016 e baseiam-se 100% no livro de G. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, John Wiley & Sons, além de uns 20% distribuídos por outros excelentes livros, e artigos, citados na bibliografia. Apesar de se constituírem em quase uma tradução do núcleo de apenas cinco capítulos do livro base, excetuando as maravilhosas notas e exercícios propostos, não devem ser tidas como tal visto que não sou tradutor profissional e uma boa quantidade de material foi alterada e outra introduzida. Os erros de tradução e/ou matemática são de minha responsabilidade. Para finalizar, recomendo a compra e o estudo do merecidamente famoso livro de G. B. Folland.

Capítulo 0 - INTRODUÇÃO

Capítulo 1 - MEDIDAS

Capítulo 2 - INTEGRAÇÃO

Capítulo 3 - MEDIDAS COM SINAL E DIFERENCIAÇÃO

Capítulo 4 - ESPAÇOS L^p

Capítulo 5 - MEDIDAS DE RADON

Capítulo 1

MEDIDAS

> *Os conjuntos cuja medida podemos definir em virtude das idéias precedentes, nós chamaremos de mensuráveis. Assim o fazemos sem a intenção de querer dizer que não é possível associar um número a outros conjuntos.* *E. Borel, 1898*

1.1 Introdução

Um dos mais importantes problemas em geometria é o de determinar a área (volume) de uma região no plano (espaço tri-dimensional). As técnicas do cálculo integral fornecem uma solução satisfatória para tal problema para regiões limitadas por curvas suaves (superfícies suaves) mas que são inadequadas para lidar com conjuntos mais complicados, até mesmo em dimensão um. Idealmente, para $n \in \mathbb{N}$, gostaríamos de ter uma função μ que associasse a cada $E \subset \mathbb{R}^n$ um número $\mu(E) \in [0, \infty]$, a dimensão n-dimensional de E, tal que $\mu(E)$ fosse dada pelas fórmulas usuais do cálculo integral, quando estas fossem aplicáveis. No caso unidimensional, tal função μ certamente deveria possuir as seguintes propriedades:

(a) $\mu([0,1]) = 1$.

(b) $\mu(E) = \mu(F)$ se E é uma translação de F.

(c) $\mu(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, com (E_n) uma sequência, finita ou não, de conjuntos dois a dois disjuntos.

Vejamos que não existe função $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ satisfazendo tais condições.

Consideremos em $[0,1]$ a relação de equivalência $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$ (verifique). Pelo axioma da escolha existe $N \subset [0,1]$ tal que N contém exatamente um só elemento x_α de cada classe de equivalência α. Consideremos $\{r_j : j \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração de $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ e os transladados

$$N_j = N + r_j.$$

Mostremos que os conjuntos N_j são disjuntos e

$$[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \subset [-1,2].$$

- Se $N_j \cap N_k \neq \emptyset$, então existem x_α e x_β tais que $x_\alpha + r_j = x_\beta + r_k$. Logo, $x_\alpha \sim x_\beta$ e então $x_\alpha = x_\beta$. Donde, $r_j = r_k$ e $j = k$ (logo, $N_j = N_k$).
- Dado $x \in [0,1]$, existe x_α tal que $x \sim x_\alpha$. É claro que $x - x_\alpha \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Donde, $x = x_\alpha + r_j$, para algum j. Concluímos então que $[0,1] \subset \bigcup_j N_j$. Por outro lado, é óbvio que $\bigcup_j N_j \subset [-1,2]$ e é fácil mostrar que $\mu([-1,2]) \leq 3$.

Se μ satisfaz (a) e (c), como os conjuntos $N_{j's}$ são disjuntos, obtemos

$$1 = \mu([0,1]) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(N_j) \leq 3,$$

Pela condição (b) temos que $\mu(N_j) = \mu(N)$ e então encontramos

$$1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(N) \leq 3,$$

o que não é possível. Assim, tal "medida" μ não existe.

Tal exemplo é adaptável ao $\mathbb{R}^n$ trocando a condição (b) pela condição

$$(b') : \begin{cases} \mu(E) = \mu(F), \text{ para } E \text{ e } F \text{ congruentes;} \\ \text{isto é, } E = T(F), \text{ com } T \text{ um movimento rígido} \\ [T \text{ é uma composição de translações, rotações e reflexões}]. \end{cases}$$

e a condição (a) pela condição

$$(a') : \ \mu(Q) = 1, \text{ se } Q = [0,1]^n = [0,1] \times \cdots \times [0,1] \text{ é o cubo unitário.}$$

Assim, na busca por uma medida adequada em $\mathbb{R}^n$, enfraquecemos as condições citadas. Entretanto, mudar a condição (c) para uma condição sobre sequências finitas não é adequado pois perderíamos resultados sobre limites e continuidade.

Em 1905, Vitali provou a existência de conjuntos não mensuráveis. Deve-se a ele o teorema: *Todo conjunto de números reais com* medida exterior *estritamente positiva, contém um subconjunto não mensurável.* A prova se encontra no livro de Royden/Fitzpatrick.

Ainda, se $n \geq 3$, em 1924 Banach e Tarski provaram o surpreendente resultado: *Sejam U e V conjuntos limitados arbitrários em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Existe $k \in \mathbb{N}$ e subconjuntos $E_1, \ldots, E_k$, $F_1, \ldots, F_k$ de $\mathbb{R}^n$ tais que*

- *os $E_{j's}$ são disjuntos e sua união é U,*

- *os $F_{j's}$ são disjuntos e sua união é V,*

- *E_j é congruente a F_j, para $j = 1, \ldots, k$.*

Uma interpretação é então: pode-se cortar uma bola do tamanho de uma ervilha em um número finito de pedaços e rearranjá-los de forma a formar uma bola do tamanho da Terra! Evidentemente, tais conjuntos são bizarros. Graças a eles não é possível uma medida razoável associando valores positivos finitos a conjuntos limitados arbitrários e satisfazendo (b'). Assim, restringimos o domínio da medida de forma a evitarmos tais patologias.

Vale a pena, e não requer muito trabalho extra, desenvolver a teoria da medida em grande generalidade. As condições (a) e (b) advém da geometria euclidiana enquanto (c) é relacionada com medidas de conjuntos não necessariamente geométricas. Em física $\mu(E)$ pode representar a distribuição de massa em uma região e em probabilidade, se X é um espaço amostral, $\mu(E)$ é a probabilidade.

1.2 σ- Algebras

Analisemos famílias de conjuntos adequadas a domínios das medidas.

Seja X um conjunto não vazio. Uma **álgebra** de conjuntos sobre X é uma coleção $\mathcal{A}$ não vazia de subconjuntos de X que é fechada para união finita e complementaridade. Isto é,

(i) se $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ então $E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{A}$,

(ii) se $E \in \mathcal{A}$ então $E^c \in \mathcal{A}$.

A álgebra $\mathcal{A}$ é uma σ**-álgebra** se é fechada para uniões contáveis. A identidade

$$\bigcap E_j = \left(\bigcup E_j^c\right)^c,$$

revela que as álgebras (respectivamente σ-álgebras) são também fechadas para intersecções finitas (respectivamente intersecções contáveis).

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra, então $\emptyset \in \mathcal{A}$ e $X \in \mathcal{A}$. De fato, $\mathcal{A}$ é não vazia e então, dado $E \in \mathcal{A}$ temos que conjuntos $E \cap E^c$ e $E \cup E^c$ pertencem a $\mathcal{A}$.

Uma família $\{E_j\}_{j \in J}$ de conjuntos dois a dois disjuntos [i.e., $E_j \cap E_{j'} = \emptyset$ se $j \neq j'$] é dita família disjunta. Indicamos a reunião disjunta destes conjuntos por

$$\dot{\bigcup_{j \in J}} E_j.$$

Lema 1.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Então, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra se e somente se $\mathcal{A}$ é fechada para reuniões enumeráveis disjuntas.*

Prova.

Basta mostrar, é óbvio, a parte "se". Dada uma sequência $(E_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ seja

$$F_k = E_k \setminus \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right] = E_k \cap \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right]^c.$$

É claro que (F_k) é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{A}$ e que

$$\dot{\bigcup_{\mathbb{N}}} F_k = \bigcup_{\mathbb{N}} E_k \clubsuit$$

Exemplos. Fixado um conjunto X, as famílias abaixo são σ-álgebras sobre X.

1. $\mathcal{P}(X)$ e $\{\varnothing, X\}$.

2. Se X é não enumerável,

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ é enumerável ou } E^c \text{ é enumerável}\}.$$

   Dizemos que $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra dos enumeráveis ou co-enumeráveis de X.

3. A intersecção de qualquer família de σ-álgebras sobre X.

Por favor, verifique os exemplos acima.

Definição 1.1 *Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.*

- *A* **σ-álgebra gerada por** *$\mathcal{E}$ é dada pela intersecção de todas as famílias de σ-álgebras sobre X que contém $\mathcal{E}$. Indicamos tal σ-álgebra por*

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) \qquad [\textit{também é usual a notação } \sigma(\mathcal{E})].$$

- *Equivalentemente, $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ é a menor σ-álgebra, sobre X, que contém $\mathcal{E}$.*

- *Os elementos de $\mathcal{E}$ são chamados* elementos geradores de *$\mathcal{M}(\mathcal{E})$.*

Lema 1.2 *Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ contidas em $\mathcal{P}(X)$.*

(a) Se $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$, então $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

(b) Se $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, então $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

Prova.

(a) Como $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ é uma σ-álgebra contendo $\mathcal{E}$, segue que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$, a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{E}$, está contida em $\mathcal{M}(\mathcal{F})$

(b) Basta notar que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ e utilizar (a)$\clubsuit$

A seguir, a σ-álgebra baseada na topologia de um conjunto X, onde X é um espaço métrico ou um espaço topológico. O caso $X = \mathbb{R}$, é fundamental.

Definição 1.2 A álgebra de Borel $\mathcal{B}_X$ *de um espaço métrico (ou topológico) é a* σ*-álgebra gerada pelos conjuntos abertos em* X *(ou, equivalentemente, pelos fechados em* X*). Os conjuntos pertencentes a* $\mathcal{B}_X$ *são chamados* conjuntos de Borel *de* X *ou, simplesmente,* borelianos *de* X*. Uma intersecção enumerável de abertos é dito um* G_δ*, uma reunião enumerável de fechados é um* F_σ*, uma reunião enumerável de* $G_{\delta's}$ *é um* $G_{\delta\sigma}$*, uma intersecção enumerável de* $F_{\sigma's}$ *é um* $F_{\sigma\delta}$*, etc.*

Proposição 1.1 *A* σ*-álgebra* $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ *é gerada por cada uma das famílias abaixo. No que segue,* a *e* b *indicam números reais.*

Os intervalos abertos limitados: $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a < b\}$.

Os intervalos fechados limitados: $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] : a < b\}$.

Os intervalos semi-abertos limitados:

$$\mathcal{E}_3 = \{(a,b] : a < b\} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_4 = \{[a,b) : a < b\}.$$

As semi-retas abertas: $\mathcal{E}_5 = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ *ou* $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$.

As semi-retas fechadas: $\mathcal{E}_7 = \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ *ou* $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Prova.

Os elementos geradores nas famílias acima são borelianos. De fato, os pertencentes a $\mathcal{E}_j$, para $j \neq 3$ e $j \neq 4$, são abertos ou fechados e aqueles em $\mathcal{E}_3$ e $\mathcal{E}_4$ são $G_{\delta's}$. Por exemplo,

$$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Logo, pelo Lema 1.2 segue $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j) \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ para todo j.

Abertos em $\mathbb{R}$ são uniões contáveis de intervalos abertos. Segue $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$.

Por fim, temos $(a,b) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$ para todo j. [Por exemplo, para $j = 2$ temos

$$(a,b) = \bigcup \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

Verifique os demais casos.] Segue $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$, para todo j ♣

Definição 1.3 *Consideremos* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *uma família de conjuntos não vazios, o produto cartesiano*

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

e as projeções coordenadas

$$\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha, \ \textit{onde } \alpha \in A.$$

Suponhamos que $\mathcal{M}_\alpha$ *é uma* σ*-álgebra sobre* X_α*, para cada* $\alpha \in A$*. A* **σ-álgebra produto** *sobre* X *é a* σ*-álgebra gerada pela família de conjuntos*

$$\left\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \ \textit{e } \alpha \in A\right\},$$

e a indicamos por

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha.$$

No caso finito $A = \{1, \ldots, n\}$ *escrevemos também*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{M}_j \quad \textit{ou} \quad \mathcal{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{M}_n.$$

[Abusando da linguagem e da imagética, $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ é a "faixa" $E_\alpha \times \prod_{\alpha' \neq \alpha} X_{\alpha'}$.]

Proposição 1.2 *Se* A *é enumerável então*

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$$

é a σ*-álgebra gerada por*

$$\left\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\right\}.$$

Prova.

Pelo Lema 1.2, é suficiente verificarmos que os elementos geradores de uma σ-álgebra pertencem à outra σ-álgebra e vice-versa. Dado $E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, temos

$$\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta \in A} E_\beta, \text{ com } E_\beta = X_\beta \in \mathcal{M}_\beta, \text{ se } \beta \neq \alpha.$$

Inversamente, obtemos o produtório

$$\prod_{\alpha \in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha), \text{ com } A \text{ enumerável} \clubsuit$$

[Abusando da linguagem e da imagética, $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$ é um "retângulo". A prova acima revela que toda "faixa" é um "retângulo" e, inversamente, todo "retângulo" é uma intersecção de "faixas".]

Proposição 1.3 *(***Refinamento da família de geradores***). Suponhamos que a σ-álgebra $\mathcal{M}_\alpha$, sobre X_α, é gerada pela família de conjuntos $\mathcal{E}_\alpha$, para cada $\alpha \in A$. Valem as propriedades abaixo.*

(a) A σ-álgebra produto

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$$

é gerada pela família $\mathcal{F}_1 = \left\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \text{ e } \alpha \in A\right\}$.

(b) Se A é enumerável e $X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$, para cada $\alpha \in A$, então

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$$

é gerada pela família

$$\mathcal{F}_2 = \left\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha\right\}.$$

Prova. Notemos que $\mathcal{M}_\alpha = \sigma(\mathcal{E}_\alpha)$.

(a) É claro que

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}_1) \subset \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha,$$

pois $\mathcal{F}_1$ é subconjunto da família de geradores de $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. Inversamente, fixado $\alpha \in A$, propriedades da função imagem inversa e o fato de $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$ ser uma σ-álgebra mostram que a coleção

$$\left\{E \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)\right\}$$

é uma σ-álgebra em X_α. Pois, basta notar que

$$\pi_\alpha^{-1}(E^c) = \pi_\alpha^{-1}(E)^c \quad \text{e} \quad \pi_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{\mathbb{N}} E_n\right) = \bigcup_{\mathbb{N}} \pi_\alpha^{-1}(E_n).$$

Continuemos. A coleção citada evidentemente contém $\mathcal{E}_\alpha$ e portanto a coleção também contém $\sigma(\mathcal{E}_\alpha) = \mathcal{M}_\alpha$.

Resumindo, temos $\pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$, para cada $E \in \mathcal{M}_\alpha$ e para cada $\alpha \in A$. Em consequência, pela definição de σ-álgebra produto vale a inclusão

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}_1).$$

(b) Análoga à Proposição 1.2 (verifique)♣

Um espaço topológico é separável se contém um subconjunto denso enumerável.

Proposição 1.4 *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ espaços métricos e*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j,$$

munido com a métrica produto. São válidas as propriedades abaixo.

(a) $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$.

(b) *Se os espaços $X_{j's}$ são separáveis então* $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$ [*e* $\prod_{j=1}^{n} X_j$ *é separável*].

Prova.

(a) Pela Proposição 1.3 (a), a σ-álgebra $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$ é gerada pelos conjuntos

$$\pi_j^{-1}(U_j), \text{ com } 1 \leq j \leq n \text{ e } U_j \text{ aberto em } X_j.$$

Como tais conjuntos são abertos no espaço métrico $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$, pelo Lema 1.2 (b) concluímos que $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$.

(b) Seja C_j denso e contável em X_j [logo, $\prod_{j=1}^{n} C_j$ é denso e contável em X, cheque] e $\mathcal{E}_j$ a coleção, contável, de bolas abertas com centro em C_j e raio racional r. Todo aberto O em X_j é reunião contável de bolas abertas de $\mathcal{E}_j$ [pois, se $B(p;r) \subset O$, temos que existe $x_j \in C_j$, com $x_j \in B(p;r/2)$, e portanto $p \in B(x_j;r/2) \subset B(p;r) \subset O$].

Assim, a coleção $\mathcal{E}_j$ é uma base contável de abertos de X_j e a σ-álgebra $\mathcal{B}_{X_j}$ é gerada por $\mathcal{E}_j$.

A coleção (de produtos cartesianos de bolas abertas)

$$\mathcal{E} = \left\{ \prod_{j=1}^{n} E_j : E_j \in \mathcal{E}_j \right\}$$

é uma base contável de abertos de X (verifique). Logo, $\mathcal{E}$ gera $\mathcal{B}_X$.

Por outro lado, pela Proposição 1.3(b), a coleção $\mathcal{E}$ gera $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$♣

Corolário 1.1 *Temos*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Definição 1.4 *Uma coleção $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X é* **família elementar** *se,*

- $\varnothing \in \mathcal{E}$,
- *Se* $E,\ F \in \mathcal{E}$ *então* $E \cap F \in \mathcal{E}$,
- *Se* $E \in \mathcal{E}$, *então* E^c *é união finita disjunta de elementos de* $\mathcal{E}$. *[*Atenção*: isto não quer dizer que* $E^c \in \mathcal{E}$.*]*

Se $E \in \mathcal{E}$, dizemos que E é um conjunto **elementar**.

Atenção, o enunciado abaixo é "pouco melhor" que o no livro texto, p. 23.

Proposição 1.5 *Seja $\mathcal{E}$ uma família elementar. As coleções $\mathcal{A}$, das uniões finitas e disjuntas, e $\mathcal{A}'$, das uniões finitas, ambas de conjuntos elementares, são iguais e formam uma álgebra.*

Prova.

É evidente que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Chequemos a inclusão reversa.

Afirmamos que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{A}$, se os $E_{i's} \in \mathcal{E}$. O caso $n = 1$ é óbvio. Supondo a afirmação válida para $n-1$ escrevemos

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = \dot{\bigcup_{j=1}^{m}} F_j, \text{ com } F_{j's} \in \mathcal{E},$$

e então

$$E_n \bigcup \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = E_n \bigcup \left(\dot{\bigcup_{j=1}^{m}} F_j \right) = E_n \dot{\bigcup} \left[\dot{\bigcup_{j=1}^{m}} (F_j \setminus E_n) \right],$$

sendo que temos $E_n^c = \dot{\cup}_{k=1}^{p} G_k$, com $G_k \in \mathcal{E}$ se $1 \le k \le p$, e consequentemente

$$F_j \setminus E_n = \dot{\bigcup_{k=1}^{p}} (F_j \cap G_k), \text{ com } F_j \cap G_k \in \mathcal{E} \text{ se } 1 \le j \le m \text{ e } 1 \le k \le p.$$

Logo, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.

Verifiquemos que a coleção $\mathcal{A}'$ (já fechada para uniões finitas) é uma álgebra. Se $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ temos

$$E_i^c = \bigcup_{j_i=1}^{J_i} F_{j_i}^i, \text{ se } 1 \le i \le n,$$

com os conjuntos $F_{j_i}^i$ em $\mathcal{E}$ e

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j_i=1}^{J_i} F_{j_i}^i \right) = \bigcup_{\substack{1 \le j_k \le J_k \\ 1 \le k \le n}} F_{j_1}^1 \bigcap \cdots \bigcap F_{j_n}^n \ \clubsuit$$

1.3 Medidas

Definição 1.5 *Seja X um conjunto com uma σ-álgebra $\mathcal{M}$. Uma* **medida** *em $\mathcal{M}$, ou em $(X,\mathcal{M})$, é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ com as propriedades abaixo.*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Se $(E_n)_{\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$, então vale

$$\text{(Def. 1.5.1)} \qquad \mu\left(\bigcupdot_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

A propriedade (ii), dita σ-aditiva (aditividade enumerável) implica na propriedade

$(ii)'$ (aditividade finita) *se $E_1, E_2, \ldots, E_m$ são conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$ então*

$$\mu(E_1 \cupdot \cdots \cupdot E_m) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_m),$$

pois podemos definir $E_n = \emptyset$ para $n > m$.

Uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ que satisfaz (i) e $(ii)'$, mas não necessariamente (ii), é dita uma medida finitamente aditiva.

Comentários.

- Muitos textos enunciam a propriedade σ-aditiva apresentando a fórmula

$$\mu\left(\bigcupdot_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n),$$

na qual a ordem dos naturais está implícita. Justifiquemos adotarmos a fórmula (Def. 1.5.1), que independe da ordem dos naturais.

- A união de conjuntos $\bigcupdot_n E_n$ é invariante por qualquer reordenação dos $E_{n's}$, por qualquer associação dos $E_{n's}$ e por qualquer dissociação [com cada E_n dissociado numa união contável e disjunta de conjuntos na σ-álgebra]. Paralelamente, a soma (não ordenada) $\sum_n \mu(E_n)$ em $[0,+\infty]$ é evidentemente comutativa, é livremente associativa e, devido à propriedade associativa, o valor da soma $\sum_n \mu(E_n)$ não se altera ao dissociarmos cada valor $\mu(E_n)$ como uma soma não ordenada (enumerável) de valores em $[0,+\infty]$.

◇ Para séries (ainda que em $[0, +\infty]$) a propriedade comutativa não é evidente e as propriedades associativa e dissociativa são muito restritas.

◇ **Apesar das aparências, a fórmula (Def. 1.5.1) não é ambígua.** Seja $E \in \mathcal{M}$. Consideremos duas decomposições (enumeráveis) arbitrárias de E (cada qual em conjuntos disjuntos e todos estes pertencentes à σ-álgebra)

$$E = \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} E_j \quad \text{e} \quad E = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} \mathcal{E}_k.$$

Então, temos

$$E_j = \dot{\bigcup_{k}} E_j \cap \mathcal{E}_k \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_k = \dot{\bigcup_{j}} E_j \cap \mathcal{E}_k.$$

Logo,

$$\mu(E_j) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_j \cap \mathcal{E}_k) \quad \text{e} \quad \mu(\mathcal{E}_k) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j \cap \mathcal{E}_k).$$

Donde segue

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_j \cap \mathcal{E}_k) = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mu(E_j \cap \mathcal{E}_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j \cap \mathcal{E}_k).$$

Então, como era de se esperar, encontramos

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j) = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mu(E_j \cap \mathcal{E}_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(\mathcal{E}_k).$$

Seja X um conjunto e $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra sobre X. Seguem as definições.

∘ O par $(X, \mathcal{M})$ é dito um **espaço mensurável** e os conjuntos em $\mathcal{M}$ são chamados **conjuntos mensuráveis**.

∘ Se μ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$, a terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um **espaço de medida**.

∘ Dado um espaço de medida, a medida μ é dita **finita** se $\mu(X) < \infty$, e é dita **σ-finita** se temos

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \text{ com } E_j \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(E_j) < \infty, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

∘ Um conjunto mensurável E é **σ-finito**, para μ, se temos

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \text{ com } E_j \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(E_j) < \infty, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

∘ A medida μ é chamada **semi-finita** se para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = \infty$, existir $F \in \mathcal{M}$ satisfazendo as condições $F \subset E$ e $0 < \mu(F) < \infty$.

Exemplos. Seja X um conjunto não vazio (solicitamos ao leitor as verificações).

1. Se $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ e $f : X \to [0,\infty]$ é arbitrária então

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x), \text{ onde } E \in \mathcal{M}, \text{ é uma medida.}$$

   Temos que μ é semi-finita se e somente se $f(x) < \infty$, para todo $x \in X$.

   Ainda, μ é σ-finita se e só se μ é semi-finita e $\{x : f(x) > 0\}$ é enumerável.

   Se $\mu(x) = 1$, para todo x, então μ é chamada uma medida de contagem.

   Se existir $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 1$ e $f(x) = 0$, se $x \neq x_0$, dizemos que μ é uma medida de Dirac.

2. Suponhamos X não enumerável e $\mathcal{M}$ a σ-álgebra dos conjuntos enumeráveis, ou co-enumeráveis. A função

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ é enumerável,} \\ 1, & \text{se } E \text{ é co-enumerável,} \end{cases}$$

   é uma medida.

3. Se X infinito e $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, então a função

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ é finito,} \\ \infty, & \text{se } E \text{ é infinito,} \end{cases}$$

   define uma medida finitamente aditiva mas não uma medida.

Seja $(X_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos arbitrária. Dizemos que

- (X_n) é crescente se $X_n \subset X_{n+1}$, para todo n, e escrevemos

$$X_n \nearrow \bigcup_{\mathbb{N}} X_n.$$

- (X_n) é decrescente se $X_n \supset X_{n+1}$, para todo n, e escrevemos

$$X_n \searrow \bigcap_{\mathbb{N}} X_n.$$

Teorema 1.1 *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

(a) (Monotonicidade) *Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

(b) (Sub-aditividade) *Se $(E_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

(c) Se $(E_n)_{\mathbb{N}}$ é crescente em $\mathcal{M}$, então $\mu(E_n) \nearrow \mu(\bigcup E_n)$.

(d) Se $(E_n)_{\mathbb{N}}$ é decrescente em $\mathcal{M}$ e $\mu(E_1) < \infty$, então $\mu(E_n) \searrow \mu(\bigcap E_n)$.

Prova.

(a) Temos, $\mu(F) = \mu[E \mathbin{\dot\cup} (F \setminus E)] = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.

(b) Observemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \mathbin{\dot\bigcup} \dot{\bigcup_{n=2}^{\infty}} \left(E_n \setminus \bigcup_{k=2}^{n-1} E_k\right).$$

Portanto, pela definição de medida e pelo ítem (a),

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(E_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mu\left(E_n \setminus \bigcup_{k=2}^{n-1} E_k\right) \leq \mu(E_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mu(E_n).$$

(c) A afirmação é óbvia se $\mu(E_n) = \infty$ para algum n. Suponhamos então $\mu(E_n) < \infty$, para todo n. Temos $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \mathbin{\dot\cup} (E_2 \setminus E_1) \mathbin{\dot\cup} (E_3 \setminus E_2) \mathbin{\dot\cup} \ldots$ e

$$\mu\left(\bigcup E_n\right) = \mu(E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) =$$

$$= \mu(E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})] = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

(d) Visto que $E_n \searrow \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, temos $(E_1 \setminus E_n) \nearrow (E_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)$. Portanto, pelo item (c), obtemos $\lim \mu(E_1 \setminus E_n) = \mu(E_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)$. Assim sendo, já que os conjuntos $E_{j's}$ tem medida finita obtemos

$$\lim[\mu(E_1) - \mu(E_n)] = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{\mathbb{N}} E_i\right) \clubsuit$$

Definição 1.6 *Fixado um espaço de medida* $(X, \mathcal{M}, \mu)$*, um conjunto* $N \in \mathcal{M}$ *é dito* **nulo** *se*

$$\mu(N) = 0.$$

Pela sub-aditividade, uma união enumerável de conjuntos nulos é também nulo. Se uma afirmação vale para todo ponto $x \in X \setminus N$, onde N é conjunto nulo (ou, conjunto de medida nula), dizemos que ela vale quase sempre (abreviado q.s.) ou para quase todo x. É importante observar que o conjunto dos pontos em que a afirmação não vale é um subconjunto (talvez não mensurável) de N.

Definição 1.7 *Uma medida* $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *é* **completa** *se* $\mathcal{M}$ *contém todos os subconjuntos de quaisquer conjuntos nulos.*

A seguir, mostramos que toda medida pode ser completada.

Teorema 1.2 (Completamento). *Suponhamos* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Sejam*

$$\begin{cases} \mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}, \\ \overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M} \text{ e } F \subset N \text{ para algum } N \in \mathcal{N}\}. \end{cases}$$

Então, $\overline{\mathcal{M}}$ *é uma* σ*-álgebra e existe uma única extensão* $\overline{\mu}$*, da medida* μ*, a uma medida sobre* $\overline{\mathcal{M}}$*. Ainda mais,* $\overline{\mu}$ *é completa.*

Como mnemônico, temos o diagrama comutativo, com a inclusão $\imath : \mathcal{M} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}$*,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\imath"'] & {[0,\infty]} \\ \overline{\mathcal{M}} \arrow[ur, "\overline{\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

Prova.

- ◇ $\overline{\mathcal{M}}$ é uma σ-álgebra.

  É claro que $\emptyset \in \mathcal{N}$ e então $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \overline{\mathcal{M}}$. Segue trivialmente que $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$. Como $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são fechados para uniões contáveis, $\overline{\mathcal{M}}$ também. Se $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, com $E \in \mathcal{M}$ e $F \subset N \in \mathcal{N}$, resta mostrar que

  $$(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}.$$

  Ora, basta ver que

  $$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c = E^c \cap \big[(N \setminus F) \cup N^c\big] = (E \cup N)^c \bigcup [E^c \cap (N \setminus F)].$$

A seguir, para uma união $E \cup F$ em $\overline{\mathcal{M}}$ como acima, definamos

$$\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E).$$

◇ A boa definição da função $\overline{\mu}$.

Suponhamos $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$, com $E_j \in \mathcal{M}$ e $F_j \subset N_j \in \mathcal{N}$, para $j = 1, 2$. Deduzimos

$$E_1 \subset E_2 \cup N_2 \quad \text{e} \quad \mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2).$$

Vice-versa, $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$.

◇ A função $\overline{\mu}$ estende μ e é uma medida. Cheque (é trivial).

◇ Unicidade de $\overline{\mu}$.

Seja ν uma medida em $\overline{\mathcal{M}}$, estendendo μ. Seja $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, com $E \in \mathcal{M}$ e $F \subset N$ para algum $N \in \mathcal{N}$. Verifiquemos que

$$\nu(E \cup F) = \mu(E) = \overline{\mu}(E \cup F).$$

Temos,

$$\mu(E) = \nu(E) \leq \nu(E \cup F) \leq \nu(E \cup N) = \mu(E \cup N) \leq \mu(E).$$

◇ A função $\overline{\mu}$ é uma medida completa.

Suponhamos $G \subset E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, onde $E \in \mathcal{M}$, $F \subset N \in \mathcal{N}$ e $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E) = 0$. Então,

$$G = \varnothing \cup G, \quad \text{com } \varnothing \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad G \subset (E \cup N) \in \mathcal{N}.$$

Logo,

$$G \in \overline{\mathcal{M}} \clubsuit$$

A medida $\overline{\mu}$ é o completamento de μ enquanto $\overline{\mathcal{M}}$ é o **completamento** de $\mathcal{M}$, com respeito à medida μ.

1.4 Medidas Exteriores

Definição 1.8 *Uma* **medida exterior** *sobre um conjunto* $X \neq \varnothing$ *é uma função*

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que

- $\mu^*(\varnothing) = 0$.
- $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, *se* $A \subset B$ (monotonicidade).
- $\mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i)$ (σ-subaditividade).

Proposição 1.6 (Usina de Medidas Exteriores). *Seja* $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *uma coleção tal que* $\varnothing \in \mathcal{E}$ *e* $X \in \mathcal{E}$. *Consideremos uma função* $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty]$ *satisfazendo* $\rho(\varnothing) = 0$. *Então*

$$\textbf{(Prop.1.6.1)} \qquad \mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{\mathbb{N}} \rho(E_n) : E_n \in \mathcal{E} \text{ e } A \subset \bigcup_{\mathbb{N}} E_n\right\}, \text{ onde } A \subset X,$$

é uma medida exterior sobre X.

Como mnemônico, temos o diagrama comutativo, com $\imath : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\imath"'] & {[0, \infty]} \\ \mathcal{P}(X) \arrow[ur, "\mu^*"'] & \end{tikzcd}$$

Prova.

Dado $A \subset X$, é óbvio que existe uma sequência $(E_n) \subset \mathcal{E}$ tal que $A \subset \bigcup_{\mathbb{N}} E_n$.

Se $E_n = \varnothing$, para todo n, então temos $\varnothing = \bigcup_{\mathbb{N}} E_n$ e $\mu^*(\varnothing) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\varnothing) = 0$.

Se $A \subset B$ e $B \subset \bigcup_{\mathbb{N}} E_n$, então $A \subset \bigcup_{\mathbb{N}} E_n$. Donde segue $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Quanto à σ-subaditividade, consideremos uma sequência (A_n) em $\mathcal{P}(X)$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) = \infty$, nada há a provar. Caso contrário, dado $\epsilon > 0$, para cada n existe $(E_i^n)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ satisfazendo $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^n$ e $\sum_i \rho(E_i^n) < \mu^*(A_n) + \epsilon 2^{-n}$. Logo, $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,i} E_i^n$ e então

$$\mu^*\left(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{i,n} \rho(E_i^n) \leq \sum_n [\mu^*(A_n) + \epsilon 2^{-n}] = \sum_n \mu^*(A_n) + \epsilon \; \clubsuit$$

Comentemos, a seguir, a passagem de uma medida exterior a uma medida.

Definição 1.9 *Seja μ^* uma medida exterior sobre X. O conjunto $A \subset X$ é dito* μ^*-mensurável *se*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \text{ para todo } E \subset X.$$

Para verificarmos tal igualdade basta provarmos, é fácil ver, a desigualdade $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, para todo $E \subset X$, a qual é óbvia se $\mu^*(E) = \infty$. Concluímos que A é μ^*-mensurável se e somente se

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \text{ para todo } E \subset X \text{ tal que } \mu^*(E) < \infty.$$

Interpretamos A como um conjunto tal que, para $E \supset A$, a medida exterior $\mu^*(A)$ $[= \mu^*(A \cap E)]$ é igual à "medida interior" $\mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c)$.

A seguir, a partir de uma medida exterior (arbitrária) estabelecemos uma sigma-álgebra de conjuntos mensuráveis e uma medida completa.

Teorema 1.3 (Carathéodory). *Seja μ^* uma medida exterior sobre X.*

- *A família $\mathcal{M}$ dos conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra.*
- *Todo conjunto de medida exterior zero é μ^*-mensurável.*
- *A restrição de μ^* a $\mathcal{M}$ é uma medida completa.*

Como mnemônico, temos o diagrama comutativo, com $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\mu^*"] & {[0,\infty]} \\
\mathcal{M} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\mu^*|_{\mathcal{M}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Prova.

◇ $\mathcal{M}$ é uma álgebra e μ^* é finitamente aditiva sobre $\mathcal{M}$.

É óbvio que $A \in \mathcal{M}$ se e só se $A^c \in \mathcal{M}$. Para $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ e $E \subset X$, temos

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\
&= [\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) \\
&\quad + \mu^*(E \cap A^c \cap B)] + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c).
\end{aligned}$$

Pela identidade $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B$, a sub-aditividade de μ^* e a identidade $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, deduzimos a desigualdade

$$\mu^*(E) \geq \mu^*[E \cap (A \cup B)] + \mu^*[E \cap (A \cup B)^c].$$

Portanto $A \cup B \in \mathcal{M}$, então uma álgebra. Ainda mais, se $A \cap B = \emptyset$ então

$$\mu^*(A \uplus B) = \mu^*[(A \uplus B) \cap A] + \mu^*[(A \uplus B) \cap A^c] = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

◇ $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra e μ^* é σ-aditiva sobre $\mathcal{M}$.

Seja $(A_n) \subset \mathcal{M}$. Podemos supor que os conjuntos $A_{n's}$ são disjuntos [particionando $\bigcup A_n = A_1 \dot\cup (A_2 \setminus A_1) \dot\cup A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \dot\cup \cdots$]. Definamos os conjuntos $B_n = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n$ e $B = \dot\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Então, dado $E \subset X$ e $n \geq 1$, e pondo $B_0 = \emptyset$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}).$$

Iterando tal procedimento obtemos $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i)$. Portanto,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c).$$

Impondo $n \to \infty$ (e empregando a σ-subaditividade de μ^*) segue

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^* \left[\dot\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i) \right] + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E). \end{aligned}$$

Assim, $B = \dot\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ pertence a $\mathcal{M}$ e $\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c)$, para todo $E \subset X$. Substituindo $E = \dot\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = B$ nesta última identidade obtemos

$$\mu^* \left(\dot\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i).$$

Logo, μ^* é σ-aditiva sobre $\mathcal{M}$ e $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ é uma medida.

◇ Conjuntos de medida exterior zero são μ^*-mensuráveis e $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ é completa.

Se $\mu^*(N) = 0$ então $N \in \mathcal{M}$ pois, para $E \subset X$,

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap N) + \mu^*(E \cap N^c) = \mu^*(E \cap N^c) \leq \mu^*(E) \clubsuit$$

Definição 1.10 *Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra. Uma função de conjuntos*

$$\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty] \text{ é uma } \textbf{pré-medida} \text{ sobre } \mathcal{A} \text{ se}$$

- $\mu_0(\varnothing) = 0$ *e*
- *para toda sequência $(A_i)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos com $\dot{\bigcup\limits_{\mathbb{N}}} A_i \in \mathcal{A}$ temos*

$$\mu_0\left(\dot{\bigcup_{\mathbb{N}}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_0(A_i) \qquad [\textit{propriedade } \sigma - \textit{aditiva}].$$

É trivial ver que toda pré-medida é

$$\begin{cases} \text{finitamente aditiva [pois, } \mu_0\left(\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_0(A_i) \text{ se } A_{i's} \in \mathcal{A}] \\ \text{e} \\ \text{monótona [pois } \mu_0(A) \leq \mu_0(B) \text{ se } A \subset B, \text{ onde } A, B \in \mathcal{A}]. \end{cases}$$

As noções de pré-medida finita e σ-finita são análogas às suas correspondentes dadas para medidas.

Uma pré-medida μ_0 sobre uma álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, induz, em concordância com a Proposição 1.6, a medida exterior em X,

$$\textbf{(Def.1.10.1)} \qquad \mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_0(A_i) : A_i \in \mathcal{A} \text{ e } E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}.$$

Proposição 1.7 (A pré-medida e a medida exterior). *Sejam μ_0 uma pré-medida sobre uma álgebra $\mathcal{A}$ e μ^* a medida exterior acima definida. São verdadeiras as propriedades abaixo.*

(a) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$,

(b) todo conjunto na álgebra $\mathcal{A}$ é μ^*-mensurável.

Como mnemônico, temos o diagrama comutativo, com a inclusão $\imath : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[d, "\imath"'] & {[0, \infty]} \\ \mathcal{P}(X) \arrow[ur, "\mu^*"'] & \end{tikzcd}$$

Prova. Seja $A \in \mathcal{A}$.

(a) Escrevendo $A = A \uplus \emptyset \uplus \emptyset \uplus \emptyset \uplus \cdots$, obtemos

$$\mu^*(A) \leq \mu_0(A).$$

Dada $(A_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ com $A \subset A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, a monotonicidade e a σ-aditividade de μ_0 garantem

$$\begin{aligned} \mu_0(A) \quad &\leq \mu_0(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \\ &= \mu_0\{A_1 \uplus (A_2 \setminus A_1) \uplus [A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)] \uplus \cdots\} \\ &\leq \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2) + \mu_0(A_3) + \cdots. \end{aligned}$$

Assim, pela definição de ínfimo obtemos

$$\mu_0(A) \leq \mu^*(A).$$

A prova de (a) está completa.

(b) Sejam $E \subset X$ e uma arbitrária $(A_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ satisfazendo

$$E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} A_n.$$

Temos

$$\begin{aligned} \sum \mu_0(A_n) &= \sum \mu_0(A_n \cap A) + \sum \mu_0(A_n \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \end{aligned}$$

Logo, por definição de ínfimo,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \text{ para todo } E \subset X.$$

Donde segue que A é μ^*-mensurável♣

Teorema 1.4 (De pré-medida a medida). *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathcal{P}(X)$, uma pré-medida μ_0 sobre $\mathcal{A}$ e a σ-álgebra $\mathcal{M}$ gerada por $\mathcal{A}$.*

(a) *Seja $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$, com μ^* a medida exterior induzida por μ_0 [fórmula (DEF.1.10.1)]. Então, a restrição*

$$\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$$

é uma medida sobre $\mathcal{M}$ cuja restrição a $\mathcal{A}$ é μ_0. Assim, vale a propriedade

$$\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0.$$

(b) *Se ν é uma outra medida sobre $\mathcal{M}$ que estende μ_0 então temos*

$$\nu(E) \leq \mu(E), \text{ para todo } E \in \mathcal{M},$$

ocorrendo a igualdade se $\mu(E) < \infty$.

(c) *Se μ_0 é σ-finita então μ é a única extensão de μ_0 a uma medida sobre $\mathcal{M}$.*

Como mnemônico, obtemos o seguinte diagrama comutativo, com as inclusões $\imath : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{M}$ e $\jmath : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$ (isto é, temos $\mu^* \circ \jmath \circ \imath = \mu_0$),

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[d, "\imath"'] & {[0,\infty]} \\ \mathcal{M} \arrow[ur, "\mu"] \arrow[r, "\jmath"'] & \mathcal{P}(X). \arrow[u, "\mu^*"'] \end{tikzcd}$$

Prova. Notemos que $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$.

(a) Pela Proposição 1.7(a), μ_0 induz uma medida exterior μ^* que estende μ_0. Pelo Teorema de Carathéodory, μ^* restrita à σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis é uma medida. Pela Proposição 1.7(b), todo conjunto em $\mathcal{A}$ é μ^*-mensurável. Logo, tal medida está definida sobre $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$. Assim, a restrição $\mu = \mu^*\Big|_{\mathcal{M}}$ é uma medida. É trivial ver que $\mu\Big|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

(b) Seja $E \in \mathcal{M}$ e $E \subset \bigcup_n A_n$, com $(A_n)_{\mathbb{N}}$ um sequência arbitrária na álgebra $\mathcal{A}$. Temos $\nu(E) \leq \sum \nu(A_n) = \sum \mu_0(A_n)$. Por (a) [as definições de μ^* e μ] segue

$$\nu(E) \leq \mu^*(E) = \mu(E).$$

A primeira afirmação de (b) está provada.

Notemos que, como ν e μ são medidas estendendo μ_0 [vide Teorema 1.1(c)], valem as identidades

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Suponhamos agora $\mu(E) < \infty$, onde $E \in \mathcal{M}$. Por definição, $\mu(E) = \mu^*(E)$.

Então, dado $\epsilon > 0$, por definição de ínfimo e de μ^*, existe uma [particular] sequência $(A_n) \subset \mathcal{A}$ satisfazendo

$$E \subset \bigcup_n A_n \quad \text{e} \quad \sum \mu_0(A_n) < \mu(E) + \epsilon.$$

Assim, $\mu(\bigcup_n A_n \setminus E) < \epsilon$.

Desta forma, pela observação acima e pela desigualdade $\nu \leq \mu$ encontramos

$$\begin{aligned} \mu(E) &\leq \mu(\textstyle\bigcup_n A_n) \\ &= \nu(\textstyle\bigcup_n A_n) \\ &= \nu(E) + \nu(\textstyle\bigcup_n A_n \setminus E) \\ &\leq \nu(E) + \mu(\textstyle\bigcup_n A_n \setminus E) \\ &\leq \nu(E) + \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Donde segue $\mu(E) \leq \nu(E)$ e concluímos (b).

(c) Seja $X = \bigcup_n A_n$, com $\mu_0(A_n) < \infty$, para todo n. Como já vimos, podemos supor os conjuntos $A_{n's}$ dois a dois disjuntos. Assim, para $E \in \mathcal{M}$ temos

$$E = \dot{\bigcup_n}(E \cap A_n).$$

Seja ν como em (b). Temos $\mu(E \cap A_n) \leq \mu(A_n) = u_0(A_n) < \infty$. Por (b) segue

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \sum \nu(E \cap A_n) \\ &= \sum \mu(E \cap A_n) \\ &= \mu(E)\clubsuit \end{aligned}$$

1.5 Medidas de Borel em $\mathbb{R}$

Neste seção construímos a teoria definitiva para mensurar subconjuntos em $\mathbb{R}$ tendo por base que a medida de um intervalo é seu comprimento. Iniciamos com uma construção mais geral que produz uma ampla família de medidas em $\mathbb{R}$ cujo domínio é a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Introduzamos alguma terminologia.

Uma **medida de Borel** é uma medida definida sobre os borelianos de $\mathbb{R}$.

Como motivação, suponhamos que μ é uma medida de Borel finita e seja

$$F(x) = \mu\big((-\infty, x]\big), \text{ dita } \textbf{função distribuição} \text{ de } \mu.$$

Pela monotonicidade de μ [Teorema 1.1(a)], a função F é crescente.

Pela finitude de μ [vide Teorema 1.1(d)], a função F é contínua à direita (pois temos $(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{+\infty}(-\infty, x_n]$ se $x_n \searrow x$).

Ainda mais, para $b > a$ temos $(-\infty, b] = (-\infty, a] \mathbin{\dot\cup} (a, b]$ e

$$\mu\big((a, b]\big) = F(b) - F(a).$$

Nosso objetivo é inverter este processo e construir uma medida a partir de uma função crescente e contínua à direita (vide Figura 1.1 abaixo). Obviamente, o caso $F(x) = x$ conduz à medida de comprimento usual.

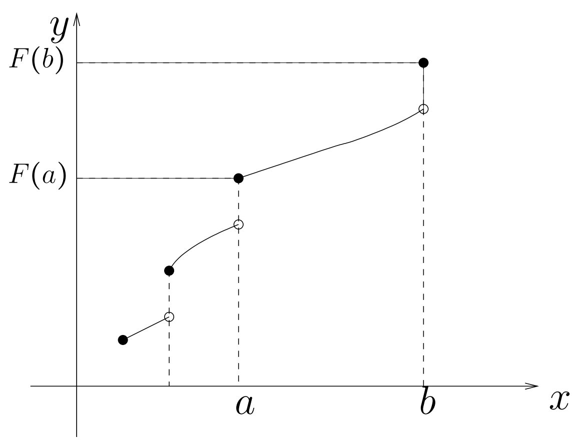

Figura 1.1: Um exemplo de F crescente e contínua à direita

Os conjuntos elementares serão os intervalos semi-abertos à esquerda $(a,b]$ (limitado superiormente), ou (a,∞) (ilimitado superiormente), ou o vazio $\emptyset$, com $-\infty \le a < b < \infty$, chamados **s-intervalos** (s de semi-aberto). A família

$$\mathcal{E}_s = \{\emptyset, (a,b], (a,\infty) : -\infty \le a < b < \infty\}$$

dos s-intervalos é uma família elementar [fechada para intersecções finitas, o complementar de cada conjunto na família é união finita disjunta de conjuntos na família e $\emptyset$ pertence à familia (cheque)].

Pela Proposição 1.5, a coleção das uniões disjuntas e finitas de s-intervalos é uma álgebra $\mathcal{A}_s$ que, pela Proposição 1.1, gera a σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Atenção. O enunciado abaixo, e sua prova, diferem (pouco) do livro texto p.33.

A proposição e o teorema que seguem são dois dos mais delicados do curso.

Proposição 1.8 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua à direita. Definamos*

$$F(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} F(x) \in [-\infty, +\infty].$$

Consideremos uma sequência finita arbitrária de s-intervalos dois a dois disjuntos $(I_i)_{1\le i\le n}$. Assim, para cada i,

$$\textit{ou temos } I_i = (a_i, b_i],\ \textit{com } a_i < b_i < \infty,\ \textit{ou temos } I_i = (a_i, b_i) = (a_i, +\infty).$$

Definamos

$$\textbf{(Prop.1.8.1)} \qquad \mu_0\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} [F(b_i) - F(a_i)] \ \textit{ e } \mu_0(\emptyset) = 0.$$

Então, μ_0 é uma pré-medida sobre $\mathcal{A}_s$ (uniões finitas e disjuntas de s-intervalos).

Prova. Três partes.

◇ μ_0 está bem definida e é finitamente aditiva.

Mostremos que a definição independe da representação. Examinemos o caso em que $\dot{\bigcup}_1^n I_i = I$ é um s-intervalo do tipo $(a,b]$ ou (a,∞). Reindexando os $I_{i's}$, se necessário, temos $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \cdots < b_n = b$ e obtemos

$$\sum_1^n [F(b_i) - F(a_i)] = F(b) - F(a).$$

Isto prova a fórmula $\mu_0(I) = F(b) - F(a)$, que independe da representação. Destaquemos que

$$\mu_0(I) = \sum_1^n \mu_0(I_i).$$

Mais geralmente, no caso em que $\dot\bigcup_{i=1}^n I_i = \dot\bigcup_{j=1}^m J_j$, com $I_{i's}$, e $J_{j's}$ duas sequências finitas de s-intervalos disjuntos, obtemos $I_i = \dot\bigcup_{j=1}^m (I_i \cap J_j)$ e, pelo primeiro caso, $\mu_0(I_i) = \sum_j \mu_0(I_i \cap J_j)$. Donde seguem as identidades

$$\sum_i \mu_0(I_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_j \mu_0(J_j),$$

mostrando que μ_0 é bem definida. Por construção, μ_0 é finitamente aditiva.

◇ μ_0 é monótona.

Segue trivialmente da definição de μ_0 (por favor, cheque).

◇ μ_0 é enumeravelmente aditiva (logo, uma pré-medida).

Seja $(I_i)_{i=1}^\infty$ uma sequência de s-intervalos disjuntos, com $\dot\bigcup_{i=1}^\infty I_i$ em $\mathcal{A}_s$. Por definição de $\mathcal{A}_s$ temos

$$\dot\bigcup_{i=1}^\infty I_i = \dot\bigcup_{j=1}^m J_j, \text{ com cada } J_j \text{ um s-intervalo.}$$

Vejamos que basta provarmos $\mu_0(J_j) = \sum_i \mu_0(J_j \cap I_i)$. De fato, assim sendo encontramos

$$\mu_0\left(\dot\bigcup_i I_i\right) = \mu_0\left(\dot\bigcup_j J_j\right) = \sum_j \mu_0(J_j) = \sum_i \sum_j \mu_0(J_j \cap I_i)$$

$$= \sum_i \mu_0\left(\dot\bigcup_j J_j \cap I_i\right) = \sum_i \mu_0(I_i).$$

Por conseguinte, podemos assumir $m = 1$.

Escrevamos J ao invés de J_1. Gratos à monotonicidade de μ_0 deduzimos

$$\mu_0\left(\dot\bigcup_{i=1}^\infty I_i\right) \geq \mu_0\left(\dot\bigcup_{i=1}^n I_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_0(I_i), \text{ para cada } n.$$

Donde segue

$$\mu_0(J) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu_0(I_i).$$

Quanto à desigualdade reversa, separemos em três casos.

Primeiro caso, suponhamos $J = (a,b]$ e limitado e fixemos $\epsilon > 0$. Como F é contínua à direita, segue que existe $\delta > 0$ tal que $F(a+\delta) - F(a) < \epsilon$ e, com a notação $I_i = (a_i, b_i]$, para cada i existe $\delta_i > 0$ tal que

$$F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Os intervalos abertos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[a+\delta, b]$ (cheque) e extraímos uma subcobertura finita. Descartando os intervalos $(a_i, b_i + \delta_i)$ contidos em um análogo e maior e reindexando-os podemos assumir que

- os intervalos $(a_1, b_1 + \delta_1), \ldots, (a_N, b_N + \delta_N)$ cobrem $[a+\delta, b]$,
- $b_i + \delta_i \in (a_{i+1}, b_{i+1} + \delta_{i+1})$ para cada $i = 1, \ldots, N-1$.

Desta forma temos $\mu_0(J) = \mu_0(\,(a,b]\,) = F(b) - F(a)$ e

$$\begin{aligned}
\mu_0(J) &< F(b) - F(a+\delta) + \epsilon \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \epsilon \\
&= F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} \big[F(a_{i+1}) - F(a_i)\big] + \epsilon \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} \big[F(b_i + \delta_i) - F(a_i)\big] + \epsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \Big[F(b_i) + \tfrac{\epsilon}{2^i} - F(a_i)\Big] + \epsilon \\
&< \sum_{i=1}^{N} \big[F(b_i) - F(a_i)\big] + 2\epsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Donde segue a desigualdade desejada. Encerramos o caso a e b finitos.

Segundo caso, $a = -\infty$. Por um argumento análogo, dado $M < \infty$, os intervalos abertos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[-M, b]$ e encontramos

$$F(b) - F(-M) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon.$$

Logo, já que $\epsilon > 0$ é arbitrário,

$$F(b) - F(-M) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i).$$

A continuidade de F em $-\infty$ nos dá

$$\mu_0\big[(-\infty, b]\big] = F(b) - F(-\infty) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i).$$

Terceiro caso, $b = +\infty$. Similarmente ao segundo caso, para qualquer $M < \infty$ obtemos

$$F(M) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon$$

e em consequência a desigualdade desejada

$$\mu_0\big[(a, \infty)\big] = F(+\infty) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) \clubsuit$$

O próximo resultado estabelece uma correspondência um a um entre medidas de Borel e funções crescentes. Recordemos que uma função crescente $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem no máximo uma quantidade enumerável de descontinuidades (verifique). Se x_0 é um ponto de descontinuidade de F, então estão bem definidos os limites laterais (são números reais)

$$F(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} F(x) \quad \text{e} \quad F(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} F(x).$$

Temos

$$F(x_0^-) < F(x_0^+) \quad \text{e} \quad F(x_0) \in [F(x_0^-), F(x_0^+)].$$

Modifiquemos F no ponto x_0, se necessário,

$$\text{definindo } F(x_0) = F(x_0^+),$$

em todo ponto de descontinuidade. A função "normalizada" F obtida é crescente e contínua à direita e, com o intuito de simplificar a apresentação da teoria, é para tais funções que enunciamos o fundamental teorema abaixo.

Teorema 1.5 (Correspondência entre medidas de Borel e funções crescentes e contínuas à direita). *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita. Então,*

- *Existe uma única medida de Borel μ_F sobre $\mathbb{R}$ satisfazendo a identidade*

$$\mu_F\big((a,b]\big) = F(b) - F(a), \quad \text{para quaisquer } a \text{ e } b.$$

- *Se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é também crescente e contínua à direita, temos*

$$\mu_F = \mu_G \text{ se e somente se } F - G \text{ é constante.}$$

Inversamente, se μ é uma medida de Borel sobre $\mathbb{R}$, finita sobre os intervalos limitados, então

$$F(x) = \begin{cases} \mu(\,(0,x]\,), & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -\mu(\,(x,0]\,), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

é crescente, contínua à direita e $\mu = \mu_F$.

Prova.

- ⋄ A pré-medida μ_0 originada por F [e definida na álgebra $\mathcal{A}_s$], vide Proposição 1.8, satisfaz a fórmula

$$\mu_0\big((a,b]\big) = F(b) - F(a),$$

  é σ- finita e, pelo Teorema 1.4(c) [*de pré-medida a medida*], é extensível de forma única a uma medida μ_F sobre a σ-álgebra dos borelianos $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ [a qual é gerada por $\mathcal{A}_s$], vide Proposição 1.1.

- ⋄ É claro que temos $\mu_F = \mu_G$ se e só se $F - G$ é uma constante.

- ⋄ Por fim, se μ é uma medida (logo, monótona), segue que F é crescente. Se $x > 0$ e $x_n \searrow x$, então $\bigcap(0,x_n] = (0,x]$. Se $x < 0$ e $x_n \searrow x$, então $\bigcup(x_n,0] = (x,0]$. Portanto, em ambos os casos (cheque),

$$F(x_n) \searrow F(x) \clubsuit$$

Teçamos alguns comentários sobre este teorema.

(1) É importante enfatizar que a condição de que μ é finita em intervalos limitados é *crucial*. De fato, as medidas de Hausdorff (que não serão abordadas neste curso) propiciam exemplos de medidas de Borel sobre $\mathbb{R}$ de características muito diferentes daquelas tratadas no teorema.

(2) Solicitamos ao leitor efetuar algumas verificações.

Primeiro. Há uma teoria análoga para intervalos $[a, b)$ semi-abertos à direita e funções contínuas à esquerda.

Segundo. Se μ é uma medida de Borel finita em $\mathbb{R}$ então $\mu = \mu_F$, onde $F(x) = \mu(\,(-\infty, x]\,)$ é a distribuição acumulada de μ, que difere de F dada no Teorema 1.5 pela constante $\mu(\,(-\infty, 0]\,)$.

Terceiro **(Duas formas de completar a medida de Borel μ_F)**. A teoria de medidas exteriores (seção 1.4) fornece, para cada F crescente e contínua à direita, não só a medida de Borel μ_F mas também a medida completa $\overline{\mu_F}$ cujo domínio inclui a σ-álgebra dos borelianos $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ [vide Teorema 1.3 (Carathéodory) e Proposição 1.7, ambos na seção 1.4]. É fácil ver que a medida completa $\overline{\mu_F}$ assim construída coincide com o *trivial* completamento de μ_F [vide Teorema 1.2 (completamento) na seção 1.3 e vide também Exercício 22(a) (seção 1.4) ou Teorema 1.7 a seguir] e pode-se mostrar que seu domínio é estritamente maior que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

A **medida de Lebesgue-Stieltjes** associada à função F é o completamento da medida μ_F. Abusando da notação, denotaremos tal medida completa também por μ_F ou, bastante brevemente, μ.

Analisemos **A Regularidade e as Propriedades de Regularidade das Medidas de Lebesgue-Stieltjes**. Fixada uma medida de Lebesgue-Stieltjes completa μ sobre $\mathbb{R}$ associada à função F crescente e contínua à direita, denotamos

$$\boxed{\mathcal{M}_\mu \;:=\; \text{o domínio de } \mu.}$$

Dado um s-intervalo (a, ∞), podemos particioná-lo como $(a, \infty) = \dot\bigcup (a_i, a_{i+1}]$, com $a_1 = a$ e $(a_i)_{\mathbb{N}}$ estritamente crescente e divergindo a ∞. Vale a identidade

$$\mu\big((a, \infty)\big) = \sum_i \mu\big((a_i, a_{i+1}]\big).$$

Assim, o conjunto de valores $\left\{ \sum_i \mu\big((a_i, b_i]\big)\right\}$, computados sobre as sequências de s-intervalos limitados superiormente é igual ao conjunto de valores $\left\{ \sum_i \mu(I_i)\right\}$, computados sobre as sequências de s-intervalos arbitrários (I_i).

Consideremos agora E em $\mathcal{M}_\mu$. Pela fórmula Def.1.10.1 para medida exterior e pelo Teorema 1.4 (a) [*de pré-medida a medida*] segue a fórmula

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum \mu(I_i) : (I_i)_{\mathbb{N}} \text{ é uma sequência de s-intervalos cobrindo } E\right\}.$$

Pelo comentário acima podemos simplificar esta fórmula, trocando a sequência $(I_i)_{\mathbb{N}}$ por uma sequência $\big((a_i, b_i]\big)_{\mathbb{N}}$. Por fim, utilizando a fórmula Prop.1.8.1 obtemos

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\left\{\sum \mu\big((a_i, b_i]\big) :\ E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} (a_i, b_i]\right\} \\ &= \inf\left\{\sum [F(b_i) - F(a_i)] :\ E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} (a_i, b_i]\right\}. \end{aligned}$$

Na primeira fórmula para $\mu(E)$ pode-se trocar s-intervalos por intervalos abertos.

Lema 1.3 *Seja $E \in \mathcal{M}_\mu$. Então,*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_i \mu\big((a_i, b_i)\big) : E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} (a_i, b_i)\right\}.$$

Prova.

($\leq$) Como μ é monótona e sub-aditiva, para $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ temos

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (a_i, b_i)\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu\big((a_i, b_i)\big).$$

($\geq$) Seja $\mu(E)$ finito ou não, dado $\epsilon > 0$ existe uma sequência de intervalos fechados à direita $\{(a_i, b_i]\}_{\mathbb{N}}$ com

$$E \subset \bigcup_i (a_i, b_i] \ \text{ e } \ \sum_i \mu((a_i, b_i]) \leq \mu(E) + \epsilon.$$

Como a função F é contínua à direita, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $\delta_i > 0$ tal que

$$\mu((b_i, b_i + \delta_i]) = F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Logo, temos $E \subset \bigcup_i (a_i, b_i + \delta_i)$ e também

$$\sum_i \mu((a_i, b_i + \delta_i)) \leq \sum_i \mu((a_i, b_i]) + \sum_i \mu((b_i, b_i + \delta_i]) \leq \mu(E) + 2\epsilon \clubsuit$$

Teorema 1.6 (A Regularidade das Medidas de Lebesgue-Stieltjes). *Seja* $E \in \mathcal{M}_\mu$. *Então,*

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(O) : E \subset O \text{ e } O \text{ é aberto}\} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ e } K \text{ é compacto}\}. \end{aligned}$$

Prova.

Para a primeira identidade, pelas propriedades de μ e o Lema 1.3, segue

$$\begin{aligned} \mu(E) &\leq \inf\{\mu(O) : E \subset O \text{ e } O \text{ é aberto}\} \\ &= \inf\left\{\mu\big(\textstyle\bigcup_i (a_i, b_i)\big) :\, E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} (a_i, b_i)\right\} \\ &\leq \inf\left\{\textstyle\sum_i \mu[(a_i, b_i)] :\, E \subset \bigcup_{\mathbb{N}} (a_i, b_i)\right\} \\ &= \mu(E). \end{aligned}$$

Para a segunda identidade, observemos que a desigualdade "$\geq$" é óbvia. Na continuação, utilizaremos a relação conjuntista

$$A \setminus (A \setminus B) \subset B.$$

Em seguida, utilizaremos a relação topológica $E \subset \overline{E}$.

- ◇ Caso E limitado. Dado $\epsilon > 0$, pelo Lema 1.3 existe O aberto, $O \supset \overline{E} \setminus E$ [$\overline{E}$ é boreliano] tal que $\mu(O) \leq \mu(\overline{E} \setminus E) + \epsilon$. Podemos supor O limitado e obtemos $\mu[O \setminus (\overline{E} \setminus E)] \leq \epsilon$. Por outro lado, $K = \overline{E} \setminus O$ é compacto e $K \subset \overline{E} \setminus (\overline{E} \setminus E) \subset E$. É fácil ver que $E \setminus K = E \setminus (\overline{E} \setminus O) \subset O \setminus (\overline{E} \setminus E)$. Donde segue $\mu(E) - \mu(K) \leq \epsilon$ e portanto $\mu(E) - \epsilon \leq \mu(K) \leq \mu(E)$.
- ◇ E ilimitado. Então $E_n = E \cap [-n, n]$ é limitado e $E_n \nearrow E$. Pelo Teorema 1.1(c) segue $\mu(E_n) \nearrow \mu(E)$. Pelo caso anterior, existe um compacto $K_n \subset E_n$ com $|\mu(E_n) - \mu(K_n)| < 1/n$. Segue $\lim \mu(K_n) = \mu(E)$♣

Teorema 1.7 (Propriedades de Regularidade das Medidas de Lebesgue-Stieltjes). *Seja* $E \subset \mathbb{R}$. *São equivalentes as afirmações abaixo.*

(a) $E \in \mathcal{M}_\mu$.

(b) Para todo $\epsilon > 0$, *existe um aberto* $O \supset E$ *tal que* $\mu(O \setminus E) < \epsilon$.

(c) Para todo $\epsilon > 0$, *existe um fechado* $F \subset E$ *tal que* $\mu(E \setminus F) < \epsilon$.

(d) $E = G \setminus N_1$, *com* G *um* G_δ *e* N_1 *nulo [i.e.,* $\mu(N_1) = 0$*].*

(e) $E = H \bigcup N_2$ *com* H *um* F_σ *e* N_2 *nulo.*

Prova.

(a) $\Rightarrow$(b) O caso E limitado segue facilmente do Teorema 1.6. Se E é ilimitado, cada $E_n = [-n,n] \cap E$ é limitado e $E_n \nearrow E$. Logo, existe O_n aberto e contendo E_n tal que $\mu(O_n \setminus E_n) < \epsilon/2^n$. Desta forma, o aberto $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ contém E e satisfaz $O \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n \setminus E)$. Donde segue $\mu(O \setminus E) < \epsilon$.

(b) $\Rightarrow$(d) Seja O_n um aberto contendo E tal que $\mu(O_n \setminus E) < 1/n$. Então, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ é um G_δ com $E = G \setminus (G \setminus E)$ e $\mu(G \setminus E) < 1/n$, para todo n.

(a) $\Rightarrow$(c) Como $E^c \in \mathcal{M}_\mu$ e (a) implica (b), existe um aberto $O \supset E^c$ tal que $\mu(O \setminus E^c) < \epsilon$. Logo, O^c é fechado, $O^c \subset E$ e $\mu(E \setminus O^c) = \mu(O \setminus E^c) < \epsilon$.

(c) $\Rightarrow$(e) Seja F_n um fechado contido em E tal que $\mu(E \setminus F_n) < 1/n$. Então, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ é um F_σ com $E = H \bigcup (E \setminus H)$ e $\mu(E \setminus H) < 1/n$, para todo n.

(d), (e) $\Rightarrow$ (a). Trivial, pois $G, H \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_\mu$ e $N_1, N_2 \in \mathcal{M}_\mu$♣

Definição 1.11 *A* **diferença simétrica** *entre dois conjuntos A e B é o conjunto*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \dot{\bigcup} (B \setminus A).$$

Segue o primeiro dos Três Princípios de Littlewood [seção 2.4.1 - notas de aula].

Teorema 1.8 (Primeiro Princípio de Littlewood). *Suponhamos $\mu(E) < \infty$. Para todo $\epsilon > 0$ existe A, uma união finita de intervalos abertos, tal que*

$$\mu(E \triangle A) < \epsilon.$$

Prova.

Seja $\epsilon > 0$. Como $\mu(E) < \infty$, pelo Teorema 1.6 existem um aberto $O \supset E$ e um compacto $K \subset E$ tais que $\mu(E) - \epsilon \leq \mu(K) \leq \mu(E) \leq \mu(O) \leq \mu(E) + \epsilon$. Escrevamos então $O = \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} I_n$, com $I_{n's}$ intervalos abertos. Como $K \subset \dot{\bigcup} I_n$, segue que existe uma subcobertura finita $\dot{\bigcup}_{j=1}^{N} I_{n_j} = A \supset K$. Portanto,

$$E \triangle A = (E \setminus A) \dot{\bigcup} (A \setminus E) \subset (E \setminus K) \dot{\bigcup} (O \setminus E).$$

Donde concluímos $\mu(E \triangle A) \leq [\mu(E) - \mu(K)] + [\mu(O) - \mu(E)] \leq 2\epsilon$♣

Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ é a medida completa $\mu = \mu_F$ associada à função identidade

$$F(x) = x.$$

Indicamos a medida de Lebesgue por m. O domínio de m é a classe

$$\mathcal{L}$$

dos conjuntos **Lebesgue mensuráveis**. Pelo Teorema 1.2, temos

$$\mathcal{L} = \{B \cup N : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ e } N \subset D, \text{ com } D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ e } \mu(D) = 0\}.$$

Para a classe dos conjuntos Lebesgue mensuráveis de medida nula, temos (prove)

$$\{N \subset \mathbb{R} : m(N) = 0\} = \{N \subset \mathbb{R} : N \subset D, \text{ com } D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ e } m(D) = 0\}.$$

Obtemos então a bastante útil caracterização (cheque)

$$\boxed{\mathcal{L} = \{B \cup N : \ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ e } m(N) = 0\}.}$$

[Vide também Teorema 1.7(e).]

Se $I = [0,1]$, temos

$$m([0,1]) = \lim m\left(\left(\frac{-1}{n}, 1\right]\right) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Se I é um intervalo arbitrário então $m(I)$ é o comprimento de I (verifique).

A restrição de m a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é também dita **medida de Lebesgue**.

Dados $E \subset \mathbb{R}$ e $t, h \in \mathbb{R}$, definimos

a translação $E + t = \{x + t : x \in E\}$ e a homotetia $hE = \{hx : x \in E\}$.

Teorema 1.9 *Sejam $E \in \mathcal{L}$ e t, h arbitrários em $\mathbb{R}$. Valem as propriedades abaixo.*

$$E + t \in \mathcal{L} \quad e \quad m(E + t) = m(E),$$

$$hE \in \mathcal{L} \quad e \quad m(hE) = |h| m(E).$$

Prova (esboço). Solicitamos ao leitor as necessárias verificações.

Como a família dos intervalos abertos é invariante por translações e homotetias, a família $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ também o é (cheque).

Dado $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, sejam

$$m_t(E) = m(E + t) \quad \text{e} \quad m^h(E) = m(hE).$$

É fácil ver que m_t e m^h são medidas (cheque) que respectivamente coincidem com as medidas m e $|h|m$ sobre as uniões finitas de intervalos quaisquer (cheque), sendo que a família de tais uniões é uma álgebra (cheque).

Desta forma, pelo Teorema 1.4 (c) [*de pré-medida a medida*], as medidas m_t e m^h respectivamente coincidem com as medidas m e $|h|m$ sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (cheque).

Em particular, se $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $m(E) = 0$, obtemos

$$m(E + t) = m(hE) = 0.$$

Segue então que a classe dos conjuntos de Lebesgue de medida nula é invariante por translações e homotetias (cheque).

Analogamente, a classe $\mathcal{L}$ dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis é invariante por translações e homotetias (cheque).

Ainda mais, dado $B \cup N$ em $\mathcal{L}$, com $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $m(N) = 0$, temos

$$m(B \cup N) = m(B)$$

e então

$$m[(B \cup N) + t] = m[(B + t) \cup (N + t)] = m(B + t) = m(B) = m(B \cup N),$$

$$m[h(B \cup N)] = m(hB \cup hN) = m(hB) = |h|m(B) = |h|m(B \cup N)\clubsuit$$

Medida X Topologia. A relação entre a medida e conceitos topológicos de magnitude de um conjunto em $\mathbb{R}$ contém surpresas. Por exemplo, como $\mathbb{Q}$ é contável e um ponto tem medida nula, temos $m(Q) = 0$. Ainda, fixando a enumeração $\{r_n\}$ dos racionais em $[0,1]$, dado $\epsilon > 0$, o conjunto $U = \bigcup_n I_n$, com $I_n = (r_n - \epsilon 2^{-n}, r_n + \epsilon 2^{-n}) \cap (0,1)$, é aberto e denso em $[0,1]$ [pois inclui $\mathbb{Q} \cap (0,1)$] e $m(U) \leq \sum_n \epsilon 2^{-n} = \epsilon$. Seu complementar, $K = [0,1] \setminus U$ é fechado e **raro** (seu fecho tem interior vazio), e $m(K) \geq 1 - \epsilon$.

O conjunto (triádico) de Cantor $C \subset [0,1]$, que definimos a seguir, é compacto, **perfeito** (isto é, um conjunto P que é igual ao seu derivado P'), raro, **totalmente desconexo** (isto é, a componente conexa de cada ponto reduz-se ao próprio ponto), têm medida nula e é não enumerável. Passemos a construí-lo.

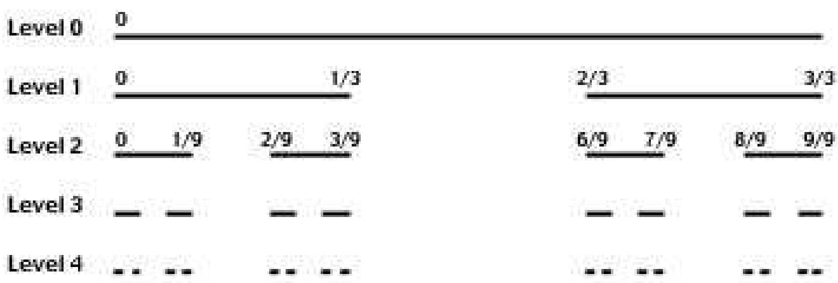

Figura 1.2: O conjunto triádico de Cantor.

Na etapa (level) 1 dividimos $[0,1]$ nos intervalos $I_1 = [0, 1/3]$, $I_2 = (1/3, 2/3)$ e $I_3 = [2/3, 1]$ e removemos o intervalo do meio. Na etapa 2, subdividimos I_1, e I_3, em três sub-intervalos e novamente removemos o intervalo aberto do meio. Assim procedendo, após infinitas etapas o subconjunto de $[0,1]$ não removido é o conjunto de Cantor. Se C_n é a união dos intervalos fechados não removidos na etapa n, temos $C_n \supset C_{n+1}$, $C = \bigcap C_n$ e C é compacto. Cada C_n é união disjunta de 2^n intervalos fechados de comprimento 3^{-n} e extremidades não removidas em nenhuma etapa e com tais extremidades pertencentes a C. Cada ponto de C pertence a algum intervalo em C_n, qualquer que seja n, e é limite de uma sequência de extremidades dos intervalos considerados e portanto, C é *perfeito* e *não enumerável* (Exercício L0). Ainda mais, temos $m(C) \leq m(C_n) = 2^n 3^{-n} = (2/3)^n$, para todo n, e consequentemente $\mathbf{m(C) = 0}$. Assim, o conjunto C tem interior vazio e é *raro* e, por último, como os únicos conexos em $\mathbb{R}$ são os intervalos, a componente conexa de um ponto em C é o próprio ponto. Isto é, C é *totalmente desconexo*.

A função de Cantor-Lebesgue (cujo gráfico é chamado **Devil's staircase**, ou **Escada do Coisa Ruim**), é obtida observando que o conjunto $[0,1] \smallsetminus C_n$ é reunião disjunta de $2^n - 1$ intervalos abertos I_j^n e então definindo funções f_n contínuas, cada qual satisfazendo $f_n = j2^{-n}$ em I_j^n, para cada $1 \leq j \leq 2^n - 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e tal que f_n é linear nos intervalos contidos em C_n e que não foram removidos na n-ésima etapa de construção do conjunto de Cantor. Cada função f_n é então monótona crescente e satisfaz

$$f_{n+1} = f_n \text{ em } I_j^n, \text{ desde que } 1 \leq j \leq 2^n - 1, \text{ e } |f_n - f_{n+1}| < \frac{1}{2^n}.$$

Portanto, a sequência de funções (f_n) converge uniformemente sobre $[0,1]$ a uma função $f : [0,1] \to [0,1]$, tal que f é monótona crescente, contínua e constante em cada intervalo removido na construção do conjunto de Cantor C.

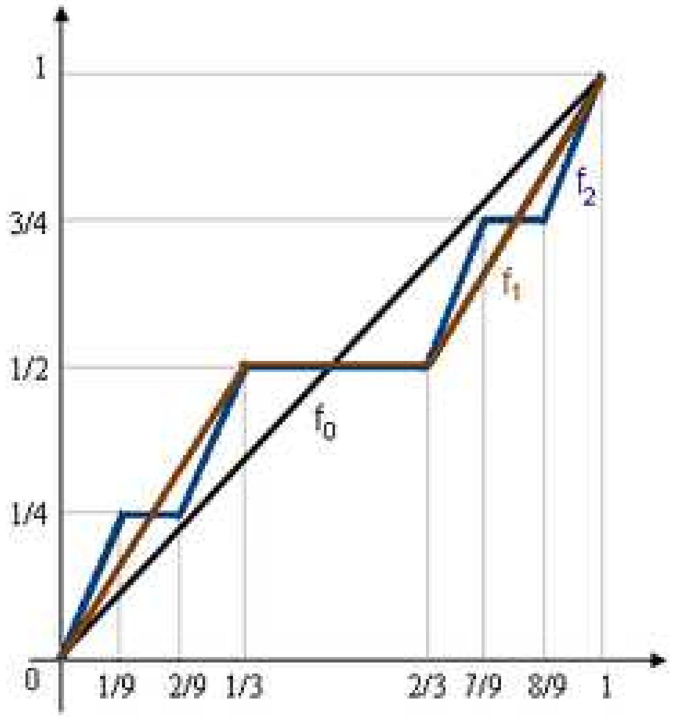

Figura 1.3: Função de Cantor-Lebesgue / Devil's staircase.

A construção do conjunto de Cantor inciando com o intervalo $[0,1]$ e sucessivamente emovendo terços médios abertos de intervalos admite uma generalização trivial. Introduzamos uma terminologia: dado em intervalo não degenerado $[a,b]$ e $0<\alpha<1$, o intervalo $\big((a+b)/2-\alpha(b-a)/2, (a+b)/2+\alpha(b-a)/2\big)$ é seu subintervalo aberto e central de comprimento $\alpha(b-a)$.

Se $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ é uma sequência qualquer em $(0,1)$, definimos indutivamente uma sequência decrescente $(K_j)_{j\geq 0}$ de fechados contidos em $[0,1]$ como segue:

- ◇ $K_0 = [0,1]$ e
- ◇ dado K_j uma reunião finita de intervalos fechados e disjuntos $I_j^1, \ldots, I_j^{N(j)}$, definimos K_{j+1} removendo de cada I_j^k seu subintervalo aberto e central de comprimento $\alpha_{j+1} \cdot (\text{comprimento de}\, I_j^k)$.

O conjunto generalizado de Cantor é $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$. Temos,

- K é compacto, raro, totalmente desconexo, sem pontos isolados e perfeito.
- $\operatorname{card}(K) = \mathfrak{c}$.

É fácil ver que $m(K_j) = (1-\alpha_j)m(K_{j-1}) = (1-\alpha_j)(1-\alpha_{j-1})\cdots(1-\alpha_1)$ e

$$m(K) = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}(1-\alpha_j) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-\alpha_j).$$

Se todos os $\alpha_{j's}$ são iguais a $\alpha \in (0,1)$ (e.g., $\alpha = 1/3$ para o conjunto de Cantor usual), obtemos $m(K) = 0$ (cheque). Porém, se $\alpha_j \to 0$ suficientemente rapidamente para $j \to \infty$, então obtemos $m(K) > 0$ e, ainda mais, para cada $\beta \in (0,1)$ podemos escolher (α_j) tal que $m(K) = \beta$ (vide Exercício 32 1.5). Isto fornece uma outra maneira de contruirmos conjuntos raros de medida maior que zero.

Nem todo conjunto Lebesgue mensurável é Borel mensurável. É possível apresentar tais exemplos utilizando a função de Cantor (vide Exercício 9 2.1). Alternativamente, observando que todo subconjunto do conjunto de Cantor é Lebesgue mensurável deduzimos que $\operatorname{card}(\mathcal{L}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}) > \mathfrak{c}$, ao passo que $\operatorname{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{c}$ (vide Folland, Proposição 1.23, p. 40).