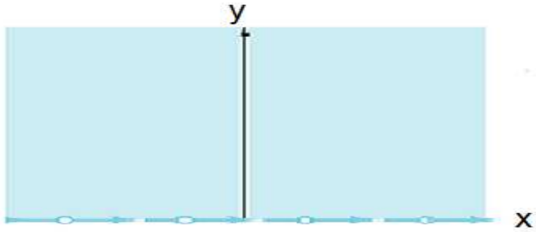
MAT5812 - EDP ELIPTICA- primeiro semestre de 2017
Lista 5 de Exercícios
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Definições e notações. O símbolo ρ indica a usual função curva do sino.
Sejam $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ a função curva do sino, o semiplano superior aberto

$$\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

e o hiperplano $H = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$.



1. Seja $e_2 = (0, 1)$ o segundo vetor da base canônica ordenada do espaço vetorial (plano cartesiano) $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2), \text{com } x_1 \text{ e } x_2 \text{ reais}\}$. Ao invés da tradicional função ρ_ϵ, indiquemos ρ por $\varrho = \varrho(x)$ e definamos a variante

$$\varrho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^2}\varrho\left(\frac{x - 2\epsilon e_2}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon^2}\varrho\left(\frac{x_1}{\epsilon}, \frac{x_2 - 2\epsilon}{\epsilon}\right).$$

Abusando da notação, seja $g_\epsilon = \varrho_\epsilon * g$, com $g \in L^p(\mathbb{R}^2)$ e $p > 1$. Prove o que segue.

(a) $\displaystyle\int \varrho_\epsilon(x)\, dx = 1$, para todo $\epsilon > 0$.

(b) $\|g_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$.

(c) $g_\epsilon \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^2)} g$.

[Dica. Vide a prova de *propriedades da aproximação da identidade* (seção 2.3).]

2. Seja $f \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^2_+}\right)$, com $f = 0$ em $H = \partial\mathbb{R}^2_+$. Mantenhamos as notações em [4.]. Verifique as afirmações abaixo, definindo $f = 0$ no semiplano inferior e $f_\epsilon = \varrho_\epsilon * f$.

(a) $\begin{cases} f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \\ \text{e} \\ \text{supp}(f_\epsilon) \subset \{x : x_2 \geq \epsilon\}. \end{cases}$

(b) Mostre que $f_\epsilon \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^2_+)$.

(c) Conclua que $f \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^2_+)$.

Dica. Considere a faixa horizontal $\{x = (x_1, x_2) : 0 < x_2 < \epsilon\}$. Analise

$$f_\epsilon(x) = (\varrho_\epsilon * f)(x) = \int \varrho_\epsilon(x - y) f(y)\, dy$$
$$= \frac{1}{\epsilon^2}\int_{D(x - 2\epsilon e_2\,;\,\epsilon)} \rho\left(\frac{x - y - 2\epsilon e_2}{\epsilon}\right) f(y) dy.$$

3. Sejam K um compacto em $\mathbb{R}^n$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\psi = 0$ numa vizinhança de K. Verifique as propriedades abaixo.

   (a) Se $u \in W^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ então $\psi u \in W^1(\mathbb{R}^n)$.

   (b) Se $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n \setminus K)$ então $\psi u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

   (c) Se $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n \setminus K)$ então $\psi u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

4. Seja $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Verifique
$$u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

5. **(Rellich-Kondrachov)** Seja Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^2$. Mostre que inclusão
$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ é compacta.}$$

6. **Corolário ao Lema de Lax-Milgram.** Seja H um espaço de Hilbert. Consideremos uma função bilinear $B : H \times H \to \mathbb{R}$ como no lema de Lax-Milgram (isto é, B é contínua e coerciva). Mostre que a aplicação
$$\begin{aligned} \mathcal{B} : H &\longrightarrow H^* \\ y &\longmapsto B(\cdot, y) \end{aligned}$$
é linear, contínua, sobrejetora e injetora. Ainda, $\mathcal{B}$ é bi-contínua.

   [Se preferir, escreva $\mathcal{B}(y) = B_y$, onde $B_y(x) = B(x, y)$.]