**MAT5812 - EDP ELIPTICA- primeiro semestre de 2017**
**Lista 4 de Exercícios**
*Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira*

**Definições e notações.** O símbolo $\rho$ indica a usual função curva do sino.

As definições de $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$, dadas para abertos limitados, se estendem naturalmente a abertos não limitados. Cheque.

Os espaços de Hilbert $W^{k,2}(\Omega)$ e $W_0^{k,2}(\Omega)$ são também indicados $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$, respectivamente. A letra $H$ homenageia Hilbert.

Também escrevemos $\mathcal{D}(\Omega)$ para $C_c^\infty(\Omega)$ (também um espaço de **funções testes**).

Analogamente à definição de $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, definimos

$$W^k_{\text{loc}}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} :\ u \in W^k(O) \text{ para todo } O \subset\subset \Omega\}.$$

$$W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} :\ u \in W^{k,p}(O) \text{ para todo } O \subset\subset \Omega\}.$$

Dadas uma sequência $(u_j)$ e uma função $u$, ambas em $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, escrevemos

$$u_j \xrightarrow{W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)} u \ \text{ se } u_j \xrightarrow{W^{k,p}(O)} u, \text{ para todo } O \subset\subset \Omega.$$

Dado $k \geq 1$ e dado $p \in [1, \infty)$, é trivial (cheque) ver que $L^p_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e então

$$\boxed{W^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) \subset W^k(\Omega), \text{ no sentido de conjuntos.}}$$

1. **Densidade. Aproximação local por funções suaves (i.e., de classe $C^\infty$).** Seja $p \in [1, \infty)$. Consideremos $u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Sejam

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\} \ \text{ e } \ u_\epsilon = \rho_\epsilon * u.$$

Mostre que

$$u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon) \quad \text{e} \quad u_\epsilon \xrightarrow{W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)} u.$$

2. Sejam $\Omega$ um aberto (limitado ou não) e $p \in [1, \infty)$. Mostre as afirmações abaixo.

   (a) Dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com o suporte de $u$ compacto, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

   (b) Dada $u \in W^{k,p}(\Omega)$, com o suporte de $u$ compacto, então $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$.

   (c) Mostre que $W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$ continuamente.

   (d) Mostre que $\partial_j : W^{k+1,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\Omega)$ é contínua, para cada $j = 1, \ldots, n$.

   **Sugestão.** Vide Lista 3 - Exercício 8.

3. Sejam $\Omega$ um aberto (limitado ou não) e um expoente $p \in [1, \infty)$. Consideremos o produto $fu$, onde $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $f \in C^k(\Omega)$. Mostre as afirmações abaixo.

   (a) $fu \in W^{k,p}(\Omega)$ se $\partial^\alpha f$ é limitada para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$.

   (b) $fu \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se $\mathrm{supp}(f)$ é compacto em $\Omega$.

   (c) $fu \in W^{k,p}(\Omega)$ se $\Omega$ é limitado e $f \in C^k(\overline{\Omega})$.

4. Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Para todo $j = 1, \ldots, n$ segue

$$f * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \partial_j(f * u) = f * \partial_j u.$$

   **Dicas.**

   (a) Use a *desigualdade de Young para o produto de convolução* - seção 2.2 - para checar que as convoluções $f * u$ e $f * \partial_j u$ estão no espaço apropriado.

   (b) Suponha $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Use o *Exercício 1* - desta lista - e argumente que

$$\partial_j(f * u) = f * \partial_j u.$$

   (c) Use o *teorema de aproximação* - seção 2.5 - regularização e aproximação em $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ - para obter uma sequência $(f_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$f_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^n)} f.$$

   (d) Use a *desigualdade de Young para o produto de convolução* e mostre

$$\begin{cases} f_n * u \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)} f * u \\ \\ f_n * (\partial_j u) \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)} f * \partial_j u \end{cases}$$

   e então dê a argumentação final.

   - Aproveite que está fácil e mostre

$$f_n * u \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} f * u.$$

   - Para uma outra demonstração deste exercício, vide Cavalcanti, M. M. e Cavalcanti, V. N. D., *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*, Ed. Univ. Est. de Maringá, 2009, pp. 94–97.

5. Mostre que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, onde $p \in [1,\infty)$.

   **Dicas.**

   (a) Dada $\phi \in C_c^\infty\big(B(0,2),[0,1]\big)$ tal que $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança de $D(0,1)$, considere
   $$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x}{j}\right), \text{ para } j = 1,2,\ldots.$$
   Dada $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, mostre que $\phi_j u \to u$ em $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

   (b) Suponha $\mathrm{supp}(u)$ compacto. Mostre
   $$\begin{cases} u * \rho_\epsilon \ \text{ e } \ (\partial^\alpha u) * \rho_\epsilon \text{ pertencem a } C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \partial^\alpha(u * \rho_\epsilon) = (\partial^\alpha u) * \rho_\epsilon \\ u * \rho_\epsilon \xrightarrow{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} u. \end{cases}$$

6. **Localização.** Sejam $\Omega$ e $O$ abertos (arbitrários e não necessariamente disjuntos) e uma função $u : \Omega \cup O \to \mathbb{R}$. Mostre que
   $$u \in W^1(\Omega \cup O) \iff u \in W^1(\Omega) \cap W^1(O).$$

   **Dicas.**

   (1) Cheque a trivialidade da "ida" (esta é a parte "somente se").

   (2) Para a "volta" (esta é a parte "se" da demonstração), note que temos duas interpretações para $\partial_j u$ na intersecção $\Omega \cap O$. Uma devido a $u \in W^1(\Omega)$ e outra devido a $u \in W^1(O)$. Mostre que tais perspectivas coincidem e que
   $$\text{está bem definida a função } \partial_j u : \Omega \cup O \to \mathbb{R}.$$
   Mostre que $\partial_j u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \cup O)$. Vide Lista 2 - Exercício 9.

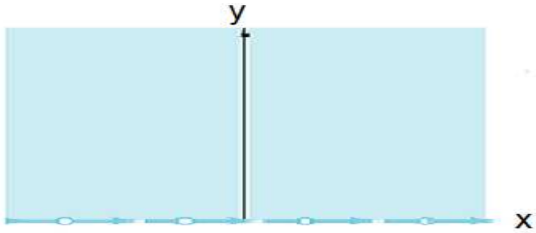
   3) Fixe uma função-teste $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ e o compacto $K = \mathrm{supp}(\varphi)$. Vide Lista 2 - Exercício 4 e considere
   $$\begin{cases} \chi_1 \in C_c^\infty\big(\Omega,[0,1]\big) \ \text{ e } \chi_2 \in C_c^\infty\big(O,[0,1]\big), \\ \text{com } \ \chi_1 + \chi_2 \equiv 1 \text{ numa vizinhança de } K. \end{cases}$$

7. Mostre resultado análogo ao Exercício 6 acima, para $W^{1,1}(\Omega)$ e $W^{1,1}(O)$.

**Notações.** Sejam $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ a função curva do sino, o semiplano superior aberto

$$\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

e o hiperplano $H = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$.




6. Seja $e_2 = (0, 1)$ o segundo vetor da base canônica ordenada do espaço vetorial (plano cartesiano) $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2), \text{com } x_1 \text{ e } x_2 \text{ reais}\}$. Ao invés da tradicional função $\rho_\epsilon$, indiquemos $\rho$ por $\varrho = \varrho(x)$ e definamos a variante

$$\varrho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^2}\varrho\left(\frac{x - 2\epsilon e_2}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon^2}\varrho\left(\frac{x_1}{\epsilon}, \frac{x_2 - 2\epsilon}{\epsilon}\right).$$

Abusando da notação, seja $g_\epsilon = \varrho_\epsilon * g$, com $g \in L^p(\mathbb{R}^2)$ e $p > 1$. Prove o que segue.

$(a)$ $\displaystyle\int \varrho_\epsilon(x)\,dx = 1$, para todo $\epsilon > 0$.

$(b)$ $\|g_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$.

$(c)$ $g_\epsilon \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^2)} g$.

[Dica. Vide a prova de *propriedades da aproximação da identidade* (seção 2.3).]

7. Seja $f \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^2_+}\right)$, com $f = 0$ em $H = \partial\mathbb{R}^2_+$. Mantenhamos as notações em [4.]. Verifique as afirmações abaixo, definindo $f = 0$ no semiplano inferior e $f_\epsilon = \varrho_\epsilon * f$.

$(a)$ $\begin{cases} f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \\ \text{e} \\ \text{supp}(f_\epsilon) \subset \{x : x_2 \geq \epsilon\}. \end{cases}$

$(b)$ Mostre que $f_\epsilon \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^2_+)$.

$(c)$ Conclua que $f \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^2_+)$.

**Dica.** Considere a faixa horizontal $\{x = (x_1, x_2) : 0 < x_2 < \epsilon\}$. Analise

$$f_\epsilon(x) = (\varrho_\epsilon * f)(x) = \int \varrho_\epsilon(x - y) f(y)\,dy$$
$$= \frac{1}{\epsilon^2}\int_{D(x - 2\epsilon e_2\,;\,\epsilon)} \rho\left(\frac{x - y - 2\epsilon e_2}{\epsilon}\right) f(y)dy.$$