MAT5812 - EDP ELIPTICA- primeiro semestre de 2017
Lista 3 de Exercícios
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Notação. O símbolo ρ indica a usual função curva do sino.

1. **O Lema "Derivada fraca, regularização e aproximação" revisitado e estendido**.

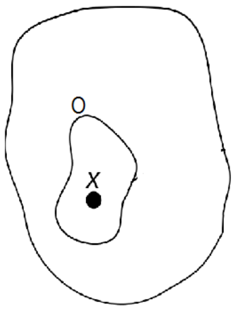
Seja $p \in [1, \infty)$. Consideremos

$$u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \text{ e } \alpha \text{ tais que } \partial^\alpha u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \quad [\partial^\alpha u \text{ é uma derivada fraca}].$$

Seja $\epsilon > 0$ (pequeno), uma função $\eta \in C^\infty_c\big(D(0,\epsilon)\big)$ e um aberto O tal que

$$O + D(0,\epsilon) \subset \Omega.$$

[E.g., $O = \Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) < \epsilon$. O conjunto $O + D(0,\epsilon)$ é aberto (cheque).]



Verifique as afirmações abaixo.

(a) A função

$$(u * \eta)(x) = \int_\Omega u(y)\eta(x-y)\,dy, \text{ onde } x \in O,$$

está bem definida. Tem-se

$$(u*\eta)(x) = \int_{D(x,\epsilon)} u(y)\eta(x-y)\,dy = \int_{D(0,\epsilon)} u(x-y)\eta(y)\,dy, \text{ se } x \in O.$$

(b) Seja M uma constante majorando $|\partial_j \eta|$. Fixado um ponto $x_0 \in O$, temos $D(x_0,\epsilon) \subset \Omega$ e existe r tal que $0 < r < d(x_0, \partial\Omega) - \epsilon$. Segue

$$\left| u(y) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(x-y) \right| \le M|u(y)|\chi_{D(x_0, r+\epsilon)}(y), \text{ para todos } x \in D(x_0, r) \text{ e } y \in \Omega.$$

Segue então $u * \eta \in C^\infty(O)$ [use indução + derivação sob o signo da integral].

(c) Por (b) segue $(\partial^\alpha u) * \eta \in C^\infty(O)$. Considere $\varphi \in C_c^1(O)$. Mostre que

$$\int\limits_O \partial^\alpha(u*\eta)(x)\varphi(x)dx = \int\limits_O [(\partial^\alpha u)*\eta](x)\varphi(x)\,dx.$$

Dica. Escreva a integral à esquerda como uma integral iterada e utilize o *teorema de Fubini* duas vezes (cheque hipóteses).

(d) Conclua a propriedade derivada fraca e regularização

$$\partial^\alpha(u*\eta) = (\partial^\alpha u)*\eta \quad \text{em } O.$$

(b1) Retorne a (b). Cheque que de (b) segue a identidade

$$\partial^\alpha(u*\eta)(x) = \int_\Omega u(y)(\partial^\alpha\eta)(x-y)\,dy \text{ para todo } x \in O.$$

Deduza desta identidade a fómula

$$\partial^\alpha(u*\eta) = (\partial^\alpha u)*\eta, \text{ no aberto } O.$$

(e) Sejam K compacto em O e $D_\epsilon = D(0,\epsilon)$. Admita

$$\eta \geq 0 \text{ e } \int \eta\,dx = 1.$$

Mostre

$$\|u*\eta - u\|_{L^p(K)} \leq \sup_{y \in D_\epsilon} \|u(\cdot - y) - u(\cdot)\|_{L^p(K)}.$$

Dica. Utilize a *desigualdade integral de Minkowski* na identidade

$$\|u*\eta - u\|_{L^p(K)} = \left[\int\limits_K \left|\int\limits_{D_\epsilon} [u(x-y) - u(x)]\eta(y)dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

(f) Para cada $\epsilon > 0$, consideremos uma $\eta = \eta_\epsilon \in C_c^\infty\big(D(0,\epsilon)\big)$ como no item (e). [Não é necessária a relação entre η_ϵ e η_1, como a existente entre ρ e ρ_ϵ.] Mostre a aproximação

$$u*\eta_\epsilon \xrightarrow{L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)} u \text{ se } \epsilon \to 0 \quad [\text{e } (\partial^\alpha u)*\eta_\epsilon \xrightarrow{L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)} \partial^\alpha u].$$

Dica. Considere U tal que $K \subset U \subset\subset O$. Seja $v \equiv u$ em U e $v \equiv 0$ fora de U. Para ϵ pequeno e $|y| \leq \epsilon$, compare

$$\|u(\cdot - y) - u(\cdot)\|_{L^p(K)} \text{ e } \|v(\cdot - y) - v(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Utilize o item (e) e o teorema *continuidade da translação em* L^p (seção 1.3).

2. **Cuidado com extensões.** Dada $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, estenda f com $\widetilde{f} \equiv 0$ em $(-1,0]$

   (a) Dada $f \in L^1\big((0,1)\big)$, mostre que $\widetilde{f} \in L^1((-1,1))$.

   (b) Dê um exemplo de uma função $f \in L^1_{\text{loc}}\big((0,1)\big)$ tal que $\widetilde{f} \notin L^1_{\text{loc}}\big((-1,1)\big)$.

   (b) Dê um exemplo de uma função $f \in L^1((0,1))$ tal que $\widetilde{f} \notin W^1((-1,1))$.

3. **Extensão (trivial).** Seja $u \in W^1(\Omega)$ com $K = \operatorname{supp}(u)$ compacto em Ω. Seja

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u \text{ em } \Omega, \\ 0 \text{ fora de } \Omega. \end{cases}$$

Definimos $\widetilde{\partial_j u}$ de forma análoga. Verifique.

$$\widetilde{u} \in W^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \partial_j(\widetilde{u}) = \widetilde{\partial_j u}.$$

Sugestão. Considere $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi \equiv 1$ em uma vizinhança de K (cheque a existência). Verifique que no aberto Ω valem as identidades

$$u\chi = u, \quad \chi(\partial_j u) = \partial_j u \quad \text{e} \quad u\partial_j \chi \equiv 0.$$

4. **Extensão (trivial).** Seja $u \in L^p(\Omega)$. Verifique o que segue.

   (a) $\widetilde{u} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

   (b) Suponha que u tem suporte compacto e que a derivada fraca $v = \partial^\alpha u$ existe [i.e., $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$]. Mostre que existe a derivada fraca $\partial^\alpha(\widetilde{u})$ e

$$\partial^\alpha(\widetilde{u}) = \widetilde{\partial^\alpha u}.$$

5. **Regra de Leibniz.** Dados $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, pomos

$$\beta \le \alpha \text{ se } \beta_j \le \alpha_j \text{ para todo} \jmath, \qquad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n! \quad \text{e} \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Seja $u \in W^k(\Omega)$ (a função u tem derivadas fracas de ordem menor ou igual a k). Seja $f \in C^k(\Omega)$. Mostre que $fu \in W^k(\Omega)$ e a regra

$$\partial^\alpha(fu) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \; \partial^{\alpha-\beta} u.$$

Anti-dica. Tal regra segue da *regra do produto*, que segue da *caracterização das derivadas fracas* [cap. 2 - seção 2.3]. Isto é muita munição para pouca batalha.

Dica (trivial). Dada $\varphi \in C_c^k(\Omega)$, mostre

$$\int (fu)\partial_j \varphi \, dx = -\int [(\partial_j u) f + u(\partial_j f)]\varphi \, dx.$$

A seguir, utilize indução e as fórmulas binomiais para multi-índices.

6. **Funções e derivadas fracas de suporte compacto.** Este caso é bem mais fácil que o no Exercício 1 e obtemos regularização e aproximação em todo o Ω.

Seja Ω um aberto arbitrário (limitado ou não).

Seja $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ e com $K = \operatorname{supp}(u)$ compacto em Ω.

Verifique as afirmações abaixo.

(a) $u_\epsilon = u * \rho_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$.

(b) $\partial^\alpha(u * \rho_\epsilon) = \rho_\epsilon * \partial^\alpha u$ em Ω se ϵ é pequeno o suficiente.

(c) $\begin{cases} u * \rho_\epsilon \xrightarrow{L^p(\Omega)} u \\ \\ \partial^\alpha(u * \rho_\epsilon) \xrightarrow{L^p(\Omega)} \partial^\alpha u. \end{cases}$

Dicas. Seguem duas estratégias: uma é direta e a outra é via extensão.

(a) Pela definição de *regularização* e como $K = \operatorname{supp}(u)$ é compacto, temos

$$u_\epsilon(x) = \int_\Omega u(y)\rho_\epsilon(x-y)dy = \int_K u(y)\rho_\epsilon(x-y)dy.$$

(a) Estenda u. Então, $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $(\widetilde{u})_\epsilon = u_\epsilon$. Mostre a compacidade de

$$\operatorname{supp}(\rho_\epsilon * u) \subset \operatorname{supp}(\rho_\epsilon) + K = D(0,\epsilon) + K.$$

Use *derivação sob o sinal da integral*. Vide *Exercício 1 (b)*.

(b) Vide *Exercício 1 (c)* nesta lista. Utilize que ρ é uma função par.

(c) Com a *desigualdade de Young para convolução*, seção 2.2, mostre que $\rho_\epsilon * u$ e $\rho_\epsilon * \partial^\alpha u$ estão em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e, restringindo a Ω, que estão em $L^p(\Omega)$. Utilize *propriedades da aproximação da identidade* - seção 2.3 - e também o item (b) do presente exercício para mostrar convergências em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Restrinja então ao aberto Ω para obter as convergências desejadas.

7. Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e de suporte compacto. Mostre que (para $\epsilon > 0$ pequeno)

$$u * \rho_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad u * \rho_\epsilon \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u.$$

8. Sejam Ω um aberto (limitado) e $p \in [1,\infty)$. Mostre as afirmações abaixo.

(a) Dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com o suporte de u compacto, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(b) Dada $u \in W^{k,p}(\Omega)$, com o suporte de u compacto, então $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$.

(c) Mostre que $W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$ continuamente.

(d) Mostre que $\partial_j : W^{k+1,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\Omega)$ é contínua, para cada $j = 1,\ldots,n$.

Sugestão para (a) e (b). Utilize o *Exercício 6*.