MAT5812 - EDP ELIPTICA- primeiro semestre de 2017
Lista 2 de Exercícios
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Notações. Os problemas abaixo são todos em $\mathbb{R}^n$. Se $U \subset O$, ambos abertos, dizemos que U é relativamente compacto em O se $\overline{U}$ é compacto contido O. Escrevemos $U \subset\subset O$.

1. Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Suponhamos $f \leq M$ para alguma constante M (respectivamente, $m \leq f$ para alguma constante m). Então,
$$\rho_\epsilon * f \leq M \quad (m \leq \rho_\epsilon * f).$$

2. **Lema de Urysohn (C^∞).** Sejam $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, com K compacto e Ω aberto. Então, existe $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com
$$f \equiv 1 \text{ numa vizinhança de } K, \quad 0 \leq f \leq 1 \;\text{ e }\; \operatorname{supp}(f) \subset \Omega.$$

3. Sejam K um compacto e $O_1, \ldots, O_N$ abertos (não vazios). Suponhamos
$$K \subset O_1 \cup \cdots \cup O_N.$$
Existem abertos relativamente compactos $U_1, \ldots, U_N$ (não vazios) satisfazendo
$$U_j \subset\subset O_j \text{ para cada } j \;\text{ e }\; K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_N.$$
Dica. Dado $x \in K$, existem $r = r(x) > 0$ e $j = j(x)$ tais que $D(x, r) \subset O_j$. No caso em que O_j não intersecta K então qualquer (não vazio) $U_j \subset\subset O_j$ nos serve.

4. **Uma partição da unidade $\phi_1, \ldots, \phi_N$ para o compacto K e subordinada à cobertura aberta $O_1, \ldots, O_N$.** Sejam K um compacto e $O_1, \ldots, O_N$ abertos limitados (todos em $\mathbb{R}^n$), com $K \subset O_1 \cup \cdots \cup O_N$. Mostre que existem funções
$$\phi_j \in C_c^\infty\big(O_j, [0,1]\big) \text{ para } j = 1, \ldots, n, \quad \text{e com } \sum_{j=1}^N \phi_j \equiv 1 \text{ numa vizinhança de } K.$$
Esboço (complete e cheque argumentos). Com as notações nos exercícios 1 e 2, seja $f_j \in C_c^\infty(O_j)$ com $0 \leq f_j \leq 1$ e $f_j \equiv 1$ em $\overline{U_j}$. Segue $f_1 + \cdots + f_N \geq 1$ em $\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$. Então
$$\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N} \subset O_{N+1} = \big\{x : (f_1 + \cdots + f_N)(x) > 0\big\} \text{ (um aberto).}$$
Existe uma função $g \in C_c^\infty(O_{N+1})$ satisfazendo $0 \leq g \leq 1$ e $g \equiv 1$ em $\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$. Mostre que
$$f_{N+1} = 1 - g \in C^\infty, \text{ com } 0 \leq f_{N+1} \leq 1 \text{ e } f_{N+1} \equiv 1 \text{ se } f_1 + \cdots + f_N = 0.$$
Mostre $F = f_1 + \cdots + f_N + f_{N+1} > 0$ em todo ponto. Seja
$$\phi_j = \frac{f_j}{F}, \text{ para } j = 1, \ldots, N, N+1.$$
Verifique (e complete a prova)
$$\phi_1 + \cdots + \phi_N + \phi_{N+1} \equiv 1 \text{(i.e.,em todo ponto)} \quad \text{e} \quad \phi_1 + \cdots + \phi_N = 1 \text{ em } U_1 \cup \cdots \cup U_N.$$

Comentário. Compare esta prova (vide Folland [8, p. 134]) com a prova em Folland [7, p. 13]. Qual tua opinião sobre esta última?

Tarefas. Vide as provas em Rudin [13, p. 40] e Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer, 2nd ed., pp. 27–28. Destas quatro, qual tua preferida? Por qualquer motivo?

5. **Integração por partes.** Sejam $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n$. Prove as identidades

$$(a) \qquad \int_\Omega (\partial_j f)(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)(\partial_j \varphi)(x)\,dx.$$

$$(b) \qquad \int_\Omega (\partial^\alpha f)(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)(\partial^\alpha \varphi)(x)\,dx.$$

6. **A propriedade do segmento.** Dizemos que um aberto limitado Ω tem a propriedade do segmento se existe uma cobertura aberta $V_0, V_1, \dots, V_N$ de $\overline{\Omega}$ com as seguintes propriedades.

   (a) $V_0 \subset \Omega$.

   (b) $V_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ para cada $j \geq 1$.

   (c) Para cada $j \geq 1$, existe um vetor $v^j \in \mathbb{R}^n$ tal que

   $$x + \delta v^j \notin \overline{\Omega} \quad \text{para todo ponto} \quad x \in V_j \smallsetminus \Omega \text{ e todo } 0 < \delta \leq 1.$$

   Mostre que

   $$\partial\Omega \in C^1 \implies \Omega \text{ tem a propriedade do segmento.}$$

   Dica. Escolha para $V_1, \dots, V_N$ pequenas bolas centradas em pontos apropriados $\omega^j \in \partial\Omega$ e para vetor v^j, onde $j = 1, \dots, n$, um pequeno múltiplo positivo do vetor normal exterior $\nu(\omega^j)$.

7. Mostre que se Ω tem a propriedade do segmento, então vale o que segue.

   (a) A fronteira $\partial\Omega$ tem dimensão $n-1$.

   (b) O aberto Ω não pode estar dos dois lados em qualquer parte da fronteira.

   (c) $m(\partial\Omega) = 0$.

8. Mostre que

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ que satisfazem a condição} \\ \text{para todo } p \in \Omega \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(p,r) \subset \Omega \text{ e } f \in L^p\big(B(p,r)\big). \end{array} \right\}.$$

   Chamamos $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ de espaço das funções localmente p-integráveis em Ω.

9. **Localização.** Sejam Ω e O abertos (arbitrários e não necessariamente disjuntos) e uma função $f : \Omega \cup O \to \mathbb{R}$. Mostre que

$$f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega \cup O) \iff f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^p_{\text{loc}}(O).$$