MAT5812 - EDP ELIPTICA- primeiro semestre de 2017
Lista 2 - extra - de Exercícios
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

PROBLEMA DE DIRICHLET NO SEMI-PLANO $\begin{cases} \Delta u = 0 & \textbf{em } H^+ \\ u = f & \textbf{em } \partial H^+. \end{cases}$

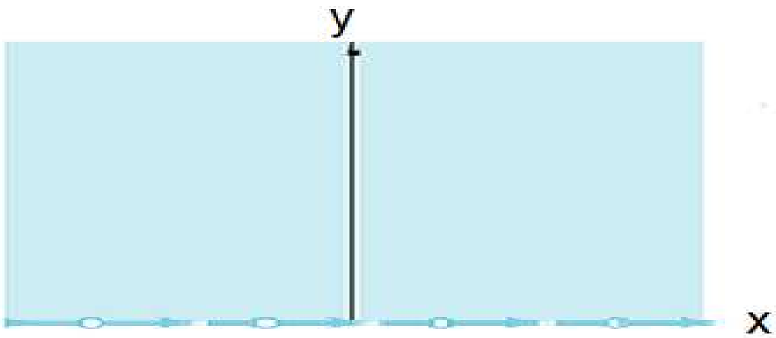

Figura 1: O semi-plano superior e aberto $H^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

1. **O núcleo de Poisson.** Seja

$$K(x) = P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \text{ onde } x \in (-\infty, +\infty).$$

Verifique as afirmações abaixo.

(a) $P \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, com P estritamente positiva e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1.$$

(b) $P(x) = o\big(|x|^{-1}\big)$ se $|x| \to +\infty$.

(c) $P(x) = O\big(|x|^{-2}\big)$ se $|x| \to +\infty$.

Definamos o **núcleo de Poisson**

$$P_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}, \text{ onde } \epsilon > 0.$$

Consideremos a convolução (dita **integral de Poisson de** f, com f dada)

$$f_\epsilon(x) = (f * P_\epsilon)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)P_\epsilon(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-t)^2}dt.$$

Consideremos $\epsilon = y$ e indiquemos

$$f(x,y) = f_y(x).$$

Note que f está definida no semi-plano superior $H^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y > 0\}$.

(d) Mostre que

$$P_y(x) = P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2}, \quad \text{onde } (x,y) \in H^+,$$

satisfaz a **equação de Laplace**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) P_y(x) = \Delta P_y(x) = 0.$$

[Caso queira "fugir de contas", note que a função

$$\frac{y}{x^2+y^2}$$

é a parte imaginária da função analítica (holomorfa) complexa

$$-\frac{1}{z}, \text{ onde } z = x+iy.]$$

(e) Considere $f \in L^p(\mathbb{R})$, onde $1 \leq p \leq \infty$. Mostre que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) P_y(x-t)\, dt.$$

Donde segue

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y) = 0 \text{ para todo } y > 0,$$

e portanto $f = f(x,y)$ é harmônica no semi-plano superior aberto H^+.

(f) Suponha $f \in L^1(\mathbb{R})$. Mostre que

$$f(x,y) \xrightarrow{y \to 0^+} f(x) \quad \text{se } f \text{ é contínua no ponto } x.$$

(g) Desta forma, se a função em uma variável real $f = f(t)$ é integrável e contínua em toda a reta, a função em duas variáveis reais $f = f(x,y)$ resolve o problema de Dirichlet no semi-plano. Isto é, temos

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ em } H^+ \\ \\ f(x,y) \xrightarrow{y \to 0} f(x). \end{cases}$$

Funções lombadas, bacias, degraus, rampas e platôs (ou plataformas).

2. **(Lombada lateral ou rampa, suave).** Mostre que

$$\Lambda(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0\,, \end{cases} \qquad \text{é de classe } C^\infty \text{ e satisfaz } 0 \le \Lambda \le 1.$$

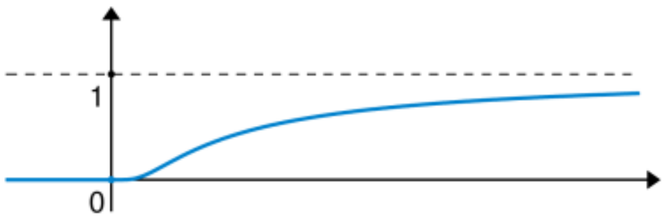

Figura 2: Gráfico de $x \mapsto \Lambda(x)$.

3. Sejam $0 < a < b$. Evitando produto de convolução, mostre que existe uma função **platô suave** $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ tal que

$$\Gamma \equiv 1 \text{ em } [-a, a] \quad \text{e } \Gamma \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R} \smallsetminus [-b, b].$$

Dica. Vide Capítulo 2, seção 2.1 - Introdução.

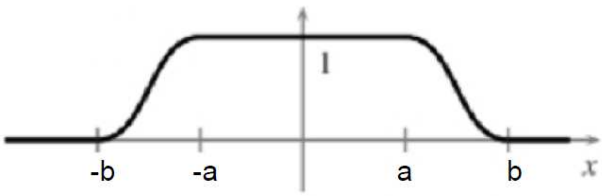

Figura 3: Gráfico de $x \mapsto \Gamma(x)$.

4. Prove o **Lema de Urysohn - em C^∞** - sem utilizar produto de convolução. **Dica.** Utilize "platôs suaves" (Exercício 3).

5. **Construção trivial de "platôs suaves".** [Extraído de Tu, Loring W., *An Introduction to Manifolds*, Springer, 2011.] Seja Λ a *rampa* no Exercício 2.

   (a) Mostre que está bem definida a função suave $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por

   $$\lambda(t) = \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t) + \Lambda(1-t)}.$$

   Cheque (e esboçe) tal "degrau", com $\lambda \equiv 0$ em $(-\infty, 0]$ e $\lambda \equiv 1$ em $[1, +\infty)$.

   (b) Mova o "degrau" uma unidade à direita, com $\nu(t) = \lambda(t-1)$. Esboce ν.

   (c) Simetrize ν, definindo o "vale" $\mu(t) = \nu(t^2)$. Esboce μ.

   (d) Tranforme o "vale" no "platô" $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ definindo $\rho = 1 - \mu$. Esboce ρ.

6. **Localização (evitando convolução).** Seja $f \in L^1\big(B(0,1)\big)$ tal que

$$\int f\varphi\, dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty\big(B(0,1)\big).$$

Mostre $f = 0$ q.t.p. seguindo o roteiro abaixo.

(a) Fixe $B(a,r) \subset B(0,1)$. Mostre que existe $\varphi_n \in C_c^\infty\big(B(a,r)\big)$ tal que

$$0 \le \varphi_n \le 1 \quad \text{e} \quad \varphi_n(x) \nearrow 1 \text{ para todo } x \in B(a,r).$$

Dica. Exercício 5.

(b) Mostre

$$\int_{B(a,r)} f\, dx = 0, \quad \text{para toda } B(a,r) \subset B(0,1).$$

Dica. Use (a) mais o TCD [note $\varphi_n \nearrow \chi_{B(a,r)}$ com $|f\varphi_n| \le |f|$ para todo n].

(c) Fixe O um aberto em $B(0,1)$. Mostre que

$$\int_O f\, dx = 0.$$

Dica. Mostre $O = B(a_1,r_1) \cup B(a_2,r_2) \cup B(a_3,r_3) \cup \cdots$ e note

$$B(a_1,r_1) \cup \cdots \cup B(a_n,r_n) = O_n \nearrow O \quad \text{e} \quad \chi_{O_n}(x) \nearrow 1 \text{ para todo } x \in O.$$

Então, use (b) mais o TCD.

(d) Seja $G \subset B(0,1)$ tal que $G = \bigcap O_n$ com cada $O_1, O_2, \ldots$ um aberto na bola $B(0,1)$. [Isto é, G é uma intersecção enumerável de abertos - em $B(0,1)$ - e dizemos que G é um conjunto de tipo G_δ.] Mostre que

$$\int_G f\, dx = 0.$$

Dica. Verifique $\chi_{O_n} \longrightarrow \chi_G$ e também $|f\chi_{O_n}| \le |f|$.

(e) Seja E mensurável em $B(0,1)$. Mostre que

$$\int_E f\, dx = 0.$$

Dicas. Utilize a **caracterização de conjuntos mensuráveis:** dado E mensurável existe $G = O_1 \cap O_2 \cap \cdots$, com cada O_n aberto, satisfazendo

$$E = G \setminus N \text{ com } N \text{ um conjunto nulo (i.e., } |N| = 0) \text{ contido em } G.$$

Mostre $\chi_E = \chi_G - \chi_N$.

(f) Sejam $E^+ = \{x \in B(0,1) : f(x) \ge 0\}$ e $E^- = \{x \in B(0,1) : f(x) \le 0\}$. Mostre

$$\int f^+\, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int f^-\, dx = 0.$$

Conclua que $f = 0$ q.t.p.