MAT5812 - EDP ELÍPTICA- primeiro semestre de 2017
Lista 1 de Exercícios
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Seja Ω um aberto arbitrário em $\mathbb{R}^n$.

1. Dê um exemplo de um aberto e limitado Ω, no plano, com $m(\partial\Omega) > 0$.

2. Mostre que a distância $d(F, K)$ entre um fechado F e um compacto K é assumida.

3. Mostre que $L^p_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, para todo Ω e todo $p \in [1, \infty]$.

4. Seja O um aberto relativamente compacto em um aberto Ω. Mostre que
$$d(O, \partial\Omega) = d(\overline{O}, \partial\Omega) = d(O, \mathbb{R}^n \setminus \Omega).$$

5. Seja Ω um aberto (limitado ou não) com fronteira não vazia (i.e., $\Omega \neq \mathbb{R}^n$). Verifique as afirmações abaixo.

   (a) É um aberto o conjunto (cheque também a segunda igualdade)
   $$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^n : D(x, \epsilon) \subset \Omega\}.$$

   (b) $\overline{\Omega_\epsilon} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \epsilon\} \subset \Omega$.

   (c) Se Ω é limitado, então $\Omega_\epsilon \subset\subset \Omega$.

   (d) Se Ω é limitado, então $d(\Omega_\epsilon, \partial\Omega) = d(\overline{\Omega_\epsilon}, \partial\Omega) = d(\Omega_\epsilon, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \epsilon$.

   (e) Seja Ω limitado ou não, temos
   $$\Omega_\epsilon + D(0, \epsilon) \subset \Omega.$$

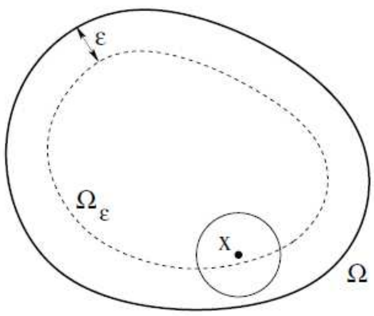

Figura 1: Os abertos Ω e Ω_ϵ, com Ω limitado.

6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e fixemos $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $f(x-y)$ a função $y \mapsto f(x-y)$. Mostre
$$\text{supp}[f(x-y)] \;=\; \text{supp}[f(x-\cdot)] \;=\; x - \text{supp}(f).$$

7. Seja $f \in L^p(\Omega)$. Mostre que $f \in L^1(X)$ para todo $X \subset \Omega$ tal que $m(X) < \infty$.

8. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos a **extensão**

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f & \text{em } \Omega, \\ 0 & \text{fora de } \Omega. \end{cases}$$

Verifique o que segue.

(a) Se $f \in L^p(\Omega)$, então $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) Dê um exemplo de uma função

$$f \in L^1_{\text{loc}}\big((-\infty, 0)\big) \text{ tal que } \widetilde{f} \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

(c) Seja $p \in [1, \infty)$. Dê um exemplo de uma função

$$f \in L^p_{\text{loc}}\big((-\infty, 0)\big) \text{ tal que } \widetilde{f} \notin L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

(d) Dê um exemplo de uma função

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^*) \text{ tal que } f \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

(e) Seja $p \in [1, \infty)$. Dê um exemplo de uma função

$$f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \text{ tal que } f \notin L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

9. Seja $f \in L^1(Y)$, com Y um mensurável arbitrário em $\mathbb{R}^n$. Seja $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com g e todas as suas derivadas limitadas. Mostre o que segue.

(A) Está bem definida a função

$$T(x) = \int_Y f(y) g(x-y)\, dy, \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n.$$

(B) Tem-se $T \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dê duas provas, P1 e P2, indicadas abaixo.

(P1) Mostre que T é contínua, use o TCD (teorema convergência dominada). Para derivar, dado $h \in \mathbb{R}^*$ e e_j o j-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^n$, expanda

$$\frac{T(x + he_j) - T(x)}{h} \qquad \text{[um quociente de Newton]}$$

como uma integral e então use o TVM e o TCD.

(P2) Use o teorema da continuidade e derivação sob o signo da integral.

10. Seja $f \in L^p(Y)$, com $p \in (1, \infty)$ e Y um mensurável em $\mathbb{R}^n$. Seja $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com g e todas as suas derivadas limitadas. Mostre o que segue.

   (A) Está bem definida a função

   $$T(x) = \int_Y f(y) g(x - y)\, dy, \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n.$$

   (B) Tem-se $T \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dê duas provas, P1 e P2, indicadas abaixo.

      (P1) Mostre que T é contínua, utilizando a desigualdade de Hölder. Para derivar, utilize quocientes de Newton e Hölder.

      (P2) Use o teorema da continuidade e derivação sob o signo da integral.