MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT5798

1 semestre de 2016

DÚVIDAS

14. **Seção 1.3 (Lista 1).** Sejam μ uma medida semi-finita e E mensurável tal que $\mu(E) = \infty$. Então, para todo $C > 0$, existe $F \subset E$ mensurável tal que

$$C < \mu(F) < \infty.$$

Prova.

Seja

$$\lambda = \sup\{\mu(F) : F \text{ é mensurável e } F \subset E\}.$$

Basta mostrarmos $\lambda = \infty$. Suponhamos por contradição $\lambda < \infty$.

Seja (F_n) uma sequência de mensuráveis, com cada $F_n \subset E$, tal que

$$\mu(F_n) \nearrow \lambda.$$

Então,

$$F = \bigcup Fn \subset E \text{ é mensurável e } \mu(F) = \lambda.$$

Se $\mu(E \setminus F) = \infty$ então, como μ é semi-finita, existe um mensurável $G \subset E \setminus F$ tal que $0 < \mu(G) < \infty$. Logo,

$$F \dot{\bigcup} G \subset E \text{ e } \mu\left(F \dot{\bigcup} G\right) > \lambda ↯$$

Isto, mostramos que

$$\mu(E \setminus F) < \infty.$$

Donde segue

$$\mu(E) = \mu\left(F \dot{\bigcup} (E \setminus F)\right) = \mu(F) + \mu(E \setminus F) = \lambda + \mu(E \setminus F) < \infty ↯$$

Concluímos então que

$$\lambda = \infty \clubsuit$$

16* **Seção 1.3 (Lista 1).** Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto $E \subset X$ diz-se **localmente mensurável** se $E \cap A \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$. Seja $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ o coleção de todos os subconjuntos localmente mensuráveis de X. Então, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Se ocorre $\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{M}$, dizemos que μ é **saturada**.

(a) Se μ for σ-finita, então μ é saturada.

(b) $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ é uma σ-álgebra.

(c) Seja $\nu : \mathcal{M}_{\text{loc}} \longrightarrow [0, \infty]$ por

$$\nu(E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{se } E \in \mathcal{M}, \\ \infty, & \text{se } E \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \setminus \mathcal{M}. \end{cases}$$

Então ν é uma medida saturada sobre $\mathcal{M}_{\text{loc}}$, dita **saturação** de μ.

(d) Se μ for completa, ν também o é.

(e) Suponha que μ seja semi-finita. Dado $E \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, defina

$$\nu_0(E) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M} \text{ e } A \subset E\}.$$

Então, ν_0 é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ que estende μ .

(f) Sejam X_1, X_2 conjuntos disjuntos não enumeráveis e $X = X_1 \cup X_2$. Sejam $\mathcal{M}$ a σ-álgebra dos subconjuntos enumeráveis ou co-enumeráveis de X e μ_0 a medida de contagem sobre $\mathcal{P}(X_1)$. Defina μ sobre $\mathcal{M}$ por

$$\mu(E) = \mu_0(E \cap X_1).$$

Então, μ é uma medida sobre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{P}(X)$. Ainda mais, com a notação dos itens anteriores temos $\nu \neq \nu_0$.

Prova.

(a) Por hipótese, temos

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \text{ com cada } X_n \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(X_n) < \infty.$$

Seja $E \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Por definição de $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ segue $E \cap X_n \in \mathcal{M}$ para todo n. Logo, por definição de σ-álgebra concluímos que

$$E = \bigcup_{\mathbb{N}} (E \cap X_n) \in \mathcal{M}.$$

(b) Sejam $E = \bigcup E_n$, com $(E_n) \subset \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$, e $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) < \infty$. Então

$$E \cap A = \bigcup (E_n \cap A) \ \in \ \mathcal{M},$$

pois $E_n \cap A \in \mathcal{M}$ para todo n [já que $E_n \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$] e $\mathcal{M}$ é σ-álgebra.

A seguir, consideremos $E \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ e $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) < \infty$. Temos

$$E^c \cap A = A \setminus (E \cap A) \quad \in \mathcal{M},$$

pois os conjuntos A e $E \cap A$ pertencem à sigma-álgebra $\mathcal{M}$.

(c) ◇ A função ν é uma medida sobre $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$.

É óbvio que $\nu(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

A seguir, consideremos uma reunião disjunta

$$E = \dot{\bigcup} E_n \text{ tal que } (E_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}.$$

Caso 1. Supondo $E_n \in \mathcal{M}$ para todo n. Trivial.

Caso 2. Existe k tal que $E_k \notin \mathcal{M}$ e $E \notin \mathcal{M}$. Temos

$$\nu(E) = \infty \quad \text{e} \quad \sum \nu(E_n) = \infty.$$

Caso 3. Existe k tal que $E_k \notin \mathcal{M}$ e $E \in \mathcal{M}$. Mostremos que temos

$$\mu(E) = \infty.$$

De fato, caso contrário temos $\mu(E) < \infty$ e então, pela definição de localmente mensurável segue $E_k = E_k \cap E \in \mathcal{M}$↯.

Consequentemente segue

$$\nu(E) = \mu(E) = \infty \quad \text{e} \quad \sum \nu(E_n) = \infty.$$

◇ A medida $\nu : \mathcal{M}_{\mathrm{loc}} \longrightarrow [0, \infty]$ é saturada.

Seja $F \subset X$ tal que

$$F \cap B \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}} \text{ para todo } B \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}} \text{ tal que } \nu(B) < \infty.$$

Verifiquemos que $F \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$. Consideremos $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) < \infty$. Pela definição de ν temos

$$\nu(A) = \mu(A) < \infty.$$

Também temos $A \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Devido à hipótese sobre F segue

$$F \cap A \ \in \ \mathcal{M}_{\text{loc}}.$$

Portanto, pela definição de $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ e como $\mu(A) < \infty$, encontramos

$$F \cap A = (F \cap A) \cap A \ \in \ \mathcal{M}.$$

Isto mostra que $F \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Logo, ν é saturada.

(d) Suponhamos que μ é completa. Mostremos que ν é completa.

Seja $F \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ tal que $\nu(F) = 0$. Pela identidade

$$\nu\Big|_{\mathcal{M}_{\text{loc}} \setminus \mathcal{M}} \equiv \infty$$

segue que $F \in \mathcal{M}$ e $\nu(F) = \mu(F) = 0$.

Seja $G \subset X$ tal que $G \subset F$. Então, como μ é completa segue que $G \in \mathcal{M}$ e $\mu(G) = 0$. Logo,

$$G \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \ \text{ e } \ \nu(G) = \mu(G) = 0.$$

(e) ⋄ A função ν_0 estende a função μ.

Fixado $E \in \mathcal{M}$, é claro que temos

$$\mu(A) \leq \mu(E) \text{ para todo } A \in \mathcal{M} \text{ tal que } A \subset E.$$

Donde segue $\nu_0(E) \leq \mu(E)$.

Por outro lado, temos $E \subset E$ e portanto $\nu_0(E) \geq \mu(E)$. Segue então

$$\boxed{\nu_0(E) = \mu(E), \text{ para todo } E \in \mathcal{M}.}$$

⋄ A função ν_0 é uma medida sobre $\mathcal{M}_{\text{loc}}$.

É óbvio que $\nu_0(\varnothing) = 0$.

A seguir, consideremos uma reunião disjunta

$$E = \dot{\bigcup} E_n \text{ tal que } (E_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\text{loc}}.$$

Para cada n, consideremos um arbitrário $A_n \in \mathcal{M}$ tal que $A_n \subset E_n$.

Então,

$$\dot{\bigcup} A_n \in \mathcal{M},\ \dot{\bigcup} A_n \subset E \quad \text{e} \quad \nu_0(E) \geq \mu\Big(\dot{\bigcup} A_n\Big) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots,$$

quasquer que sejam $A_1 \subset E_1, A_2 \subset E_2, \ldots$ satisfazendo a condição $A_n \in \mathcal{M}$ para todo n. Portanto temos (cheque, consulte a prova da associatividade para somas não ordenadas)

$$\nu_0(E) \geq \nu_0(E_1) + \nu_0(E_2) + \cdots.$$

Isto é,

$$\nu_0\Big(\dot{\bigcup} E_n\Big) \geq \sum \nu_0(E_n).$$

A desigualdade contrária. Separemos em dois casos

(1.) Suponhamos

$$\nu_0\Big(\dot{\bigcup} E_n\Big) < \infty.$$

Consideremos $A \subset \dot{\bigcup} E_n$ tal que $A \in \mathcal{M}$. Então temos

$$\mu(A) \leq \nu_0\Big(\dot{\bigcup} E_n\Big) < \infty.$$

Logo, pela definição de $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ segue

$$E_n \cap A \ \in\ \mathcal{M}, \qquad E_n \cap A \subset E_n \qquad \text{e} \quad A = \dot{\bigcup}(E_n \cap A).$$

Obtemos então

$$\mu(A) = \sum \mu(E_n \cap A) \leq \sum \nu_0(E_n).$$

Donde variando A dentro de $\dot{\bigcup} E_n$ encontramos

$$\nu_0\Big(\dot{\bigcup} E_n\Big) \leq \sum \nu_0(E_n).$$

(2.) Suponhamos $\nu_0(\dot{\bigcup} E_n) = \infty$. Fixado um N arbitrariamente grande, por definição de sup existe $A_N \in \mathcal{M}$ tal que

$$A_N \subset E = \dot{\bigcup} E_n \quad \text{e} \quad N < \mu(A_N).$$

Como μ é **semi-finita** podemos supor [vide exercício 14]

$$N < \mu(A_N) < \infty.$$

Temos $A_N = \dot{\bigcup}(A_N \cap E_n)$ com cada $A_N \cap E_n$ em $\mathcal{M}$. Logo,

$$N < \mu(A_N) = \sum \mu(A_N \cap E_n) \leq \sum \nu_0(E_n).$$

Pela arbitrariedade de N segue

$$\sum \nu_0(E_n) = \infty.$$

A prova de que ν_0 é uma medida está encerrada.

◇ A medida $\nu_0 : \mathcal{M}_{\text{loc}} \to [0, \infty]$ é saturada.

Seja $F \subset X$ tal que F é ν_0-localmente mensurável. Provemos que

$$F \in \mathcal{M}_{\text{loc}}.$$

Consideremos $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) < \infty$. Como ν_0 estende μ segue que $A \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ e

$$\nu_0(A) = \mu(A) < \infty.$$

Como F é ν_0-localmente mensurável, segue que

$$F \cap A \in \mathcal{M}_{\text{loc}}.$$

Então, como $A \in \mathcal{M}$ e $\mu(A) < \infty$, concluímos que

$$F \cap A = (F \cap A) \cap A \in \mathcal{M}, \text{ para todo } A \in \mathcal{M} \text{ com } \mu(A) < \infty.$$

Isto é, $F \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ e portanto ν_0 é saturada.

(f) Dado um conjunto arbitrário C, indiquemos a cardinalidade de C por

$$\#(C).$$

Observemos que dado $E \in \mathcal{M}$, temos

$$\mu(E) = \mu_0(E \cap X_1) = \begin{cases} \#(E \cap X_1), & \text{se } E \cap X_1 \text{ é finito,} \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

◇ A função μ é uma medida.

É óbvio que $\mu(\emptyset) = 0$.

Dada $(E_n) \subset \mathcal{M}$ uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos, temos

$$\mu\Big(\dot{\bigcup} E_n\Big) = \mu_0\Big(\dot{\bigcup}(E_n \cap X_1)\Big) = \sum \mu_0(E_n \cap X_1) = \sum \mu(E_n).$$

◇ A identidade $\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{P}(X)$.

Seja $A \subset X$. Consideremos $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) < \infty$. Isto é,

$$E \cap X_1 \text{ é finito.}$$

Como X_1 é não enumerável, segue que

$$X_1 \setminus E = X_1 \cap E^c \text{ é não enumerável.}$$

Logo, E^c é não enumerável. Assim, como $E \in \mathcal{M}$, segue que E é enumerável. Logo,

$$A \cap E \text{ é enumerável e } A \cap E \in \mathcal{M}.$$

Portanto, $A \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$.

◇ As respectivas medidas ν e ν_0 são distintas.

Neste caso temos $\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{P}(X)$. Logo, para qualquer $E \subset X$ valem

$$\nu(E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{se } E \in \mathcal{M}, \\ \infty, & \text{se } E \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{M} \end{cases}$$

e

$$\nu_0(E) = \sup \{\mu(A) : A \in \mathcal{M} \text{ e } A \subset E\}.$$

Como X_2 e $X_1 = X \setminus X_2$ são não enumeráveis, então

$$X_2 \notin \mathcal{M}.$$

Ainda mais, se $A \subset X_2$ então $A \cap X_1 = \emptyset$.

Tais observações mostram que

$$\nu(X_2) = \infty \quad \text{e} \quad \nu_0(X_2) = 0 \clubsuit$$

E5. **Lista 11.** Exercício proposto em Wheeden & Zygmund p. 144.

Sejam $p \in (0, \infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^p dy = 0 \text{ q.s.}, \quad \text{onde } |Q| = m(Q).$$

Notação. O símbolo $Q \searrow x$ indica uma família decrescente de cubos não degenerados $Q's$ centrados em x que "encolhe" a x. Isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe um cubo na família com diâmetro menor que ϵ.

Prova.

Utilizemos o **Teorema da Diferenciação de Lebesgue**: *Dada uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy = f(x) \text{ q.s.}.$$

Sejam $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Se $p \geq 1$, temos $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$. Se $0 < p \leq 1$, temos $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ [dica, com $b = \lambda a \geq 0$ reduza a $(1+\lambda)^p \leq 1 + \lambda^p$ e então com $q = 1/p \geq 1$ e $\lambda = x^q$ reduza para $1 + x^q \leq (1+x)^q$ e verifique $\varphi(x) = (1+x)^q - x^q \geq 1$, mostrando que φ é crescente e $\varphi(0) = 1$].

Portanto, dado $0 < p < \infty$, existe $c_p > 0$ tal que $(a+b)^p \leq c_p(a^p + b^p)$.

Seja $\{r_n\}$ uma enumeração de $\mathbb{Q}$ e Z_j o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - r_j|^p \, dy \;\neq\; |f(x) - r_j|^p \;.$$

Como $|f(y) - r_j|^p \in L^1_{\text{loc}}$, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue segue que $|Z_j| = 0$. Seja então

$$Z = \cup Z_j.$$

Para todos cubos Q (vide hipóteses), pontos x e racionais $r_{j's}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^p \, dy \;&\leq\; \frac{c_p}{|Q|} \int_Q |f(y) - r_j|^p \, dy + \frac{c_p}{|Q|} \int_Q |f(x) - r_j|^p \, dy \\ &= \frac{c_p}{|Q|} \int_Q |f(y) - r_j|^p \, dy \;+\; c_p |f(x) - r_j|^p. \end{aligned}$$

Portanto, dado $x \notin Z$ temos

$$\limsup_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^p \, dy \;\leq\; 2c_p |f(x) - r_j|^p, \quad \text{para todo } r_j \in \mathbb{Q}.$$

Nos pontos de Z^c em que f é finita, e ela o é q.s., o $\limsup$ acima é 0♣