Lista 11 de MAT5798 - MEDIDA E INTEGRAÇÃO - IMEUSP

Q	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	

Nome : ____

1. (1 § 6.1) Verifique quando vale a igualdade na desigualdade de Minkowsky.

   Atenção: a resposta é diferente se $p = 1$ e $1 < p < \infty$.

   Dicas :

   - No caso $p = 1$, mostre que a igualdade desejada vale se e somente se
   $$f|g| = g|f|.$$
   Note que, para $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re} z = |z|$ se e somente se $z = |z|$.
   - No caso $p \in (1, \infty)$, troque $\|f\|_p + \|g\|_p$ por $\|f + g\|_p$ na desigualdade em display na prova da desigualdade de Minkowski constante nas notas de aula.
   - No caso $p = \infty$, se $f = \lambda g$ para alguma constante $\lambda \geq 0$ então vale a igualdade na desigualdade de Minkowski. Mostre com um exemplo (é trivial) que a igualdade $\|f + g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ não implica em nenhuma relação análoga às relações provadas para os casos $p = 1$ e $p \in (1, \infty)$.

2. (3 § 6.1) Suponhamos $1 \leq p < r \leq \infty$ e (X, μ) um espaço de medida.

   (a) $L^p \cap L^r$ é um espaço de Banach com norma $\|f\| = \|f\|_p + \|f\|_r$.

   (b) Se $p < q < r$, a inclusão $L^p \cap L^r \to L^q$ é contínua.

3. (4 § 6.1) Suponhamos $1 \leq p < r \leq \infty$ e (X, μ) um espaço de medida.

   (a) $L^p + L^r$ é um espaço de Banach com norma

   $$\|f\| = \inf\{\, \|g\|_p + \|h\|_r : f = g + h \,\}.$$

   (b) Se $p < q < r$, a inclusão $L^q \longrightarrow L^p + L^r$ é contínua.

   Dica para (b): Dada uma função $f \in L^q$, escreva

   $$f = f\chi_{\{x:|f(x)|\geq 1\}} + f\chi_{\{x:|f(x)|<1\}}.$$

4. (7 § 6.1) Seja $f \in L^p \cap L^\infty$ para algum p finito. Então, $f \in L^q$ para todo $q > p$ e

$$\|f\|_\infty = \lim_{q \to \infty} \|f\|_q.$$

5. Seja $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável com $f \neq 0$ (isto é, $\|f\|_\infty > 0$). Definamos

$$\varphi(p) = \int_X |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p \quad (0 < p < \infty) \quad \text{e} \quad I = \{p \, : \, \varphi(p) < \infty\} \, .$$

Verifique as propriedades abaixo.

(a) I é um intervalo: se $r \in I$ e $s \in I$ e $r < p < s$ então $p \in I$.

(b) φ e $\log \varphi$ são convexas no interior de I e contínuas em I.

(c) Se $r < p < s$, então

$$\|f\|_p \leq \max(\|f\|_r \, , \|f\|_s) \;\; \text{e} \;\; L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset L^p(\mu).$$

(d) Se $\|f\|_r < \infty$ para algum $r < \infty$ então,

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \; = \; \|f\|_\infty \, .$$

6. (8 § 6.1) Suponha $\mu(X) = 1$ e $f \in L^p$ para algum $p > 0$. Então, se $0 < q < p$,

(a) $\|f\|_q \leq \|f\|_p$.

(b)

$$\log \|f\|_q \geq \int \log |f| \, d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

Sugestão: Use a desigualdade de Jensen com $\varphi(t) = e^t$.

(c)

$$\frac{\int |f|^q d\mu - 1}{q} = \frac{\int (|f|^q - 1) d\mu}{q} \geq \log \|f\|_q \text{ e } \lim_{q \to 0} \frac{\int |f|^q d\mu - 1}{q} = \int \log |f| d\mu.$$

(d)

$$\lim_{q \to 0} \|f\|_q = \exp\Big(\int \log |f| d\mu \Big).$$

Notação: $e^{-\infty} = 0$ e $\log 0 = -\infty$.

7. Consideremos $p \in (0, \infty)$ e uma função $f = f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, na variável x. Então,

$$\lim_{|h| \to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0.$$

Dicas.

- No caso $p \in (0, 1)$ temos que $\|f\|_p$ não é norma. Mas, $L^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial (notas de aula, Cap. 4, p. 8) e pela desigualdade nesta mesma p.8,

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p, \quad \text{para } a \geq 0,\ b \geq 0, \text{ e } 0 < p < 1,$$

  segue que $L^p(\mathbb{R}^n)$ é métrico com métrica (a desigualdade triangular é fácil)

$$d(f, g) = \|f - g\|_p^p = \int |f - g|^p dm.$$

- Adapte (é fácil) a prova da Proposição 4.1(a), ou do Teorema 4.4 (notas de aulas, pp. 11–12) e mostre que espaço vetorial gerado pelas características de conjuntos de medida finita (ou de cubos diádicos) é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.
- Mostre que a afirmação é válida para as funções características já citadas e estenda o resultado a $L^p(\mathbb{R}^n)$, por densidade e continuidade.

8. Seja $p \in (0, \infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^p dy = 0 \text{ para quase todo } x.$$

Notação: O símbolo $Q \searrow x$ indica uma família decrescente de cubos não degenerados $Q's$ centrados em x que "encolhe" a x $[Q \searrow x]$. Isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe um cubo na família com diâmetro menor que ϵ.

9. (34 § 3.5) Sejam $F, G \in \text{NBV}$ e $-\infty < a < b < \infty$.

(a) Adaptando a prova da Fórmula de Integração por Partes, mostre que

$$\int_{[a,b]} \frac{F(x) + F(x-)}{2} dG(x) + \int_{[a,b]} \frac{G(x) + G(x-)}{2} dF(x) =$$

$$= F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

(b) Suponha que para todo $x \in [a, b]$, ou F ou G é contínua em x. Então

$$\int_{[a,b]} F dG + \int_{[a,b]} G dF = F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

10. (35 § 3.5) Se F e G são absolutamente contínuas em $[a, b]$ então FG idem. Ainda,

$$\int_a^b (FG' + GF')(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

11. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ e mensurável e $p \in [1, \infty]$. Se $f \notin L^p(E)$, então existe $g \in L^{p'}(E)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, tal que

$$fg \notin L^1(E).$$

Dica: Construa $g = \sum a_k g_k$ para a_k e g_k apropriados e $\int_E f g_k dm \to +\infty$.

12. $L^\infty(E)$ não é separável para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $m(E) > 0$.

Sugestão: A função

$$f(r) = m[E \cap D(0;r)], \text{ com } D(0;r) = \{x : |x| \leq r\}, \text{ é contínua.}$$

13. Sejam (X, μ) um espaço de medida e $p \in [1, \infty)$. Suponha que $f_n \to f$ em L^p e que $g_n \to g$ q.s., com $\|g_n\|_\infty \leq M < \infty$, para todo n. Mostre que

$$f_n g_n \to fg \text{ em } L^p.$$