3^{a}ª Prova de MAT5798 - MEDIDA E INTEGRAÇÃO - IMEUSP
21 de junho - Primeiro semestre de 2016

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
Total	

Nome : ________________**SEMI – GABARITO**________________
Nº USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. O exame tem duração de 3 horas e pode ser feito a lápis.
2. Escolha e resolva **5 (cinco)** questões, com uma e uma só questão de cada um dos pares de questões: 1-2, 3-4, 5-6, 7-8 e 9-10.
3. É necessário justificar suas afirmações.
4. É necessário, se for o caso, verificar se a questão é bem posta. É absolutamente necessário escrever os teoremas e resultados utilizados, soluções que não os incluem não tem nota 100%, assim como checar as hipóteses.

Boa prova.

1. Enuncie e prove o Teorema do Completamento para medidas positivas.

   Solução. Vide notas de aulas.

2. Se $E \in \mathcal{L}$ e $m(E) > 0$, então o conjunto

$$E - E = \{x - y : x, y \in E\}$$

contém um intervalo centrado em 0.

Solução. Utilizaremos o seguinte lema.

> **Lema.** *Se $E \in \mathcal{L}$ e $m(E) > 0$, então para qualquer $\alpha < 1$ existe um intervalo aberto I tal que*
>
> $$m(E \cap I) > \alpha m(I).$$

Pelo lema, existe um intervalo $I = (p - r, p + r)$, com $m(I) = 2r$ e

$$m(E \cap I) > \frac{3}{4} m(I) = \frac{3r}{2}.$$

Consideremos o intervalo $J = (-r, r)$. Dado um ponto $x \in J$ mostremos que $x \in E - E$. Isto equivale a $(x + E) \cap E \neq \emptyset$. Para provarmos into, basta checarmos que

$$[x + (E \cap I)] \bigcap (E \cap I) \neq \emptyset.$$

Suponhamos, por contradição, que

$$[x + (E \cap I)] \bigcap (E \cap I) = \emptyset.$$

Se $x \in [0, r)$ então (a reunião que segue é disjunta)

$$[x + (E \cap I)] \bigcup (E \cap I) \subset (p - r, p + r + x).$$

Logo,

$$2r + x \geq 2m(E \cap I) > 3r,$$

o que é uma **contradição**.

Para completar a questão, só nos resta provar o lema.

Vide próxima página.

Prova do Lema.

3. Mostre que

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Atenção: É necessário identificar o uso das integrais de Lebesgue e de Riemann (própria e imprópria).

Solução. Vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT5798-P1-2016.pdf`.

4. Sejam a e b números reais arbitrários. Considere a função

$$f(x) = |x|^a \left|\log |x|\right|^b, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Determine os valores a e b tais que

(i) f é integrável em $\left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \frac{1}{2}\right\}$.

(ii) f é integrável em $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\}$.

5. (a) Defina a função maximal (Hardy-Littlewood) e mostre que ela é mensurável.
   (b) Enuncie e demonstre o Teorema Maximal de Hardy-Littlewood.

Solução. Vide notas de aulas.

6. Sejam

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mostre que

(a) F e G são diferenciáveis em todos os pontos da reta.

(b) $F \in BV([-1,1])$.

(c) $G \notin BV([-1,1])$.

Solução.

(a) Trivial (verifique). Mostre que $F'(0) = 0$.

(b) Temos $|F'(x)| \leq 3$ para todo $x \in [-1,1]$. Logo, $F \in BV([-1,1])$.

(c) (**Sugestão de André Augusto Quintal.**)

Seja n um número par arbitrário, com $n \geq 2$. Consideremos a partição

$$x_0 = -1 < x_1 < \cdots x_n < x_{n+1} = 1, \text{ com } x_j = \frac{1}{\sqrt{(n+1-j)\frac{\pi}{2}}} \text{ se } j = 1, \ldots, n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} |G(x_j) - G(x_{j-1}| &\geq \sum_{j=2}^{n} \left| \frac{\sin\left((n+1-j)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1-j)\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin\left((n-j)\frac{\pi}{2}\right)}{(n-j)\frac{\pi}{2}} \right| \\ &\geq \sum_{j \in \{3,5,7,\ldots,n-1\}} \frac{1}{(n-j)\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{j \in \{3,5,7,\ldots,n-1\}} \frac{1}{n-j} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-3}\right). \end{aligned}$$

É bem sabido que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = +\infty.$$

Logo, G não é de variação limitada♣

7. Suponhamos $1 \leq p < r < \infty$ e (X, μ) um espaço de medida.

   (a) $L^p + L^r$ é um espaço de Banach com norma (mostre que bem definida)

   $$\|f\| = \inf \{ \, \|g\|_p + \|h\|_r : f = g + h \, \text{com} \; g \in L^p \text{ e } h \in L^r \}.$$

   (b) Se $p < q < r$, a inclusão $L^q \longrightarrow L^p + L^r$ é contínua.

Solução.

(a) É trivial ver que $0 \leq \| \, . \, \| < \infty$ em $L^p + L^r$, e que este é um espaço vetorial (cheque).
Se $\|f\| = 0$, existem sequências $(g_n) \subset L^p$ e $(h_n) \subset L^r$ tais que

$$f = g_n + h_n, \quad g_n \xrightarrow{L^p} 0 \;\; \text{e} \;\; h_n \xrightarrow{L^r} 0.$$

Já vimos que (exercício resolvido em lista), existe subsequência (g_{n_k}) tal que $g_{n_k} \xrightarrow{q.s.} 0$ e assim, como $h_{n_k} \xrightarrow{L^r} 0$, existe subsequência $h_{n_{k_j}} \xrightarrow{q.s.} 0$.
Logo, $f = (\, g_{n_{k_j}} + h_{n_{k_j}} \,) \xrightarrow{q.s.} 0$.
Se $f = 0$, escrevendo $f = 0 + 0$ obtemos $\|f\| \leq 0 + 0 = 0$. Logo, $\|f\| = 0$.
Dada $f \in L^p + L^r$, é óbvio que $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$ se $\lambda = 0$.
Se $\lambda \neq 0$ temos $f = g + h$ se, e só se, $\lambda f = \lambda g + \lambda h$ e então,

$$\begin{aligned}\|\lambda f\| &= \inf\{\|\lambda g\|_p + \|\lambda h\|_r : \lambda f = \lambda g + \lambda h\} \\ &= \inf\{|\lambda| \, \|g\|_p + |\lambda| \, \|h\|_r : f = g + h\} = |\lambda| \, \|f\|.\end{aligned}$$

Desigualdade triangular. Dadas f_1 e f_2 em $L^p + L^r$ fixemos uma representação de f_2, na forma $f_2 = g_2 + h_2$, com $g_2 \in L^p$ e $h_2 \in L^r$, e consideremos uma representação arbitrária de f_1, na forma $f_1 = g_1 + h_1$, com $g_1 \in L^p$ e $h_1 \in L^r$. Temos

$$\|f_1 + f_2\| \leq (\, \|g_1\|_p + \|h_1\|_r) + \|g_2\|_p + \|h_2\|_r.$$

Como a representação de f_1 é arbitrária, tomando o ínfimo nesta desigualdade obtemos

$$\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + (\, \|g_2\|_p + \|h_2\|_r \,)$$

e assim, como g_2 e h_2 são quaisquer, tomando o ínfimo nesta última desigualdade para g_2 e h_2 arbitrários encontramos

$$\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Completude. Dada (f_n) uma sequência de Cauchy em $L^p + L^r$, existe $N_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_i - f_j\| < \frac{1}{2^n}, \text{ para quaisquer } i, j \geq N_n.$$

Podemos supor (N_n) crescente. Existem g_{N_n} e h_{N_n} tais que

$$f_{N_{n+1}} - f_{N_n} = g_{N_n} + h_{N_n}, \quad \|g_{N_n}\|_p < \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad \|h_{N_n}\|_r < \frac{1}{2^n}.$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_{N_n}\|_p < \infty$$

e L^p é completo segue que

$$\sum^{\infty} g_{N_n} = g \in L^r \quad \text{e, analogamente,} \quad \sum^{\infty} h_{N_n} = h \in L^r.$$

Consequentemente, escrevendo

$$\sum_{n=1}^{p} [\, f_{N_{n+1}} - f_{N_n} \,] - g - h = \left[\sum_{n=1}^{p} g_{N_n} - g \right] + \left[\sum_{n=1}^{p} h_{N_n} - h \right],$$

obtemos

$$\left\| \sum_{n=1}^{p} [\, f_{N_{n+1}} - f_{N_n} \,] - g - h \right\| \leq \left(\left\| \sum_{n=1}^{p} g_{N_n} - g \right\|_p + \left\| \sum_{n=1}^{p} h_{N_n} - h \right\|_r \right) \overset{p \to \infty}{\to} 0,$$

Logo, em $L^p + L^r$, temos

$$g + h = \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=1}^{p} \left[\, f_{N_{n+1}} - f_{N_n} \right] = \lim_{p \to +\infty} \left(f_{N_{p+1}} - f_{N_1} \right)$$

e, assim, (f_{N_n}) é subsequência convergente de (f_n), a qual é de Cauchy. Portanto, a sequência (f_n) converge em $L^p + L^r$.

(b) Dada $f \in L^q$ temos

$$g = f\chi_{\{\,|f| \geq 1\,\}} \in L^p, \quad h = f\chi_{\{\,|f| < 1\,\}} \in L^r, \quad f = g + h$$

e então,

$$\|f\| \leq \|g\|_p + \|h\|_r \leq \left[\int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^q d\mu \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\{|f| < 1\}} |f|^q d\mu \right]^{\frac{1}{r}} \leq \|f\|_q^{\frac{q}{p}} + \|f\|_q^{\frac{q}{r}}.$$

Logo, se $\|f\|_q = 1$ temos $\|f\| \leq 2$ e portanto,

$$\|f\| \leq 2\|f\|_q \clubsuit$$

8. Suponha $\mu(X) = 1$ e $f \in L^p$ para algum $p > 0$. Então, se $0 < q < p$,

(a) $\|f\|_q \leq \|f\|_p$.

(b)
$$\log \|f\|_q \geq \int \log |f| \, d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

(c)
$$\frac{\int |f|^q d\mu - 1}{q} = \frac{\int (|f|^q - 1) d\mu}{q} \geq \log \|f\|_q \text{ e } \lim_{q \to 0} \frac{\int |f|^q d\mu - 1}{q} = \int \log |f| d\mu.$$

(d)
$$\lim_{q \to 0} \|f\|_q = \exp\Big(\int \log |f| d\mu\Big).$$

Notação: $e^{-\infty} = 0$ e $\log 0 = -\infty$.

Solução.

(a) Cheque (é simples).

(b) Se $\log |f|^q \in L^1$, da Desigualdade Integral de Jensen (enuncie-a)e sendo e^x é convexa temos
$$e^{\int \log |f|^q d\mu} \leq \int e^{\log |f|^q} d\mu.$$
Computando o logaritmo (uma função crescente) dos dois lados desta desigualdade obtemos,
$$q \int \log |f| \, d\mu \leq \log \left(\int |f|^q d\mu \right) = \log \|f\|_q^q = q \log \|f\|_q.$$
Se $\log |f|^q \notin L^1$ então
$$\int_X \log |f|^q d\mu = -\infty$$
pois no conjunto $\{x : |f(x)| \geq 1\}$ temos $0 \leq \log |f|^q \leq |f|^q$ enquanto que no conjunto $\{x : |f(x)| < 1\}$ temos $-\infty \leq \log |f|^q < 0$. Assim,
$$-\infty \leq \int_X \log |f|^q d\mu \leq \|f\|_q < +\infty.$$

(c) De $1 + \log x \leq x$, se $x > 0$, segue $\|f\|_q^q - 1 \geq \log \|f\|_q^q = q \log \|f\|_q$ e,
$$\frac{\|f\|_q^q - 1}{q} \geq \log \|f\|_q.$$
Para a segunda afirmação, pondo
$$\frac{\int_X |f|^q d\mu - 1}{q} = \frac{\int_X (|f|^q - 1) \, d\mu}{q} = \int_X \frac{|f|^q - 1}{q} d\mu,$$
temos, se $q \to 0$, a convergência puntual para o integrando,
$$\frac{|f|^q - 1}{q} = \frac{e^{q \log |f|} - 1}{q} = \frac{e^{q \log |f|} - 1}{q \log |f|} \log |f| \to \log |f|,$$

mesmo se $f(x)=0$ ou $|f(x)|=1$
Se $a\neq 0$ e $a\neq 1$, a^x é convexa $[(a^x)''=a^x\log^2 a>0]$ e, pelo exercício 1(a)(iii), a função dada pelos quocientes

$$\varphi(x)=\frac{a^x-1}{x-0},\ \text{se } x\neq 0,\quad \varphi(0)=\log a,$$

é crescente e assim, a função

$$q\mapsto\frac{|f(x)|^q-1}{q-0}$$

é, para $q\to 0$, decrescente a $\log|f(x)|$; inclusive se $f(x)=0$ ou $|f(x)|=1$.
[Outra prova (menos fácil) de

$$\frac{|f|^q-1}{q}\searrow\log|f|.$$

Se $0<a\neq 1$, então a função

$$h(x)=\frac{a^x-1}{x},\ \textit{se } x\neq 0,\quad h(0)=\log a,$$

é tal que $h'>0$, se $x\neq 0$, $h'(0)=0$ (h é crescente) e

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a.]$$

No conjunto $\{x:|f(x)|\leq 1\}$ temos

$$0\geq\frac{|f|^q-1}{q}\geq\log|f|$$

e, trocando sinais,

$$0\leq-\frac{|f|^q-1}{q}\leq-\log|f|$$

e, pelo teorema da convergência monótona,

$$\lim_{q\to 0}\int_{\{|f|\leq 1\}}-\left(\frac{|f|^q-1}{q}\right)d\mu=\int_{\{|f|\leq 1\}}(-\log|f|)d\mu.$$

No conjunto $\{x:|f(x)|>1\}$ temos, para $q<p$,

$$0\leq\log|f|\leq\frac{|f|^q-1}{q}\leq\frac{|f|^p-1}{p}\in L^1$$

e portanto, pelo teorema da convergência dominada, segue o resultado desejado.

(d) Por (b) e (c) temos,

$$\int\log|f|d\mu=\lim_{q\to 0}\frac{\|f\|_q^q-1}{q}=\log\|f\|_q,$$

donde a tese ♣

9. Enuncie e prove o Teorema de Lusin para espaços HLC.

   Solução. Vide notas de aulas.

10. Sejam μ uma medida de Radon positiva σ-finita sobre X e uma medida de Radon $\nu \in M(X)$. Escrevamos a decomposição de Lebesgue de ν com respeito a μ como

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \text{ com } \nu_1 \perp \mu \text{ e } \nu_2 << \mu.$$

Mostre que ν_1 e ν_2 são medidas de Radon.