2ª Prova de MAT5798 - MEDIDA E INTEGRAÇÃO - IMEUSP
31 de maio - 1º semestre de 2016

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
Total	

Nome : __________**SEMI-GABARITO**________________
NºUSP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. A prova tem duração de 3 horas e pode ser feita a lápis.
2. Escolha e resolva **5 (cinco)** questões. Justifique as suas afirmações.

Boa prova.

1. Enuncie e prove o Teorema da decomposição de Hahn.

   Solução. Vide notas de aulas.

2. Sejam $F \in NBV$ e $G(x) = |\mu_F|((-\infty, x])$. Prove que

$$|\mu_F| = \mu_{T_F},$$

verificando os seguintes passos.

(a) Utilizando a definição de T_F, mostre que $T_F \leq G$.

(b) $|\mu_F(E)| \leq \mu_{T_F}(E)$ se E é um intervalo e também se E é um boreliano.

(c) $|\mu_F| \leq \mu_{T_F}$, e assim $G \leq T_F$.

(d) Conclua.

Solução.

Questão bem posta e preparação.

Por definição, temos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. A **variação total de** F é definida por

$$T_F(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| : \ n \in \mathbb{N} \text{ e } -\infty < x_0 < \cdots < x_n = x \right\},$$

para cada real x. Por definição de NBV temos que $F \in BV$. Isto é, a função complexa F é de **variação limitada** e (por definição) $T_F(+\infty)$ existe e é finito. Por *propriedades de BV* segue que $F(-\infty)$ e $F(+\infty)$ existem e são finitos.

Por definição de NBV segue que F é **contínua à direita** e $F(-\infty) = 0$.

Como $F \in NBV$, pelas *propriedades das variações de F (positiva, negativa e total)* segue que a função real crescente e positiva $T_F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ satisfaz

$$\boxed{T_F \in NBV.}$$

Pela *correspondência entre NBV e medidas de Borel complexas sobre* $\mathbb{R}$, existe uma única medida de Borel complexa μ_F sobre os borelianos de $\mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{F(x) = \mu_F((-\infty, x]), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.}$$

Analogamente, existe uma única medida (positiva) de Borel μ_{T_F} sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{T_F(x) = \mu_{T_F}((-\infty, x]), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.}$$

(a) Consideremos $-\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x < \infty$. Pela *desigualdade triangular para medidas complexas* temos

$$\sum |F(x_j) - F(x_{j-1})| = \sum \Big| \mu_F\Big((x_{j-1}, x_j]\Big) \Big| \leq \sum |\mu_F| \Big((x_{j-1}, x_j]\Big)$$

$$= |\mu_F|\Big((x_0, x]\Big) \leq |\mu_F|\Big((-\infty, x]\Big) = G(x).$$

Donde segue

$$T_F(x) \leq G(x).$$

(b) **Primeira solução.**

Seja $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Dado $(a_n, b_n] \subset (a,b)$, porém com a_n e b_n reais, segue

$$\Big|\mu_F\Big((a_n,b_n]\Big)\Big| = |F(b_n) - F(a_n)| \leq V_{a_n}^{b_n}(F)$$

$$= T_F(b_n) - T_F(a_n) = \mu_{T_F}\Big((a_n,b_n]\Big) \leq \mu_{T_F}\Big((a,b)\Big).$$

Impondo $a_n \searrow a$ e $b_n \nearrow b$ segue $(a_n,b_n] \nearrow (a,b)$. *Propriedades de medidas com sinal (e então para medidas complexas) [vide Proposição 3.1]* garantem

$$\Big|\mu_F\Big((a,b)\Big)\Big| = \lim \Big|\mu_F\Big((a_n,b_n]\Big)\Big| \leq \mu_{T_F}\Big((a,b)\Big).$$

Seja O um aberto. Podemos supor $O = \cup I_n$ uma reunião enumerável de intervalos abertos disjuntos. Então temos

$$|\mu_F(O)| = \Big|\sum \mu_F(I_n)\Big| \leq \sum |\mu_F(I_n)| \leq \sum \mu_{T_F}(I_n) = \mu_{T_F}(O).$$

Seja $G = \cap O_n$ um G_δ, com $O_{n's}$ abertos. Podemos supor $O_n \searrow G$. Então, como μ_F é medida complexa e portanto finita, temos

$$|\mu_F(G)| = |\lim \mu_F(O_n)| \leq \lim \mu_{T_F}(O_n) = \mu_{T_F}(O).$$

Seja B um boreliano arbitrário. *Propriedades de regularidade para medidas positivas de Lebesgue-Stieltjes (vide Teorema 1.7)*, aplicadas às partes positivas e negativas das partes real e imaginária das medidas de Borel e finitas μ_F e μ_{T_F}, garantem um conjunto G de tipo G_δ tal que

$$B \subset G \ \text{ e } \ \mu_F(G \setminus B) = 0 = \mu_{T_F}(G \setminus B).$$

Logo,

$$|\mu_F(B)| = |\mu_F(G)| \leq \mu_{T_F}(G) = \mu_{T_F}(B), \text{ para todo boreliano } B.$$

Segunda solução.

Seja a coleção

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{B}_\mathbb{R} : |\mu_F(E)| \leq \mu_{T_F}(E)\}.$$

Pelo que já foi feito até aqui temos (para a família elementar de s-intervalos)

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, (a,b], (a,\infty) : -\infty \leq a < b < \infty\} \subset \mathcal{C}.$$

A coleção $\mathcal{C}$ é uma classe monótona pois é fechada para uniões crescentes $[E_n \nearrow E]$ e intersecções decrescentes $[E_n \searrow E]$. Note que μ_F e μ_{T_F} são finitas.

A coleção $\mathcal{C}$ é fechada para uniões disjuntas.

A coleção $\mathcal{A}$ das uniões finitas e disjuntas de s-intervalos é uma álgebra.

Ainda mais, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Seja $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ a classe monótona gerada por $\mathcal{A}$. Segue

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}.$$

Pelo **Lema da classe monótona** segue $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

É sabido que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Logo,

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}.$$

(c) Pelo Exercício 21 § 3.3 - Folland p. 24, vale a fórmula

$$|\mu_F|(E) = \sup\left\{\sum |\mu_F(E_j)| : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_j \text{ com } E_{j's} \ \mathsf{disjuntos}\right\}.$$

Com a notação em tal fórmula e por (b) temos

$$\sum |\mu_F(E_j)| \leq \sum \mu_{T_F}(E_j) = \mu_{T_F}\left(\bigcup E_j\right) = \mu_{T_F}(E).$$

Donde segue

$$|\mu_F| \leq \mu_{T_F}.$$

Adendo (importante). Segue do Exercício 21 § 3.3 - Folland p. 24, que dada uma medida complexa ν, então $|\nu|$ é a menor medida positiva λ satisfazendo

$$|\nu(E)| \leq \lambda(E), \text{ para todo mensurável } E.$$

Por favor, cheque.

(d) Por (c) segue

$$|\mu_F|\Big((-\infty, x]\Big) = G(x) = T_F(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Já vimos que $T_F \in NBV$. Então, pela unicidade enunciada no teorema de correspondência entre funções em NBV e medidas de Borel segue

$$|\mu_F| = \mu_{T_F} \ \clubsuit$$

Vide a seguir a solução do exercício utilizado.

* **Exercício 21 § 3.3 - Folland p. 24.**
Caracterização da variação total $|\nu|$ de uma medida complexa ν. Seja ν uma medida complexa sobre $(X, \mathcal{M})$. Todos os conjuntos a seguir pertencem a $\mathcal{M}$. Defina:

$$\mu_1(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)| : \ n \in \mathbb{N} \text{ e } E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j, \text{ com } E_{j's} \text{ disjuntos} \right\}$$

$$\mu_2(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| : \ E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\} \text{ com } E_{j's} \text{ disjuntos}$$

$$\mu_3(E) = \sup \left\{ \left| \int_E f d\nu \right| : \ |f| \leq 1 \right\}.$$

Mostre que

(a) $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = |\nu|$.

(b) $|\nu|$ é a menor medida positiva λ tal que

$$|\nu(E)| \leq \lambda(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{M}.$$

Solução.

(a) ◇ É trivial ver que $\boxed{\mu_1(E) \leq \mu_2(E)}$ para todo E.

◇ Provemos $\mu_3 = |\nu|$. Dados E e f, com $|f| \leq 1$, pela desigualdade triangular integral em medidas complexas temos

$$\left| \int_E f d\nu \right| \leq \int_E |f| d|\nu| \leq \int_E d|\nu| = |\nu|(E).$$

Donde segue $\mu_3(E) \leq |\nu|(E)$.
Para a desigualdade reversa, consideremos a função

$$f = \overline{\frac{d\nu}{d|\nu|}}, \quad \text{logo, } d\nu = \overline{f} d|\nu|.$$

Pelas *Propriedades da Medida Variação Total* segue $f\overline{f} = |f|^2 = 1$. Ainda,

$$\mu_3(E) \geq \left| \int_E f d\nu \right| = \int_E |f|^2 d|\nu| = |\nu|(E).$$

Donde segue $\mu_3(E) \geq |\nu|(E)$. Concluímos então que

$$\boxed{\mu_3 = |\nu|.}$$

◇ Provemos $\mu_2(E) \leq \mu_3(E)$. Escrevamos $E = \cup E_j$, uma união enumerável de $E_{j's}$ disjuntos. Então, pela definição de μ_3 e como μ_3 é uma medida, temos

$$\sum |\nu(E_j)| = \sum \left| \int_{E_j} 1 d\nu \right| \leq \sum \mu_3(E_j) = \mu_3 \left(\cup E_j \right) = \mu_3(E).$$

Donde segue $\boxed{\mu_2(E) \leq \mu_3(E)}$.

$\diamond$ Provemos $\mu_3(E) \leq \mu_1(E)$. Seja $f : E \to \mathbb{C}$ mensurável com $|f| \leq 1$. Então, f é integrável e existe uma sequência de funções simples (φ_n) definidas em E tal que

$$|\varphi_n| \nearrow |f| \text{ pontualmente.}$$

Pelo *Teorema da convergência dominada* segue

$$\int_E \varphi_n d\nu \longrightarrow \int_E f d\nu.$$

Fixada φ_n, consideremos sua representação padrão

$$\varphi_n = c_1\chi_{E_1} + \cdots + c_k\chi_{E_k} \qquad [E = \cup E_j,\ E_{j's} \text{ disjuntos e } |c_{j's}| \leq 1].$$

Segue

$$\left|\int_E \varphi_n d\nu\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} c_j \nu(E_j)\right| \leq \sum |c_j||\nu(E_j)| \leq \sum |\nu(E_j)| \leq \mu_1(E).$$

Impondo $n \to \infty$ encontramos

$$\left|\int_E f d\nu\right| \leq \mu_1(E).$$

Variando f, onde $|f| \leq 1$, e computando o sup segue

$$\boxed{\mu_3(E) \leq \mu_1(E).}$$

A prova de (a) está completa.

(b) Por *propriedades da variação total de uma medida complexa* temos

$$|\nu(E)| \leq |\nu|(E).$$

Logo, $|\nu|$ é uma medida positiva que satisfaz a desigualdade exigida. Seja λ uma medida positiva tal que $|\nu(E)| \leq \lambda(E)$. Seja $E = \cup E_j$ uma união enumerável de mensuráveis **disjuntos**. Então, temos

$$\sum |\nu(E_j)| \leq \sum \lambda(E_j) = \lambda(\cup E_j) = \lambda(E).$$

Donde segue

$$|\nu| \leq \lambda.$$

Portanto, $|\nu|$ é a menor medida que satisfaz a desigualdade exigida♣

3. Uma função $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, é convexa se

$$F(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda F(s) + (1-\lambda)F(t),$$

quaisquer que sejam $s, t \in (a, b)$ e $\lambda \in (0, 1)$. Verifique as afirmações abaixo e esboce a figura pedida.

(a) F é convexa se e somente se para quaisquer números $s, t, s', t' \in (a, b)$ tais que $s \leq s' < t'$ e $s < t \leq t'$, valem as desigualdades

$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq \frac{F(t') - F(s')}{t' - s'} \qquad \text{[esboce uma figura].}$$

Interpretação: a inclinação da "corda" sobre o segmento $[s, t]$ é inferior à inclinação da "corda" sobre o segmento $[s', t']$.

(b) Se F é convexa e $t_0 \in (a, b)$, então existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) - F(t_0) \geq \eta(t - t_0), \text{ para todo } t \in (a, b).$$

(c) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida tal que $\mu(X) = 1$, uma função $g : X \to (a, b)$ em $L^1(\mu)$ e uma função convexa $F : (a, b) \to \mathbb{R}$. Então,

$$F\left(\int g\, d\mu\right) \leq \int F \circ g\, d\mu.$$

(*) *Se F é convexa, então F é de Lipschitz em intervalos compactos.*

(**) **Caracterização da convexidade.** *A função $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, F é absolutamente contínua em subintervalos compactos e a derivada F', no conjunto em que esta é finita, é crescente.*

Solução.

(a)($\Rightarrow$) Consideremos $\lambda \in (0, 1]$ tal que $t = (1-\lambda)s + \lambda t'$. Consideremos $\nu \in [0, 1)$ tal que $s' = (1-\nu)s + \nu t'$. Pela convexidade de F segue

$$\begin{cases} F(t) - F(s) \leq (1-\lambda)F(s) + \lambda F(t') - F(s) = \lambda[F(t') - F(s)], \\ F(t') - F(s') \geq F(t') - (1-\nu)F(s) - \nu F(t') = (1-\nu)[F(t') - F(s)]. \end{cases}$$

Encontramos então

$$\frac{F(t) - F(s)}{\lambda} \leq \; F(t') - F(s) \leq \frac{F(t') - F(s')}{1 - \nu}, \text{ onde}$$

$$\lambda = \frac{t - s}{t' - s} \quad \text{e} \quad 1 - \nu = \frac{t' - s'}{t' - s}.$$

Donde imediatamente segue a desigualdade desejada.

($\Leftarrow$) Consideremos um ponto $s' = t = p \in (s, t')$. Segue

$$\frac{F(p) - F(s)}{p - s} \leq \frac{F(t') - F(p)}{t' - p}.$$

Logo, $(t' - p)[F(p) - F(s)] \leq (p - s)[F(t') - F(p)]$. Encontramos então

$$F(p) \leq \frac{t' - p}{t' - s}F(s) + \frac{p - s}{t' - s}F(t'), \quad \text{com } p = \frac{(t' - p)}{t' - s}s + \frac{(p - s)}{t' - s}t'.$$

É fácil ver que p está escrito como uma combinação convexa de s e t'. Tal desigualdade e tal identidade mostram que F é convexa em (s, t').

(b) **Primeira solução (elementar).**

Com a notação no item (a), sejam $s' = t = t_0$. Pelo item (a) encontramos

$$\frac{F(t_0) - F(s)}{t_0 - s} \leq \frac{F(t') - F(t_0)}{t' - t_0}, \text{ para todos } a < s < t_0 < t' < b.$$

Logo,

$$\sup_{s \in (a,t_0)} \frac{F(t_0) - F(s)}{t_0 - s} \leq \inf_{t' \in (t_0,b)} \frac{F(t') - F(t_0)}{t' - t_0}.$$

Seja η um número entre tal sup e tal inf. Para todo $t \in (a, t_0)$ temos

$$\frac{F(t_0) - F(t)}{t_0 - t} \leq \eta \text{ e então } F(t_0) - F(t) \leq \eta(t_0 - t) \text{ e } F(t) - F(t_0) \geq \eta(t - t_0).$$

Segunda solução.

Pela caracterização da convexidade [vide (*)], a função F é absolutamente contínua em compactos e F' é crescente no conjunto em que F' existe. Segue

$$\eta = \sup\{F'(s) < \infty : s \leq t_0\} \leq \nu = \inf\{F'(s) < \infty : t_0 \leq s\}.$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo para integrais de Lebesgue, para cada $t \leq t_0$ temos

$$F(t) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t} F'(s)ds = -\int_{t}^{t_0} F'(s)ds \geq -\eta(t_0 - t) = \eta(t - t_0).$$

Analogamente, para cada $t \geq t_0$ temos

$$F(t) - F(t_0) \geq \nu(t - t_0) \geq \eta(t - t_0).$$

(c) Como temos $g - a > 0$ em todo ponto e $b - g > 0$ em todo ponto, segue

$$a = \int_X a d\mu < \int_X g d\mu < \int_X b d\mu = b.$$

Logo,

$$t_0 = \int g d\mu \in (a, b).$$

Assim, por (b) segue que existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $F(t_0) + \eta(t - t_0) \leq F(t)$. Substituindo $t = g(x)$ obtemos

$$F(t_0) + \eta[g(x) - t_0] \leq F(g(x)).$$

Donde integrando encontramos

$$F\left(\int g d\mu\right) + 0 \leq \int (F \circ g) d\mu.$$

(*) Fixemos um intervalo compacto $[\overline{a}, \overline{b}] \subset (a, b)$. Fixemos α, β, γ e δ tais que

$$a < \alpha < \beta < \overline{a} < \overline{b} < \gamma < \delta < b.$$

Consideremos reais arbitrários s e t satisfazendo

$$\alpha < \beta < s < t < \gamma < \delta.$$

Obtemos

$$\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \frac{F(s)-F(\beta)}{s-\beta} \leq \frac{F(t)-F(s)}{t-s} \leq \frac{F(\gamma)-F(t)}{\gamma-t} \leq \frac{F(\delta)-F(\gamma)}{\delta-\gamma}$$

Seguem as desigualdades

$$\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \frac{F(t)-F(s)}{t-s} \leq \frac{F(\delta)-F(\gamma)}{\delta-\gamma}, \quad \text{para todos } s,t \text{ em } (\beta,\gamma).$$

Isto mostra que F é lipschtziana em $[\overline{a}, \overline{b}] \subset (\beta, \gamma)$.

(**) **Caracterização da convexidade.**

($\Rightarrow$) Por (*), segue que F é de Lipschitz em subintervalos compactos. Logo, é trivial ver, F é absolutamente contínua nos intervalos compactos. Pelo *Teorema Fundamental do Cálculo para a Integral de Lebesgue* segue que F' existe q.s e é integrável em intervalos compactos. Suponhamos $x_1 < x_2$ tais que $F'(x_1)$ e $F'(x_2)$ existem. Então, temos

$$\frac{F(s)-F(x_1)}{s-x_1} \leq \frac{F(x_2)-F(t)}{x_2-t}, \quad \text{se} \ \ s,t \in [x_1,x_2],\ s \neq x_1,\ t \neq x_2.$$

Computando os limites para $s \to x_1^+$ e $t \to x_2^-$, segue $F'(x_1) \leq F'(x_2)$.

($\Leftarrow$) Basta verificarmos (a). Seja $t \in (x_1, x_2)$, onde $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. Como a derivada F' é crescente, temos

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup\{F'(u) : u \in [x_1,t] \text{ e } F'(u) < \infty\} \\ &\leq \beta = \inf\{F'(v) : v \in [t,x_2] \text{ e } F'(v) < \infty\}. \end{aligned}$$

Pelo *Teorema Fundamental do Cálculo (Lebesgue)* segue

$$F(x) = F(x_1) + \int_{x_1}^{x} F'(u)du$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{F(t)-F(x_1)}{t-x_1} &= \frac{\int_{x_1}^{t} F'(u)du}{t-x_1} \leq \alpha \\ &\leq \beta \leq \frac{\int_{t}^{x_2} F'(v)dv}{x_2-t} = \frac{F(x_2)-F(t)}{x_2-t} \ \clubsuit \end{aligned}$$

4. Prove.

(a) Se $f \in L^1(m)$, então

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \in NBV, \; F \text{ é absolutamente contínua e } F' = f \text{ q.s.}$$

(b) Reciprocamente, se $F \in NBV$ é absolutamente contínua então

$$F' \in L^1(m) \;\text{ e }\; F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt.$$

Solução. Esta á a chamada *Forma Fraca do Teorema Fundamental do Cálculo.* Vide Corolário 3.3 (notas de aula).

5. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente. Mostre que

$$F(b) - F(a) \geq \int_a^b F'(t)dt.$$

Primeira Solução. (Pedro Iván Suárez Navarro)

Indiquemos as integrais de Lebesgue com a notação

$$\int_{\dots}$$

e as integrais de Riemann com a notação

$$\int_{\dots}^{\dots}.$$

Redefinindo $F(x) = F(a)$ se $x \leq a$ e $F(x) = F(b)$ se $x \geq b$, segue que F é crescente e $F \in BV$.

Por propriedades de BV, existe F' q.s. Como F é crescente, temos $F' \geq 0$ q.s. Logo, F é contínua q.s. e mensurável. Temos

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) \text{ q.s.,} \quad \text{onde } F_n(x) = \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}}.$$

As funções $F_{n's}$ são contínuas q.s e positivas (pois F é crescente), limitadas em intervalos compactos e portanto Riemann-integráveis em intervalos compactos. Pelo *Teorema da Caracterização de Lebesgue*, as integrais de Lebesgue e de Riemann das $F_{n's}$ coincidem em intervalos compactos.

Pelo Lema da Fatou e por translações na variável de integração em integrais de Riemann na reta temos

$$\int_{[a,b]} F'(x)dx \leq \liminf \int_{[a,b]} F_n(x)dx = \liminf \left\{ n \int_{[a,b]} F\left[\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right] dx \right\}$$

$$= \liminf \left\{ n \int_a^b F\left[\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right] dx \right\}$$

$$= \liminf \left\{ n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx - \int_a^b F(x)dx \right] \right\}$$

$$= \liminf \left\{ n \left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx \right] \right\}$$

$$\leq \liminf \left\{ n \left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(b)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(a)dx \right] \right\}$$

$$= F(b) - F(a) \clubsuit$$

Vide segunda solução na próxima página.

Segunda solução.

Trocando F por $F(x) - F(a)$, se necessário, podemos supor $F(a) = 0$.

Seja

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a, \\ F(x+) & \text{se } a \leq x < b, \\ F(b) & \text{se } b \leq x. \end{cases}$$

Então, $G \in NBV$. Pelo *Teorema de correspondência entre NBV e medidas de Borel*, existe a medida de Borel μ_G tal que $G(x) = \mu_G((-\infty, x])$ para todo x.

Pelo *Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym (real)* existem $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, uma função m-integrável estendida, e uma medida de Borel λ tais que

$$\mu_G = \lambda + gdm, \text{ com } \lambda \perp m.$$

Pela prova do teorema, λ é positiva.

O *Teorema de regularidade das medidas de Lebesgue-Stieltjes* [Capítulo 1, Teorema 1.6] mostra que μ_G é regular.

Pelo *Teorema - Derivada (relativa) de uma medida regular com respeito a m* [Capítulo 3, Teorema 3.10] temos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mu_G\Big((x, x+h]\Big)}{m\Big((x, x+h]\Big)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = g(x) \ m - \text{q.s. e}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mu_G\Big((x-h, x]\Big)}{m\Big((x-h, x]\Big)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{G(x) - G(x-h)}{h} = g(x) \ m - \text{q.s.}$$

Donde segue $G' = g$ m-q.s. Notemos que $G' = F'$ m.q.s. Segue então

$$\mu_G = \lambda + F'dm, \text{ com } \lambda \perp m.$$

Notemos que $F(a) \leq G(a)$ e $F(b) = G(b)$. Concluímos então que

$$F(b) - F(a) \geq G(b) - G(a) = \mu_G((a, b])$$

$$= \lambda((a, b]) + \int_{(a,b]} F'dm \geq \int_{(a,b]} F'dm = \int_a^b F'dm \clubsuit$$

6. Seja $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável com $f \neq 0$ (isto é, $\|f\|_\infty > 0$). Definamos

$$\varphi(p) = \int_X |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p \qquad (0 < p < \infty) \qquad \text{e} \qquad I = \{p \,:\, \varphi(p) < \infty\} \;.$$

Verifique as propriedades abaixo.

(a) I é um intervalo. Isto é, se $r \in I$ e $s \in I$ e $r < p < s$ então $p \in I$.

(b) φ e $\log \varphi$ são convexas no interior de I e contínuas em I.

(c) Se $r < p < s$, então

$$\|f\|_p \leq \max\left(\|f\|_r\,, \|f\|_s\right) \quad \text{e} \quad L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset L^p(\mu).$$

(d) Se $\|f\|_r < \infty$ para algum $r < \infty$ então,

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \;=\; \|f\|_\infty \;.$$

Solução.

(a) Claramente existem $q \geq 1$ e $q' \geq 1$ tais que

$$p = \frac{r}{q} + \frac{s}{q'} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Pela *desigualdade de Young* e pelas hipóteses encontramos

$$|f|^p = |f|^{\frac{r}{q} + \frac{s}{q'}} = |f|^{\frac{r}{q}} |f|^{\frac{s}{q'}} \leq \frac{|f|^r}{q} + \frac{|f|^s}{q'} \in L^1(\mu).$$

Logo, $p \in I$.

(b) Por (a) segue

$$\varphi(p) = \int |f|^p \, d\mu \leq \frac{\int |f|^r \, d\mu}{q} + \frac{\int |f|^s \, d\mu}{q'} = \frac{\varphi(r)}{q} + \frac{\varphi(s)}{q'}.$$

Quanto à convexidade de $\log \varphi$, pela *desigualdade de Hölder* temos

$$\int |f|^p d\mu \;=\; \int |f|^{\frac{r}{q} + \frac{s}{q'}} \, d\mu \;=\; \int |f|^{\frac{r}{q}} \, |f|^{\frac{s}{q'}} \, d\mu$$

$$\leq \left(\int |f|^r d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |f|^s d\mu \right)^{\frac{1}{q'}} \;=\; \|f\|_r^{\frac{r}{q}} \, \|f\|_s^{\frac{s}{q'}}.$$

Logo,

$$\log \varphi(p) \;=\; \log \left(\int |f|^p d\mu \right) \leq \log \left(\|f\|_r^{\frac{r}{q}} \, \|f\|_s^{\frac{s}{q'}} \right) \;=\; \frac{\log \varphi(r)}{q} \;+\; \frac{\log \varphi(s)}{q'}.$$

(c) Notemos que $\log \varphi(p) = p \, \log \|f\|_p$. Então, por (b) obtemos

$$\begin{aligned} p \, \log \|f\|_p \;&\leq\; \frac{r \log \|f\|_r}{q} \;+\; \frac{s \log \|f\|_s}{q'} \\ &\leq\; \left(\frac{r}{q} \;+\; \frac{s}{q'} \right) \log \max\left(\|f\|_r\,, \|f\|_s\right) \\ &=\; p \log \max(\|f\|_r\,, \|f\|_s). \end{aligned}$$

(d) $\diamond$ **Caso** $\|f\|_\infty = +\infty$.
Então, todo $Y_n = \{x : |f(x)| > n\}$ tem medida estritamente positiva. Notemos que

$$Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \cdots.$$

Para todo $p > 0$ temos

$$\int_X |f(x)|^p \, dx \geq n^p \mu(Y_n) \ \text{ e } \ \|f\|_p \geq n \sqrt[p]{\mu(Y_n)}.$$

Se $\mu(Y_n) = \infty$ para algum n, temos $\|f\|_p = \infty$ para todo p. Senão, temos

$$\liminf \|f\|_p \geq n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\diamond$ **Caso** $0 < \|f\|_\infty < \infty$.
Sejam $r < \infty$, com $\|f\|_r < \infty$, e M tal que $0 < M < \|f\|_\infty$. Então,

$$Y = \{x \mid |f(x)| > M\}$$

tem medida maior que zero e

$$M^p \, \mu(Y) \leq \int_X |f|^p = \|f\|_p^p.$$

Ainda,

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty} \leq 1$$

e para $p \geq r$ temos

$$\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty} \right)^p \leq \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty} \right)^r = \frac{|f(x)|^r}{\|f\|_\infty^r}.$$

Logo, $f \in L^p(X)$. Ainda mais,

$$M \sqrt[p]{\mu(Y)} \ \leq \|f\|_p \ \leq \ \|f\|_\infty \left(\frac{\|f\|_r^r}{\|f\|_\infty^r} \right)^{\frac{1}{p}} \ \text{ e}$$

$$M \ \leq \ \liminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \ \leq \ \limsup_{p \to +\infty} \|f\|_p \ \leq \ \|f\|_\infty \,,$$

sempre que $0 < M < \|f\|_\infty$ e assim segue que

$$\text{existe } \lim \|f\|_p = \|f\|_\infty \clubsuit$$

7. Suponhamos $0 < p < q < \infty$ e (X, μ) um espaço de medida. Então,

(a) $L^p \not\subset L^q$ se e somente se X contém conjuntos com medida estritamente positiva e arbitrariamente pequena.

(b) $L^q \not\subset L^p$ se e somente se X contém conjuntos de medida finita arbitrariamente grande.

(c) **Extra.** O que ocorre se $q = \infty$?

Solução.

Utilizaremos em algumas partes a **Proposição** (provada no Capítulo 4):

$$l_p(\mathbb{N}) \subset \ l_q(\mathbb{N}) \ \text{ e } \ \| \,.\, \|_q \ \leq \ \| \,.\, \|_p.$$

(a)($\Rightarrow$) **Primeira demonstração.**
Seja $f \in L^p \setminus L^q$. Trocando f por $|f|$, se preciso, podemos supor $f \geq 0$.
Seja $G = \{x : f(x) > 1\}$. Temos

$$\int_{G^c} f^p d\mu + \int_G f^p d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int_{G^c} f^q d\mu + \int_G f^q d\mu = \infty.$$

Temos $f^q \leq f^p$ nos pontos de G^c. Donde segue

$$\int_G f^p d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int_G f^q d\mu = \infty.$$

Estas duas comparações implicam $\mu(G) < \infty$ e $\mu(G) = 0$. Ainda, como $f^q|_G$ não é integrável e $\mu(G) < \infty$, segue que f não é limitada. Logo,

$$G_n = \{x : f(x) \geq n\} \ \text{ satisfaz } \ \mu(G_n) > 0.$$

O desejado segue então de

$$0 < n^p \mu(G_n) \leq \int f^p d\mu = \|f\|_p^p < \infty \ \text{ para todo } n.$$

($\Rightarrow$) **Segunda demonstração.**
Seja $\mathcal{M}$ a coleção dos subconjuntos mensuráveis de X.
Mostremos que se $\inf\{\, \mu(A) > 0 \ : \ A \in \mathcal{M}\} = \epsilon > 0$, então $L^p \subset L^q$.
Consideremos uma arbitrária $\varphi \geq 0$ mensurável, simples, e de representação padrão

$$\varphi = \sum a_n \chi_{A_n} \text{ (soma finita)},$$

com $A_{n's}$ dois a dois disjuntos e coeficientes $a_{n's} \in [\,0, +\infty)$ distintos.
O cômputo a seguir vale para $\mu(A_n)$ finito ou não.
Observemos que

$$\frac{p}{q} - 1 < 0 \ \text{ e } \ \mu(A_n)^{-1} \leq \epsilon^{-1} \ \text{ e que definindo } \ \lambda = \epsilon^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}.$$

Pela proposição citada encontramos

$$\|\varphi\|_q = \Big[\sum a_n^q\,\mu(A_n)\Big]^{\frac{1}{q}} \;\leq\; \Big[\sum a_n^p \mu(A_n)^{\frac{p}{q}}\Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big[\sum a_n^p \mu(A_n)\,\mu(A_n)^{-(1-\frac{p}{q})}\Big]^{\frac{1}{p}} \leq \lambda\|\varphi\|_p.$$

Consideremos $f : X \to [0,\infty]$, uma arbitrária função mensurável. Seja então $\varphi_k \geq 0$ uma sequência de funções simples satisfazendo $\varphi_k \nearrow f$. Por acima e pelo teorema da convergência monótona seguem

$$\|\varphi_k\|_q \nearrow \|f\|_q \;\text{ e }\; \|\varphi_k\|_q \leq \lambda\|\varphi_k\|_p \nearrow \lambda\|f\|_p.$$

Logo, $\|f\|_q \leq \lambda\|f\|_p$. Vale a mesma desigualdade para toda f complexa e mensurável, pois as normas de f e $|f|$ são uma a uma iguais.

($\Leftarrow$) Por hipótese, e por indução, segue a existência de

$$X_1 \text{ tal que } 0 < \mu(X_1) < \frac{1}{4} \;\text{ e de }\; X_{n+1} \text{ tal que } 0 < \mu(X_{n+1}) < \frac{\mu(X_n)}{4}.$$

Para todo natural n temos

$$\mu(X_n) < \frac{1}{4^n} \;\text{ e }\; \mu\left(\bigcup_{i\geq n+1} X_i\right) \;\leq\; \sum_{j\geq 1}\frac{\mu(X_n)}{4^j} < \frac{\mu(X_n)}{2}.$$

Consideremos os conjuntos (disjuntos e de medida não zero e finita)

$$B_n = X_n \setminus \left(\bigcup_{i\geq n+1} X_i\right) \quad \text{e} \quad 0 < b_k = \mu(B_k)^{-\frac{1}{q}} < \infty.$$

Definamos

$$g = \sum b_k \chi_{B_k}.$$

Temos que g é mensurável e

$$\|g\|_q^q = \sum b_k^q \mu(B_k) = 1 + 1 + \cdots = \infty \;\text{ e}$$

$$\|g\|_p^p \;=\; \sum\, \mu(B_k)^{-\frac{p}{q}}\mu(B_k) \;=\; \sum \mu(B_k)^{1-\frac{p}{q}},$$

$$\text{com }\; 1 - \frac{p}{q} > 0 \;\text{ e }\; 4^{1-\frac{p}{q}} > 1.$$

Logo,

$$\|g\|_p^p = \sum \mu(B_k)^{1-\frac{p}{q}} \;\leq\; \sum \left(\frac{1}{4^{1-\frac{p}{q}}}\right)^k \;<\; \infty.$$

(b) ($\Rightarrow$) **Primeira demonstração.**

Seja $h \in L^q \setminus L^p$. Se necessário, trocando h por $|h|$ e descartando $h^{-1}(0)$ de X, podemos supor $h > 0$. Seja $P = \{x : 0 < h(x) < 1\}$. Temos

$$\int_P h^q d\mu + \int_{P^c} h^q d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int_P h^p d\mu + \int_{P^c} h^p d\mu = \infty.$$

Temos $h^p \leq h^q$ nos pontos de P^c. Donde segue

$$\int_P h^q d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int_P h^p d\mu = \infty.$$

Como h^p não é integrável em P então temos $\mu(P) = \infty$. Por outro lado, h^q é integrável em P e então, por contradição, é trivial ver que

$$P_n = \left\{ x : \frac{1}{n} \leq h(x) < 1 \right\} \ \text{ satisfaz } \ \mu(P_n) < \infty.$$

O desejado segue então de

$$P_n \nearrow P, \quad \mu(P_n) \longrightarrow \mu(P) = \infty \quad \text{e } \mu(P_n) < \infty.$$

($\Rightarrow$) **Segunda demonstração.**

Mostremos que se $\sup\{\, \mu(C) : \mu(C) < \infty \,\} = M < \infty$ então $L^q \subset L^p$. Consideremos uma arbitrária $\psi \geq 0$ mensurável, simples, e de representação padrão

$$\psi = \sum c_n \chi_{C_n} \text{ (soma finita)},$$

com $C_{n's}$ dois a dois disjuntos e coeficientes $c_{n's} \in [\,0, +\infty)$ distintos. O cômputo abaixo supõe cada $\mu(C_n) < \infty$, mas a conclusão também vale se houver $\mu(C_n) = +\infty$. Seja

$$\eta = M^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \ \text{ e notemos } \ \frac{q}{p} - 1 > 0.$$

Pelo Proposição já citada segue

$$\|\psi\|_p = \Big[\sum c_n^p \, \mu(C_n) \Big]^{\frac{1}{p}} \leq \Big[\sum c_n^q \, \mu(C_n)^{\frac{q}{p}} \Big]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \Big[\sum c_n^q \, \mu(C_n) \, \mu(C_n)^{\frac{q}{p} - 1} \Big]^{\frac{1}{q}} \leq \eta \|\psi\|_q.$$

Consideremos $h : X \to [0, \infty]$, uma arbitrária função mensurável. Seja então $\psi_k \geq 0$ uma sequência de funções simples satisfazendo $\psi_k \nearrow h$. Por acima e pelo teorema da convergência monótona seguem

$$\|\psi_k\|_p \nearrow \|h\|_p \ \text{ e } \ \|\psi_k\|_p \leq \eta \|\psi_k\|_q \nearrow \eta \|h\|_q.$$

Logo, $\|h\|_p \leq \eta \|h\|_q$. Vale a mesma desigualdade para toda h complexa e mensurável, pois as normas de h e $|h|$ são uma a uma iguais.

($\Leftarrow$) Por hipótese, e por indução, existe uma sequência (Y_n) satisfazendo

$$1 < \mu(Y_1) < \infty \quad \text{e} \quad \infty > \mu(Y_{n+1}) > \mu(Y_1) + \cdots + \mu(Y_n) + 1.$$

Definindo

$$D_1 = Y_1 \ \text{ e } \ D_{n+1} = Y_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Y_n$$

temos que os $D_{n's}$ são dois a dois disjuntos, de medida finita, e

$$\mu(D_{n+1}) \geq \mu(Y_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_n\right) \geq \mu(Y_{n+1}) - [\mu(Y_1) + \cdots + \mu(Y_n)] > 1.$$

Consideremos

$$d_n = (n\mu(D_n))^{-\frac{1}{p}} \ \text{ e } \ f = \sum d_n \chi_{D_n}.$$

Encontramos

$$\|f\|_p^p = \sum \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{e} \quad 1 - \frac{q}{p} < 0$$

mas

$$\| f \|_q^q = \sum \frac{1}{n^{\frac{q}{p}}} \mu(D_n)^{1-\frac{q}{p}} \leq \sum \frac{1}{n^{\frac{q}{p}}} < \infty.$$

(c) Devemos analisar o caso $q = \infty$ relativamente aos itens (a) e (b). Respondamos primeiro quanto ao item (b).

(b) É claro que $L^\infty \subset L^p$ se e somente se $\mu(X) < \infty$. Donde segue que

$$L^\infty \not\subset L^p \text{ se e somente se } \mu(X) = +\infty.$$

(a) Mostremos que $L^p \not\subset L^\infty$ se e somente se X contém conjuntos de medida estritamente positiva e arbitrariamente pequena.

($\Rightarrow$) Seja $g \in L^p \setminus L^\infty$. Portanto $G_n = \{\, |g| \geq n \,\}$ é tal que $\mu(G_n) > 0$ (caso contrário, $g \in L^\infty$). Também temos

$$\infty > \|g\|_p^p = \int |g|^p d\mu \geq \int_{G_n} |g|^p d\mu \geq n^p \mu(G_n).$$

O desejado segue das desigualdades

$$0 < \mu(G_n) \leq \frac{\|g\|_p^p}{n^p}, \text{ para todo } n.$$

($\Leftarrow$) Por hipótese, e com uma argumentação análoga a feita no item (a), existe uma sequência (H_n) de conjuntos disjuntos e satisfazendo

$$0 < \mu(H_n)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{n\, n^{\frac{2}{p}}}.$$

Portanto,

$$h = \sum \frac{1}{n^{\frac{2}{p}} \mu(H_n)^{\frac{1}{p}}} \chi_{H_n} \quad \text{é tal que}$$

$$\int h^p \, d\mu \ = \sum \frac{1}{n^2} \ < \ \infty \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n^{\frac{2}{p}} \mu(H_n)^{\frac{1}{p}}} \ > \ n.$$

Donde $h \in L^p \setminus L^\infty$ ♣

8. Seja $p \in [1, \infty)$. Prove as propriedades abaixo.

(a) Se $f_n, f \in L^p$ e $f_n \to f$ q.s., então

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ se e somente se } \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

(b) Se $f_n \to f$ em L^p e $g_n \to g$ q.s., com $\|g_n\|_\infty \leq M < \infty$ para todo n, então

$$f_n g_n \to fg \text{ em } L^p.$$

Solução.

(a) ($\Rightarrow$) A afirmação direta é trivial. Pela desigualdade triangular segue

$$|\, \|f_n\|_p - \|f\|_p \,| \leq \ \|f_n - f\|_p.$$

Q

($\Leftarrow$) Quanto à recíproca, temos

$$|f_n - f|^p \leq (\, |f_n| + |f|\,)^p \leq \ 2^p \max(\, |f_n|^p\,, |f|^p\,) \ \leq \ 2^p(\, |f_n|^p + |f|^p\,).$$

Logo,

$$0 \leq \ 2^p(\, |f_n|^p + |f|^p\,) - |f_n - f|^p.$$

Pelo lema de Fatou segue

$$\int \liminf \Big[2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p\Big] d\mu$$

$$\leq \liminf \int \Big[2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p\Big] d\mu.$$

Portanto, como

$$\int |f_n|^p d\mu \to \int |f|^p d\mu,$$

temos

$$\int 2^{p+1}|f|^p d\mu \ \leq \ \int 2^{p+1}|f|^p d\mu \ + \ \liminf \left(- \int |f_n - f|^p d\mu \right).$$

Donde cancelando as integrais de $2^{p+1}|f|^p$ encontramos

$$0 \leq -\limsup \int |f_n - f|^p d\mu$$

e, finalmente,

$$\lim \int |f_n - f|^p d\mu \to 0$$

A prova de (a) está completa.

(b) **Primeira solução.** (Fernando Studzinski Carvalho).

É fácil ver que $\|g\|_\infty \leq M$ e, é claro,

$$\|f_n g_n - fg\|_p \leq \|(f_n - f)g_n\|_p + \|f(g_n - g)\|_p$$

sendo que

$$\|(f_n - f)g_n\|_p \leq M\|f_n - f\|_p \to 0, \text{ se } n \to +\infty.$$

Quanto à parcela $\|f(g_n - g)\|_p$, temos

$$|f(g_n - g)|^p \leq (2M)^p |f|^p \text{ q.s.}$$

Como $g_n \to g$ q.s, então $|f(g_n - g)|^p \longrightarrow 0$ q.s.

Como $f \in L^p$, então $(2M)^p|f|^p \in L^1$.

Pelo *Teorema da Convergência dominada* segue

$$\int |f(g_n - g)|^p d\mu \longrightarrow 0.$$

Isto é, $\|f(g_n - g)\|_p \longrightarrow 0$ ♣

(b) **Segunda Solução.**

É fácil ver que $\|g\|_\infty \leq M$ e, é claro,

$$\|f_n g_n - fg\|_p \leq \|f_n(g_n - g)\|_p + \|(f_n - f)g\|_p$$

sendo que

$$\|(f_n - f)g\|_p \leq M\|f_n - f\|_p \to 0, \text{ se } n \to +\infty.$$

Quanto à parcela $\|f_n(g_n - g)\|_p$, temos

$$0 \leq (2M)^p|f_n|^p - |f_n|^p|g_n - g|^p.$$

Como $f_n \to f$ em L^p, então $f_n \to f$ em medida (cheque) e portanto existe uma subsequência (f_{n_j}) convergindo a f q.s. Então, aplicando o lema de Fatou segue

$$\int \liminf \Big[(2M)^p|f_{n_j}|^p - |f_{n_j}|^p\, |g_{n_j} - g|^p\Big] d\mu$$

$$\leq \liminf \int \Big[(2M)^p|f_{n_j}|^p - |f_{n_j}|^p|g_{n_j} - g|^p\Big] d\mu.$$

Donde, utilizando as relações

$$g_{n_j} \longrightarrow g \text{ q.s. e } \int |f_{n_j}|^p d\mu \to \int |f|^p d\mu,$$

encontramos

$$0 \leq \liminf \int \Big[- |f_{n_j}|^p|g_{n_j} - g|^p\Big] d\mu.$$

Isto é,

$$\|f_{n_j}(g_{n_j} - g)\|_p \to 0.$$

Analogamente, toda subsequência de $(\, f_n(g_n - g)\,)$ contém uma subsequência convergente a zero em L^p. Portanto (por um argumento usual em espaços méticos, vide Lista 0) segue

$$f_n(g_n - g) \longrightarrow 0 \text{ em } L^p \; ♣$$

9. Fixemos p_1 e p_2 tais que $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$. Ache funções f definidas em $(0, \infty)$, tais que f pertence a $L^p(m)$ se e somente se

(a) $p_1 < p < p_2$ $\qquad$ (b) $p_1 \leq p \leq p_2$ $\qquad$ (c) $p = p_1$.

Solução.

Mostramos as soluções só para $p_2 < \infty$.

(a) Seja

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p_2}}}\,,\ \text{se } 0 < x < 1, \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p_1}}}\,,\ \text{se } x \geq 1.$$

(b) Fixemos $\sigma > 0$. Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^{-\frac{1}{p_2}}(1 + |\log x|)^{-\frac{1}{p_1}}\,,\ \text{se } 0 < x \leq 1$$

$$f(x) = x^{-\frac{1}{p_1}}(1 + |\log x|)^{-(\frac{1}{p_1}+\sigma)}\,,\ \text{se } x \geq 1.$$

(c) Seja

$$f(x) = x^{-\frac{1}{p_1}}(1 + |\log x|)^{-\frac{2}{p_1}}\,,\ 0 < x < \infty\,\clubsuit$$

10. Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medidas σ-finitas e que o núcleo K pertença a $L^2(X \times Y)$. Seja $f \in L^2(Y)$. Então, a integral

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)d\nu(y)$$

converge absolutamente para quase todo $x \in X$. Ainda mais,

$$Tf \in L^2(X) \text{ e } \|Tf\|_2 \leq \|K\|_2 \, \|f\|_2.$$

Solução.

Notemos que K e f são funções mensuráveis e a valores complexos (logo, finitos).

◇ O caso $K \geq 0$ e $f \geq 0$. É claro que $(x, y) \mapsto f(y)$ é $(\mu \times \nu)$-mensurável. Segue então a $(\mu \times \nu)$-mensurabilidade da função produto

$$(x,y) \mapsto K(x,y)f(y).$$

É trivial a ν-mensurabilidade da função $y \mapsto K(x, y)$ para cada x em X. Segue a ν-mensurabilidade da função $y \mapsto K(x, y)f(y)$ para cada x em X. É trivial a ν-mensurabilidade da função $y \mapsto K^2(x, y)$ para cada x em X.

O *Teorema de Tonelli* garante a μ-mensurabilidade da função positiva

$$x \mapsto Tf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)d\nu.$$

A *Desigualdade de Hölder* mostra que

$$Tf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)d\nu \leq \left(\int_Y K^2(x,y)d\nu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Y f^2(y)d\nu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$Tf(x)^2 \leq \left(\int_Y K^2(x,y)d\nu\right) \|f\|_2^2.$$

O *Teorema de Tonelli* garante a μ-mensurabilidade da função

$$x \mapsto \int_Y K^2(x,y)d\nu.$$

Integrando a última desigualdade, o *Teorema de Tonelli* revela que

$$\int_X Tf(x)^2 d\mu \leq \left(\int_X \int_Y |K(x,y)|^2 d\nu d\mu\right) \|f\|_2^2 = \|K\|_2^2 \|f\|_2^2.$$

Donde segue

$$Tf \in L^2(X) \quad \text{e} \quad \|Tf\|_2 \leq \|K\|_2 \|f\|_2.$$

Segue também que $Tf(x)$ é finita para quase todo x. Logo, a integral que define Tf é tal que converge absolutamente para quase todo x.

$\diamond$ **O caso geral.**

Neste caso, decompomos K e f em suas partes real e imaginária e estas em suas partes positivas e negativas. Então, pelo caso anterior e por linearidade segue trivialmente que $Tf \in L^2(X)$. Isto mostra que $Tf(x)$ é finita para quase todo x e que a função Tf é mensurável.

A seguir, utilizando a notação

$$T_K f = Tf$$

observamos que

$$|T_K f| \leq T_{|K|}|f|.$$

Por tal notação e tal desigualdade e então pelo caso anterior segue

$$\|Tf\|_2 \leq \| \, T_{|K|}|f| \, \|_2 \leq \| \, |K| \, \|_2 \, \mathrm{x} \, \| \, |f| \, \|_2 = \|K\|_2 \|f\|_2 \, \clubsuit$$