MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2013

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 9 DE EXERCÍCIOS

Dada uma função $F : X \to Y$ entre dois espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y), dizemos que F é de **Lipschitz** se existe uma constante M (**a constante de Lipschitz**) tal que

$$d_Y\big(F(x_1), F(x_2)\big) \leq M d_X(x_1, x_2), \text{ quaisquer que sejam } \ x_1, x_2 \in X.$$

E1. Geométricamente, $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ é **convexa** se restrita a todo $[x_1, x_2]$, seu gráfico está abaixo do segmento (corda) unindo $\big(x_1, \varphi(x_1)\big)$ a $\big(x_2, \varphi(x_2)\big)$. Para simplificar, fixamos um arbitrário $[x_1, x_2] \subset (a, b)$.

(a) São equivalentes as seguintes definições de convexidade para φ:

(i) $\varphi(x) \leq T(x) = \dfrac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \varphi(x_1)$, para todo $x \in [x_1, x_2]$.

(ii) $\varphi\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

(iii) $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(x_1)}{t - x_1} \leq \dfrac{\varphi(x_2) - \varphi(t)}{x_2 - t}$ para todo $x_1 < t < x_2$.

(iv) $\varphi\left(\dfrac{x_1}{p_1} + \dfrac{x_2}{p_2}\right) \leq \dfrac{\varphi(x_1)}{p_1} + \dfrac{\varphi(x_2)}{p_2}$ para todos $p_1, p_2 > 1$ com $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} = 1$.

Sugestão: (ii) (a definição usual) é trivialmente equivalente às demais.

(b) φ é convexa em (a, b) se e somente se

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(x_1)}{s - x_1} \leq \frac{\varphi(x_2) - \varphi(t)}{x_2 - t}, \quad \text{se } s, t \in [x_1, x_2] \text{ com } s \neq x_1 \text{ e } t \neq x_2.$$

Leitura: a corda sobre $[t, x_2]$ têm maior inclinação que a sobre $[x_1, s]$.

(c) **Desigualdade (discreta) de Jensen.** Seja φ convexa em (a, b) e as sequências $\{x_j\}_1^n \subset (a, b)$ e $\{p_j\}_1^n$, com $p_j \geq 0$ e $\Sigma p_j > 0$. Temos,

$$\varphi\left(\frac{\Sigma p_j x_j}{\Sigma p_j}\right) \leq \frac{\Sigma p_j \varphi(x_j)}{\Sigma p_j}.$$

(d) Se φ é diferenciável então φ é convexa se e somente se φ' é crescente.
Dica: (a)(iii).

(e) Mostre que φ é convexa em (a,b) se e somente se, φ é contínua e

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2},$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in (a,b)$.

(f) Seja $\Gamma = \{\varphi : (a,b) \to \mathbb{R},\ \text{tal que}\ \varphi\ \text{é convexa}\}$. Então, Γ é um **cone** (algebricamente fechado para soma e multiplicação por escalar positivo) fechado na topologia da convergência simples. O supremo, se finito, de uma família de funções convexas em (a,b) é uma função convexa. O mínimo de duas funções convexas não é necessariamente convexa.

(g) Seja φ duas vezes diferenciável. Então φ é convexa se e só se $\varphi'' \geq 0$.

(h) Verifique se são ou não são convexas as seguintes funções:

(i) x^p, onde $p \geq 1$ e $x \in (0,+\infty)$

(ii) e^{ax}, onde $x \in (-\infty,+\infty)$

(iii) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, onde $x \in (0,+\infty)$.

(i) Sejam $a,b \geq 0$ e $p,p' > 1$, com $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Mostre que vale a igualdade se e somente se $a^p = b^{p'}$.

(j) Se φ é convexa em (a,b) e ψ é convexa e não decrescente em $\varphi\Big((a,b)\Big)$,

$$\psi \circ \varphi \quad \text{é convexa em } (a,b).$$

(k) Se $\varphi > 0$ e $\log \varphi$ é convexa então φ é convexa.

(l) Se φ é convexa em (a,b),

$$\varphi \quad \text{é de Lipschitz em subintervalos compactos.}$$

Sugestão: Procure um argumento unificado para (d) e a “ida” de (e).

E2. **(Desigualdade Integral (simples) de Jensen).** Consideremos duas funções $f, p : K \to (a,b)$, com $K \subset \mathbb{R}$ e compacto e $(a,b) \subset \mathbb{R}$, com p e fp Riemann integráveis, $p \geq 0$ e $\int_K p > 0$. Se φ é convexa em (a,b) então,

$$\varphi\left(\frac{\int_K fp}{\int_K p}\right) \leq \frac{\int_K \varphi(f)p}{\int_K p} .$$

Dica: Fixo $t_0 \in (a,b)$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\varphi(t) - \varphi(t_0) \geq \alpha(t - t_0)$, $\forall t$. Faça

$$t_0 = \frac{\int_K fp}{\int_K p} \quad \text{e} \quad t = f(x)$$

e multiplique por p. Observe que $y(t) = \varphi(t_0) + \alpha(t - t_0)$ é uma reta suporte de gráfico(φ) [o gráfico de φ] no ponto $(t_0, \varphi(t_0))$.

Interpretação fisíca-geométrica: Como $\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2$ é o centróide das massas λ e $(1-\lambda)$ localizadas em x_1 e x_2, a função φ é convexa se seu valor no centróide é menor, ou igual, que a média ponderada dos valores $\varphi(x_1)$ e $\varphi(x_2)$. A desigualdade integral de Jensen generaliza este fato: Se μ é a distribuição de massa, $\mu(E) = \int_E fp$, então $\frac{\int_K fp}{\int_K p}$ é o centróide desta massa e $\frac{\int_K \varphi(f)p}{\int_K p} = \int \varphi(x) d\mu$ é a média ponderada de φ.

E3. Seja $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ convexa. Mostre que suas derivadas laterais são finitas em todo ponto e, ainda,

(a) $D^+\varphi(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \leq D^-\varphi(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}, \forall x.$

(b) $D^+\varphi$ e $D^-\varphi$ são monótonas crescentes.

(c) $D^+\varphi(x) \ \leq D^-\varphi(y)$, se $a < x < y < b$.

(d) $D^+\varphi$ e $D^-\varphi$ são contínuas q.s. e, nos pontos de continuidade,

$$D^+\varphi = D^-\varphi = \varphi'.$$

(e) φ é de Lipschitz em subintervalos compactos.

SEÇÃO 3.5, p. 107-109

27. Abaixo, F e G designam funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$.

    (a) Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente e limitada, então $F \in BV$. Ainda,

    $$T_F(x) = F(x) - F(-\infty).$$

    (b) BV é um espaço vetorial complexo.

    (c) Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é diferenciável e F' é limitada, então $F \in BV([a,b])$ onde supomos $-\infty < a < b < +\infty$.

    (d) Se $F(x) = \sin x$, então $F \in BV([a,b])$, para $-\infty < a < b < \infty$, e $F \notin BV$.

    (e) A função

    $$F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0, \\ 0, \text{ se } x = 0, \end{cases}$$

    é contínua mas não pertence a $BV([0,b])$ ou a $BV([a,0])$, se $a < 0 < b$.

28. Sejam $F \in \text{NBV}$ e $G(x) = |\mu_F|\big((-\infty, x]\big)$. Prove que $|\mu_F| = \mu_{T_F}$, verificando a identidade $G = T_F$. Como sugestão, use o seguinte roteiro:

    (a) $T_F \leq G$.

    (b) $|\mu_F(E)| \leq \mu_{T_F}(E)$ se E for um intervalo e, portanto, se E for um boreliano.

    (c) $|\mu_F| \leq \mu_{T_F}$, portanto $G \leq T_F$.

29. Se $F \in \text{NBV}$ assume valores reais, então

    $$\mu_F^+ = \mu_P \quad \text{e} \quad \mu_F^- = \mu_N,$$

    onde P e N são as variações positiva e negativa de F.

30. Construa uma função crescente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontinuidades somente em $\mathbb{Q}$.

31. Sejam $F(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ e $G(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ para $x \neq 0$, e $F(0) = 0 = G(0)$.

    F e G são diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

    $F \in \mathrm{BV}([-1,1])$, mas $G \notin \mathrm{BV}([-1,1])$.

32. Se $F_1, F_2, \dots, F \in \mathrm{NBV}$ e $F_n \to F$ pontualmente, então $T_F \leq \liminf T_{F_n}$.

33. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente, então

$$f(b) - f(a) \geq \int_a^b f'(t)dt.$$

36. Seja $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua crescente, $G(a) = c$ e $G(b) = d$.

    (a) Se $E \subset [c,d]$ é um boreliano, então

$$m(E) = \mu_G\big((G^{-1}(E)\big).$$

    Dica: considere primeiro o caso em que E é um intervalo.

    (b) Se f é Borel-mensurável e integrável em $[c,d]$, então

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f\big(G(x)\big)dG(x).$$

    Em particular, $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f\big(G(x)\big)G'(x)dx$ se G for absolutamente contínua.

    (c) O item (b) não vale, em geral, se G for apenas contínua pela direita.

37. Seja $F : [a,b] \to \mathbb{C}$. São equivalentes:

    (a) F é Lipschitziana com constante de Lipschitz M.

    (b) F é absolutamente contínua e $|F'| \leq M$ q.s.

38. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Considere o gráfico de f como um subconjunto de $\mathbb{C}$. Isto é, identifique $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. O comprimento L de tal gráfico é, por definição, o supremo dos comprimentos de todas as poligonais inscritas no mesmo.

    (a) Seja $F(t) = t + if(t)$. Então L é a variação total de F em $[a,b]$.

    (b) Se f for absolutamente contínua, então

$$L = \int_a^b [1 + f'(t)^2]^{1/2} dt.$$

42. Uma função $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, com $-\infty \le a < b \le \infty$, é dita *convexa* se, quaisquer que sejam $s, t \in (a,b)$ temos

$$F(\lambda s + (1-\lambda)t) \le \lambda F(s) + (1-\lambda)F(t), \quad \text{para todo } \lambda \in (0,1).$$

Geometricamente, isto significa que quaisquer que sejam $s, t \in (a,b)$, o gráfico de F fica abaixo do segmento que passa por $(s, F(s))$ e $(t, F(t))$.

(a) F é convexa se e somente se quaisquer que sejam $s, t, s', t' \in (a,b)$ tais que $s \le s' < t'$ e $s < t \le t'$ temos

$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \le \frac{F(t') - F(s')}{t' - s'}.$$

(b) F é convexa se e somente se F é absolutamente contínua em todo subintervalo compacto de (a,b) e F' é crescente (no conjunto onde estiver definida).

(c) Se F for convexa e $t_0 \in (a,b)$, então existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in (a,b))$ temos

$$F(t) - F(t_0) \ge \beta(t - t_0).$$

(d) **(Desigualdade de Jensen)**. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, uma função $g : X \to (a,b)$ em $Ł^1(\mu)$, e uma função F convexa em (a,b). Então,

$$F\Big(\int g d\mu\Big) \le \int F \circ g d\mu.$$

Sugestão: Ponha $t_0 = \int g d\mu$ e $t = g(x)$ no item anterior e integre.