

**MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2013**

**Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

**LISTA 8 DE EXERCÍCIOS**

E1. Sejam  $\nu$ ,  $\nu_1$  e  $\nu_2$  medidas complexas e  $\mu$  uma medida positiva sobre  $(X, \mathcal{M})$ .

- (a)  $\nu$  é concentrada em  $A$  se e somente se  $|\nu|$  também.
- (b) Se  $\nu_1 \perp \nu_2$  então  $|\nu_1| \perp |\nu_2|$ .
- (c) Se  $\nu_1 \perp \mu$  e  $\nu_2 \perp \mu$  então  $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$ .
- (d) Se  $\nu_1 \ll \mu$  e  $\nu_2 \ll \mu$ , então  $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$ .
- (e) Se  $\nu \ll \mu$  então  $|\nu| \ll \mu$ .
- (f) Se  $\nu_1 \ll \mu$  e  $\nu_2 \perp \mu$  então  $\nu_1 \perp \nu_2$ .
- (g) Se  $\nu \ll \mu$  e  $\nu \perp \mu$  então  $\nu = 0$ .
- (h) Se  $\nu = f d\mu$ , com  $f$   $\mu$ -integrável estendida então

$$\nu_r = (\operatorname{Re} f) d\mu \quad \text{e} \quad \nu_i = (\operatorname{Im} f) d\mu.$$

**SEÇÃO 3.3, p. 94**

19. Sejam  $\nu$  e  $\lambda$  medidas complexas e  $\mu$  uma medida positiva. Então,

- (a)  $\nu \perp \lambda$  se e somente se  $|\nu| \perp |\lambda|$ .
- (b)  $\nu \ll \mu$  se e somente se  $|\nu| \ll \mu$ .

20. Se  $\nu$  é uma medida complexa em  $(X, \mathcal{M})$  e  $\nu(X) = |\nu|(X)$ , então  $\nu = |\nu|$ .

21. Seja  $\nu$  uma medida complexa sobre  $(X, \mathcal{M})$ . Todos os conjuntos a seguir pertencem a  $\mathcal{M}$ . Defina:

$$\mu_1(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N} \text{ e } E = \bigcup_{j=1}^n E_j \right\}$$

$$\mu_2(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| : E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}$$

$$\mu_3(E) = \sup \left\{ \left| \int_E f d\nu \right| : |f| \leq 1 \right\}.$$

Então  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = |\nu|$ .

**Sugestão.** Primeiro mostre que  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ . Para verificar que  $\mu_3 = |\nu|$ , tome  $f = \frac{d\nu}{d|\nu|}$  e aplique a Proposição 3.4 (notas de aulas), ou Proposição 3.13 no livro texto. Para verificar que  $\mu_3 \leq \mu_1$ , aproxime  $f$  por funções simples.

### SEÇÃO 3.4, p. 100

23. Uma variante útil da função maximal de Hardy-Littlewood é:

$$H^* f(x) = \sup \left\{ \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy : B \text{ é uma bola e } x \in B \right\}.$$

Mostre que  $Hf \leq H^* f \leq 2^n Hf$ .

24. Se  $f \in L^1_{\text{loc}}$  e  $f$  é contínua em  $x$ , então  $x$  está no conjunto de Lebesgue de  $f$ .

25. Seja  $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ . A **densidade**  $D_E(x)$  de  $E$  em  $x$  é definida por:

$$D_E(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(E \cap B(x; r))}{m(B(x; r))},$$

sempre que o limite existir.

- (a) Mostre que  $D_E(x) = 1$  q.s. em  $E$  e  $D_E(x) = 0$  q.s. em  $E^c$ .  
 (b) Dê exemplos de  $E$  e  $x$  tais que  $D_E(x) \in (0, 1)$  ou  $D_E(x)$  não existe.