MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2013
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 6 DE EXERCÍCIOS

SEÇÃO 2.7, pp. 80-81

E1. Enuncie o Teorema do Valor Médio para funções em uma variável real. Lembra de como prová-lo?

E2. (**Desigualdade do Valor Médio**). Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função derivável (i.e., uma curva derivável em $\mathbb{R}^2$) tal que $M = \sup\{\,|F'(t)| : t \in \mathbb{R}\} < \infty$. Mostre que quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{R}$, temos

$$|F(b) - F(a)| \leq M|b - a|.$$

62. A medida σ em S^{n-1} é invariante por rotações.

64. Determine os valores reais a e b tais que a função

$$f(x) = |x|^a \Big| \log|x| \Big|^b$$

é integrável sobre os conjuntos abaixo.

(A) $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \frac{1}{2}\}$.

(B) $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\}$.

VIDE VERSO

65. Defina $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $G(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = (x_1, \dots, x_n)$ onde

$$x_1 = r\cos\phi_1,\ \ x_2 = r\sin\phi_1\cos\phi_2,\ \ x_3 = r\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3, \dots$$

$$x_{n-1} r\sin\phi_1 \cdots \sin\phi_{n-2}\cos\theta, \quad x_n = r\sin\phi_1\cdots\sin\phi_{n-2}\sin\theta.$$

(a) G aplica $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ sobrejetivamente e $|G(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)| = |r|$.

(b) $\det JG(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = r^{n-1}\sin^{n-2}\phi_1 \sin^{n-3}\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2}$.

(c) Seja $\Omega = (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$. Então, a restrição

$$G|_\Omega : \Omega \to G(\Omega)$$

é um difeomorfismo e $m[\mathbb{R}^n \setminus G(\Omega)] = 0$.

(d) Seja $F(\phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = G(1, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)$ e $\Omega' = (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$. Então a função

$$(F|_{\Omega'})^{-1}$$

define um sistema de coordenadas sobre S^{n-1} exceto em um conjunto σ-nulo e a medida de σ é expressa neste sistema de coordenadas por

$$d\sigma(\phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = \sin^{n-2}\phi_1 \sin^{n-3}\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2} d\phi_1 \cdots d\phi_{n-2} d\theta.$$