MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 4 DE EXERCÍCIOS

Resolva, no mínimo, os nove exercícios marcados com asterisco.

SEÇÃO 2.1

10* Prove a Proposição 2.6 (nas notas); i.e., Proposition 2.11 em Folland p. 47.

SEÇÃO 2.3

18. O Lema de Fatou continua válido se a hipótese $f_n \in L^+$ for substituída por

"f_n é mensurável e $f_n \geq -g$, onde $g \in L^+ \cap L^1$, para todo n"

(verifique). Qual o análogo do Lema de Fatou para funções negativas?

20* (Teorema da Convergência Dominada generalizado) Consideremos funções $f_{n's}$, $g_{n's}$, f e g, todas em L^1. Suponhamos que

$$f_n \xrightarrow{q.s.} f, \quad g_n \xrightarrow{q.s.} g, \quad |f_n| \leq g_n \quad \text{e} \quad \int g_n \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int g \, d\mu.$$

Mostre que

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$

Sugestão: Reveja a prova do teorema da convergência dominada.

21* Sejam $f_{n's}, f \in L^1$ tais que $f_n \xrightarrow{q.s.} f$. Então, $\int |f_n - f| \, d\mu \to 0$ se e só se

$$\int |f_n| \, d\mu \to \int |f| \, d\mu.$$

Sugestão: Utilize o Exercício 20.

22. Seja μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Interprete o Lema de Fatou, o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada em termos de proposições sobre séries numéricas infinitas.

26* Se $f \in L^1(m)$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$

então F é contínua.

29* (a) Mostre

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!,$$

derivando a identidade

$$\int_0^\infty e^{-tx} dx = \frac{1}{t}.$$

(b) Mostre

$$\int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!},$$

derivando

$$\int_{-\infty}^\infty \exp^{-tx^2}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

31* Mostre as fórmulas abaixo expandindo parte do integrando numa série infinita e justificando a integração termo a termo. O Exercício 29 pode ser útil.

(a) Para $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos ax\, dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}.$$

(b) Para $a > -1$,

$$\int_0^1 \frac{x^a \log x}{1-x}\, dx = -\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(a+k)^2}.$$

(c) Para $a > 1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{e^x - 1}\, dx = \Gamma(a)\zeta(a), \quad \text{onde} \quad \zeta(a) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}.$$

SEÇÃO 2.3

Notação: se $f \to f$ em medida, escrevemos também $f_n \xrightarrow{m} f$.

33* Se $f_n \geq 0$ e $f_n \to f$ em medida, então

$$\int f \leq \liminf \int f_n.$$

34* Suponha $|f_n| \le g \in Ł^1$ e $f_n \to f$ em medida. Então,

(a) $\int f = \lim \int f_n$.

(b) $f_n \to f$ em $Ł^1$.

38* Suponha que $f_n \xrightarrow{m} f$ e $g_n \xrightarrow{m} g$. Valem as propriedades abaixo.

(a) $f_n + g_n \xrightarrow{m} f + g$.

(b) $f_n g_n \xrightarrow{m} fg$ se $\mu(X) < \infty$, mas não necessariamente se $\mu(X) = \infty$.

40. No teorema de Egoroff-Severini, a hipótese "$\mu(X) < \infty$" pode ser substituída por "$|f_n| \le g$, onde $g \in Ł^1$".