MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 2 de Exercícios - Seção 1.4, p. 32

Resolva, no mínimo, os oito exercícios marcados com asterisco.

Definição. *Uma* pré-medida *é uma medida numa álgebra.*

Notação. μ^* indica uma medida exterior.

18. Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra, $\mathcal{A}_\sigma$ a coleção das uniões contáveis de conjuntos em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ a coleção das intersecções contáveis de conjuntos em $\mathcal{A}_\sigma$. Sejam μ_0 uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e μ^* a medida exterior induzida por μ_0.

    (a) Dados $E \subset X$ e $\epsilon > 0$, existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ e $\mu^*(A) \le \mu^*(E) + \epsilon$.

    (b) Se $\mu^*(E) < \infty$, então E é μ^*-mensurável se e somente se existe algum $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset B$ e $\mu^*(B \setminus E) = 0$.

    (c) Se μ_0 é σ-finita, a restrição $\mu^*(E) < \infty$ no item anterior é supérflua.

19* Seja μ^* uma medida exterior em X induzida por uma pré-medida finita μ_0. Dado $E \subset X$, defina a **medida interior** de E por

$$\mu_*(E) := \mu_0(X) - \mu^*(E^c).$$

Verifique que E é μ^*-mensurável se e somente se $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

20* Sejam μ^* uma medida exterior sobre X e $\mathcal{M}^*$ a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis. Sejam $\nu = \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ e ν^* a medida exterior induzida por ν.

    (a) Dado $E \subset X$, temos $\mu^*(E) \le \nu^*(E)$, valendo a igualdade se e somente se existir $A \in \mathcal{M}^*$ tal que $E \subset A$ e $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

    (b) Se μ^* for induzida por uma pré-medida, então

$$\mu^* = \nu^*.$$

    Dica: 18(a).

    (c) Se $X = \{0, 1\}$, existe uma medida exterior μ^* sobre X tal que $\mu^* \ne \nu^*$.

21. Consideremos μ^* induzida por uma pré-medida e μ a restrição de μ^* aos conjuntos μ^*-mensuráveis. Então, μ é **saturada** (v. exerc. 16, seção 1.3).

22* Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, μ^* induzida por μ, $\mathcal{M}^*$ a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis e $\overline{\mu}$ a restrição de μ^* a $\mathcal{M}^*$.

(a) Se μ é σ-finita então $\overline{\mu}$ é o completamento de μ.

(b) Em geral, $\overline{\mu}$ é a saturação do completamento de μ.

23. Seja $\mathcal{A}$ a coleção de todas as uniões finitas de conjuntos da forma

$$(a, b] \cap \mathbb{Q}, \text{ com } -\infty \leq a < b \leq \infty.$$

Verifique as afirmações abaixo.

(a) $\mathcal{A}$ é uma álgebra sobre $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

(b) A σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

(c) Defina $\mu_0(\varnothing) = 0$ e $\mu_0(A) = \infty$ se $\varnothing \neq A \in \mathcal{A}$. Então, μ_0 é uma pré-medida e existe mais de uma medida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ que estende μ_0.

24. Sejam μ uma medida finita em $(X, \mathcal{M})$ e μ^* induzida por μ. Seja E um subconjunto arbitrário de X tal que $\mu^*(E) = \mu^*(X)$.

(a) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap E = B \cap E$, então $\mu(A) = \mu(B)$.

(b) Considere

$$\mathcal{M}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}.$$

Defina $\nu : \mathcal{M}_E \to [0, \infty]$ por

$$\nu(A \cap E) = \mu(A)$$

(o que é uma boa definição, pelo item anterior). Então $\mathcal{M}_E$ é uma σ-álgebra sobre E e ν é uma medida sobre $\mathcal{M}_E$.

Seção 1.5, p. 39-40

Seja $m : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ a medida de Lebesgue (i.e. a medida de Lebesgue-Stieltjes induzida pela função identidade), onde $\mathcal{L}$ designa a coleção dos conjuntos Lebesgue mensuráveis.

E1. Complete a prova do Teorema 1.9, nota de aula p. 26-27. Introduzamos a notação: dados $E \subset \mathbb{R}$ e $h, t \in \mathbb{R}$, (h de homotetia e t de translação) sejam

$$hE = \{hx : x \in E\} \quad \text{e} \quad E + t = \{x + t : x \in E\}.$$

(a) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é invariante por homotetias e translações.

(b) Dados $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $h, t \in \mathbb{R}$, sejam $m_t(E) = m(E + t)$ e $m^h(E) = m(hE)$. Então, m_t e m^h são medidas que coincidem com m e $|h|m$ sobre as uniões finitas de intervalos quaisquer, as quais formam uma álgebra.

(c) A classe $\mathcal{N}$ dos conjuntos de Lebesgue de medida nula é invariante por translações e homotetias.

(d) A classe $\mathcal{L}$ dos conjuntos Lebesgue mensuráveis é invariante por translações e homotetias.

(e) Para todo $E \in \mathcal{L}$, temos $m_t(E) = m(E)$ e $m^h(E) = |h|m(E)$.

26. Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\mu, \mu)$ um espaço de medida de Lebesgue-Stieltjes e $E \in \mathcal{M}_\mu$ tal que $\mu(E) < \infty$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe uma reunião finita disjunta de intervalos abertos, $A \subset \mathbb{R}$, tal que $\mu(E \Delta A) < \epsilon$.

E2. Todo $x \in [0, 1]$ admite uma representação na base 3 da forma

$$0.x_1 x_2 \cdots.$$

Isto é, existe uma sequência $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset \{0, 1, 2\}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}.$$

Tal representação diz-se **finita** ou **eventualmente nula** se existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n > N$. Caso contrário, diz-se que a representação é **infinita**.

Prove as afirmações abaixo

(a) $x \in [0,1]$ admite uma representação finita $x = 0.x_1x_2\cdots$ na base 3 se e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{0,\ldots,3^n - 1\}$ tais que $x = k3^{-n}$.

(b) Todo $x \in (0,1]$ admite uma única representação infinita, na base 3, na forma $x = 0.x_1x_2\cdots$.

Com a notação da questão anterior, associemos a cada $x \in [0,1]$ uma representação na base 3, $x = 0.x_1x_2\cdots$, da seguinte forma:

- se x não admitir representação finita, associemos a x a única representação possível;
- se x admitir representação finita $0.x_1\cdots x_N0\cdots$, com $x_N \neq 0$ e $x_n = 0$ para $n > N$: se $x_N = 2$, associemos a x a referida representação; se x_N for 1, associemos a x a representação infinita, i.e. $0.x_1\cdots x_{N-1}0222\cdots$.

Chamemos tais representações de **normalizadas**.

E3* Seja C o conjunto ternário de Cantor (vide Lista 0), constituído pelos pontos de $[0,1]$ em cuja representação normalizada não aparece o dígito 1. Verifique:

(a) É bem definida a aplicação $f : C \to [0,1]$ tal que, se a representação ternária normalizada de x é dada por $0.x_1x_2\cdots$, então $f(x) \in [0,1]$ tem representação binária dada por $0.y_1y_2\cdots$, onde temos $y_n = x_n/2$ para todo n. A função f é sobrejetiva e $\operatorname{card}(C) = \mathfrak{c}$. Além disso, f é crescente e, dados $x, y \in [0,1]$ com $x < y$, então $f(x) = f(y)$ se somente se (x,y) é um dos intervalos que se removeu em alguma etapa da construção do conjunto de Cantor .

(b) Mantendo a notação, defina $F : [0,1] \to [0,1]$ por $F|_C = f$ e, em cada intervalo (x,y) que se removeu em alguma etapa da construção do conjunto de Cantor, F é constante e igual a $f(x) = f(y)$. Mostre que F é crescente e contínua. F é a **função de Cantor-Lebesgue**.

E4. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{L}$, respectivamente, as σ-álgebras de Borel e de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Mostre que $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \mathfrak{c}$ e $\operatorname{card}(\mathcal{L}) = 2^{\mathfrak{c}}$. Conclua que $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$.
Sugestão. *Proposição 1.23 em Folland.*

28* Seja μ_F a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua pela direita. Verifique:

$$\begin{cases} \mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-) \\ \mu_F([a,b)) = F(b-) - F(a-) \\ \mu_F([a,b]) = F(b) - F(a-) \\ \mu_F((a,b)) = F(b-) - F(a). \end{cases}$$

29* Seja E um conjunto Lebegue mensurável

(a) Se $E \subset N$, com N o conjunto não mensurável em 1.1, então $m(E) = 0$.

(b) Se $m(E) > 0$, então E contém um conjunto não mensurável.

Sugestão. Assuma $E \subset [0,1]$. Com a notação em 1.1, $E = \bigcup_r (E \cap N_r)$.

30. Se $E \in \mathcal{L}$ e $m(E) > 0$, então para qualquer $\alpha < 1$ existe um intervalo aberto I tal que $m(E \cap I) > \alpha m(I)$.

31* Se $E \in \mathcal{L}$ e $m(E) > 0$, então o conjunto $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ contém um intervalo centrado em 0.

Sugestão. Se I é como no exercício 30, com $\alpha > 3/4$, então $E - E$ contém o intervalo

$$\left(-\frac{m(I)}{2}, +\frac{m(I)}{2}\right).$$

33* Existe um conjunto de Borel $A \subset [0,1]$ tal que

$$0 < m(A \cap I) < m(I) \text{ para todo subintervalo } I.$$

Sugestão. Todo sub-intervalo de $[0,1]$ contém um conjunto de Cantor de medida positiva (vide notas de aula).