MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2013
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 12 DE EXERCÍCIOS

Seção 6.2, p. 191-192

18. A reflexividade de L^2 segue da teoria de espaços de Hilbert. Tal fato pode ser usado para demonstrar o teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym através do seguinte argumento, devido a von Neumann. Sejam μ, ν medidas positivas finitas em $(X, \mathcal{M})$ (o caso σ-finito é consequência do caso em que a medida é finita, pelo mesmo argumento utilizado no capítulo 3), e seja

$$\lambda = \mu + \nu.$$

   (a) O funcional
   $$f \mapsto \int f d\nu$$
   é linear contínuo em $L^2(\lambda)$. O teorema de representação de Riesz garante existir alguma $g \in Ł^2(\lambda)$ tal que para toda $f \in L^2(\lambda)$ temos
   $$\int f d\nu = \int f g d\lambda.$$
   Equivalentemente, para toda $f \in L^2(\lambda)$ temos $\int f(1-g)d\nu = \int f g d\mu$.

   (b) $0 \leq g \leq 1$ λ-q.s. e então podemos assumir $0 \leq g \leq 1$ em todo ponto.

   (c) Sejam $A = \{x : g(x) < 1\}$ e $B = \{x : g(x) = 1\}$. Defina
   $$\nu_a(E) = \nu(A \cap E) \ \text{ e } \ \nu_s(E) = \nu(B \cap E).$$
   Então, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu_a \ll \mu$. De fato, $d\nu_a = g(1-g)^{-1}\chi_A d\mu$.

Seção 6.3, p. 196-197

27. **(Desigualdade de Hilbert).** O operador
$$Tf(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y} dy$$
satisfaz $\|Tf\|_p \leq C_p \|f\|_p$, onde $p \in (1, \infty)$ e
$$C_p = \int_0^\infty \frac{dx}{x^{\frac{1}{p}}(x+1)}.$$

32. Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medidas σ-finitas e o núcleo $K \in L^2(X \times Y)$. Seja $f \in L^2(Y)$. Então, a integral

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y) d\nu(y)$$

converge absolutamente para quase todo $x \in X$. Ainda mais,

$$Tf \in L^2(X) \quad \text{e} \quad \|Tf\|_2 \le \|K\|_2 \, \|f\|_2\|.$$

SEÇÃO 7.1, p. 215–216

1. Sejam X um espaço HLC, um conjunto fechado $Y \subset X$ (portanto, Y é HLC com a topologia relativa) e μ uma medida de Radon em Y. Mostre que

$$I(f) = \int (f|_Y) \, d\mu$$

define um funcional linear positivo em $C_c(X)$ e que a medida de Radon ν induzida por este funcional satisfaz

$$\nu(E) = \mu(E \cap Y).$$

2. Sejam X um espaço HLC e μ uma medida de Radon em X.

   (a) Seja $\mathcal{N}$ a união dos abertos $O \subset X$ tais que $\mu(O) = 0$. Então, $\mathcal{N}$ é aberto e $\mu(\mathcal{N}) = 0$. Chamamos $X \smallsetminus \mathcal{N}$ de **suporte** de μ e escrevemos

$$\operatorname{supp}(\mu) = X \smallsetminus \mathcal{N}.$$

   (b) Um ponto $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ se e somente se

$$\int f \, d\mu > 0, \quad \text{para toda } f \in C_c\big(X, [0,1]\big) \text{ tal que } f(x) > 0.$$