MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 11 DE EXERCÍCIOS

E1. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ e mensurável e $p \in [1, \infty]$. Se $f \notin L^p(E)$, então existe $g \in L^{p'}(E)$, onde p e p' são expoentes conjugados, tal que $fg \notin L^1(E)$.

Dica: Construa $g = \sum a_k g_k$ para a_k e g_k apropriados e tal que

$$\int_E f g_k dm \to +\infty.$$

E2. Sejam (X, μ) um espaço de medida e $p \in [1, \infty)$. Suponha que $f_n \xrightarrow{L^p} f$ e que $g_n \xrightarrow{q.s.} g$, com $\|g_n\|_\infty \leq M < \infty$, para todo n. Mostre que

$$f_n g_n \xrightarrow{L^p} fg.$$

SEÇÃO 6.1, p. 186-188

1. Verifique quando vale a igualdade na desigualdade de Minkowsky.

Atenção: a resposta é diferente se $p = 1$ e $1 < p < \infty$.

E3. Suponha $f_n \xrightarrow{q.s.} f$, com $f_n, f \in L^p$ e $1 < p < \infty$. Se $\|f_n\|_p \leq M < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\int f_n g \longrightarrow \int fg \text{ para toda } g \in L^{p'}, \text{ onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

E4. **(Continuidade em L^p)** Consideremos $p \in (0, \infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\lim_{|h| \to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0.$$

E5. Seja $p \in (0, \infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^p dy = 0 \text{ q.s.}$$

Notação: O símbolo $Q \searrow x$ indica uma família decrescente de cubos não degenerados $Q's$ centrados em x que "encolhe" a x $[Q \searrow x]$. Isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe um cubo na família com diâmetro menor que ϵ.

CONVOLUÇÃO

- Definamos **convolução**. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Borel-mensuráveis (ou, mais geralmente, Lebesgue-mensuráveis, mas suponha Borel-mensuráveis para simplificar), de modo que é Borel-mensurável a aplicação $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$. Definimos $f * g$ por:

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\, dm(y),$$

para todo x tal que $f(x - \cdot)g(\cdot)$ seja quase-integrável.

E6 **Desigualdade de Young.** Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$ e, dado $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n, m)$, então a convolução $f*g$ está definida m-q.s., pertence a $L^p(\mathbb{R}^n, m)$ e $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Sugestão: Use uma das duas questões anteriores.

E7. Sejam $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$. Então $f * g = g * f \in L^1$ e vale a propriedade associativa $(f * g) * h = f * (g * h) \in L^1$. Portanto, da questão anterior segue que, munido do produto de convolução, o espaço $L^1(\mathbb{R}^n, m)$ é uma álgebra de Banach abeliana.