MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 10 DE EXERCÍCIOS

Resolva no mínimo os 10 exercícios com asterisco.

E1. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é mensurável, $F(x,y) = f(x-y)$ é mensurável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

E2. Sejam p, p_1 e p_2 em $(0,\infty]$.

(a) Se $\mu(X) = \infty$ e $f(x) = c \in \mathbb{C}^*$, $\forall x \in X$, então $f \in L^\infty$ e $f \notin L^p$ se $p < \infty$.

(b) Mostre que

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p_1}}} \text{ está em } L^{p_2}\big((1,\infty)\big) \text{ se } p_2 > p_1, \quad \text{mas} \quad f \notin L^{p_1}\big((1,\infty)\big).$$

(c) Mostre que

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p_2}}} \text{ está em } L^{p_1}\big((0,1)\big) \text{ se } p_1 < p_2, \quad \text{mas} \quad f \notin L^{p_2}\big((0,1)\big).$$

(d) Mostre que

$$f(x) = \log\frac{1}{x} \in L^p\big((0,1)\big) \text{ para todo } p < \infty, \quad \text{mas} \quad f \notin L^\infty\big((0,1)\big).$$

E3. (A) Sejam $a_j \geq 0$ e $p_j > 1$, onde $1 \leq j \leq n$, com

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

Então,

$$a_1 \ldots a_n \ \leq \ \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n}.$$

(B) Desigualdade de Hölder Generalizada. Se

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}, \text{ com } r \geq 1 \text{ e cada } p_j \geq 1,$$

então

$$\|f_1 \ldots f_n\|_r \ \leq \ \|f_1\|_{p_1} \ldots \|f_n\|_{p_n}.$$

Dicas: Em (A), use a convexidade de e^x. Em (B), inicie com $n = 2$.

VIDE VERSO

SEÇÃO 6.1, p. 186-188

3* Suponhamos $1 \leq p < r \leq \infty$ e (X, μ) um espaço de medida.

(a) $L^p \cap L^r$ é um espaço de Banach com norma $\|f\| = \|f\|_p + \|f\|_r$.

(b) Se $p < q < r$, a inclusão $L^p \cap L^r \to L^q$ é contínua.

4* Suponhamos $1 \leq p < r \leq \infty$ e (X, μ) um espaço de medida.

(a) $L^p + L^r$ é um espaço de Banach com norma

$$\|f\| = \inf\left\{ \|g\|_p + \|h\|_r : f = g + h \right\}.$$

(b) Se $p < q < r$, a inclusão $L^q \longrightarrow L^p + L^r$ é contínua.

5* Suponhamos $0 < p < q < \infty$ e (X, μ) um espaço de medida. Então,

(a) $L^p \not\subset L^q$ se e somente se X contém conjuntos com medida estritamente positiva e arbitrariamente pequena.

(b) $L^q \not\subset L^p$ se e somente se X contém conjuntos de medida finita arbitrariamente grande.

(c) O que ocorre se $q = \infty$?

Sugestões: para a parte "se". Em (a), existe uma sequência (E_n) de conjuntos disjuntos tal que $0 < \mu(E_n) < 2^{-n}$. Em (b), existe uma sequência (E_n), de conjuntos disjuntos tal que $1 \leq \mu(E_n) < \infty$. Considere $f = \sum a_n \chi_{E_n}$, para constantes apropriadas $a_{n's}$.

6* Para $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$, encontre funções f definidas em $(0, \infty)$ tais que $f \in L^p(m)$ se e somente se

(a) $p_1 < p < p_2$ $\qquad$ (b) $p_1 \leq p \leq p_2$ $\qquad$ (c) $p = p_1$.

Sugestão: Considere funções da forma $f(x) = x^{-a}\,(1 + |\log x|)^b$.

E5* Seja $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável com $f \neq 0$ (isto é, $\|f\|_\infty > 0$). Definamos

$$\varphi(p) = \int_X |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p \qquad (0 < p < \infty) \qquad \text{e} \qquad I = \{p \,:\, \varphi(p) < \infty\} \;.$$

Verifique as propriedades abaixo.

(a) I é um intervalo: se $r \in I$ e $s \in I$ e $r < p < s$ então $p \in I$.

(b) $\log \varphi$ é convexa no interior de I e φ é convexa em I.

(c) Se $r < p < s$, então

$$\|f\|_p \leq \max(\|f\|_r\,, \|f\|_s) \;\; \text{e} \;\; L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset L^p(\mu).$$

(d) Se $\|f\|_r < \infty$ para algum $r < \infty$ então,

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \;=\; \|f\|_\infty \;.$$

7* Seja $f \in L^p \cap L^\infty$ para algum p finito. Então, $f \in L^q$ para todo $q > p$ e

$$\|f\|_\infty = \lim_{q \to \infty} \|f\|_q.$$

8* Suponha $\mu(X) = 1$ e $f \in L^p$ para algum $p > 0$. Se $0 < q < p$, valem

(a) $\|f\|_q \leq \|f\|_p$.

(b)

$$\log \|f\|_q \geq \int \log |f| \, d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

Sugestão: Use a desigualdade de Jensen com $\varphi(t) = e^t$.

(c)

$$\frac{\int |f|^q d\mu - 1}{q} = \frac{\int (|f|^q - 1) d\mu}{q} \geq \log \|f\|_q \;\; \text{e} \;\; \frac{\int |f|^q d\mu - 1}{q} \xrightarrow{q \to 0} \int \log |f| d\mu.$$

(d)

$$\|f\|_q \xrightarrow{q \to 0} \exp\Big(\int \log |f| d\mu \Big).$$

Notação: $e^{-\infty} = 0$ e $\log 0 = -\infty$.

9* Seja $p \in [1, \infty)$. Valem as propriedades abaixo.

(a) Se $f_n \xrightarrow{L^p} f$, então $f_n \xrightarrow{med.} f$ e alguma subsequência $f_{n_j} \xrightarrow{q.s.} f$.

(b) Se $f_n \xrightarrow{med} f$ e para todo n temos $|f_n| \leq g \in L^p$, então $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

10* Seja $p \in [1,\infty)$. Se $f_n, f \in L^p$ e $f_n \to f$ q.s., então

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ se e só se } \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Sugestão: Exercício 20 2.3.

11. Seja $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Definimos a **imagem essencial** R_f de f por

$$R_f = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \text{ para todo } \epsilon > 0 \text{ temos } \mu\{x \in X : |f(x) - z| < \epsilon\} > 0 \Big\}.$$

(a) R_f é fechado.

(b) Se $f \in L^\infty$, então R_f é compacto e $\|f\|_\infty = \max\{|z| : z \in R_f\}$.

11. **Complemento.** Com a notação da questão anterior, mostre que:

(a) $L^\infty(X)$ é uma álgebra de Banach com unidade (a multiplicação é induzida pelo produto de funções induzido pelo produto de $\mathbb{C}$ e a unidade é a classe de equivalência da função constante e igual a 1).

(b) $f \in L^\infty$ é inversível se e somente se $0 \notin R_f$.

E6. $L^\infty(E)$ não é separável para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $m(E) > 0$.

Sugestão:

$$f(r) = m\big[E \cap D(0;r)\big], \text{ com } D(0;r) = \{x : |x| \leq r\} \text{ é contínua.}$$

14* Sejam $p \in [1,\infty]$ e $g \in L^\infty$. Verifique que

$$\text{o operador } T : L^p \to L^p, \text{ onde } T(f) = fg, \text{ é limitado.}$$

Além disso, $\|T\| \leq \|g\|_\infty$, valendo a igualdade se μ for semi-finita.

SEÇÃO 6.2, p. 191-192

18. A reflexividade de L^2 segue da teoria de espaços de Hilbert. Tal fato pode ser usado para demonstrar o teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym através do seguinte argumento, devido a von Neumann. Sejam μ, ν medidas positivas finitas em $(X, \mathcal{M})$ (o caso σ-finito é consequência do caso em que a medida é finita, pelo mesmo argumento usado anteriormente), e seja $\lambda = \mu + \nu$.

    (a) O funcional $f \mapsto \int f d\nu$ é linear contínuo em $L^2(\lambda)$. Portanto, o teorema de representação de Riesz garante a existência de uma função $g \in \mathrm{L}^2(\lambda)$ tal que para toda $f \in L^2(\lambda)$ temos $\int f d\nu = \int fgd\lambda$. Equivalentemente, para toda $f \in L^2(\lambda)$ temos $\int f(1-g)d\nu = \int fgd\mu$.

    (b) $0 \leq g \leq 1$ λ-q.s. e então podemos assumir $0 \leq g \leq 1$ em toda ponto.

    (c) Sejam $A = \{x : g(x) < 1\}$ e $B = \{x : g(x) = 1\}$. Defina

    $$\nu_a(E) = \nu(A \cap E) \quad \text{e} \quad \nu_s(E) = \nu(B \cap E).$$

    Então, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu_a \ll \mu$. De fato, $d\nu_a = g(1-g)^{-1}\chi_A d\mu$.

20. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ e $(f_n)_{\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$. Mostre que, se $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ e $f_n \to f$ μ-q.s., então (f_n) converge a f **fracamente** (i.e., se q é o conjugado de p então

    $$\int f_n g d\mu \to \int fgd\mu, \quad \text{para toda } g \in L^q.$$

    Sugestão: Dados $g \in L^q$ e $\epsilon > 0$ verifique as afimações abaixo.

    (i) Existe $\delta > 0$ tal que: se $\mu(E) < \delta$ então $\int_E |g|^q \, d\mu < \epsilon$,

    (ii) Existe A tal que $\mu(A) < \infty$ e $\int_{X \setminus A} |g|^q \, d\mu < \epsilon$,

    (iii) Mantida a notação acima, existe $B \in \mathcal{M}$ tal que

    $$B \subset A, \quad \mu(A \setminus B) < \delta \quad \text{e} \quad f_n \to f \text{ uniformemente em } B.$$

    Adendo: Se $p = 1$, o resultado acima é falso com contra-exemplo em $L^1(\mathbb{R}, m)$. Verifique.