MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT5798

Primeiro semestre de 2016

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

ORIENTAÇÕES AO EXAME FINAL - PARTE A

1. Escrever claramente o teorema que está utilizando (porém não é necessário enunciar os teoremas das convergências dominada e monótona). Note que a maioria é de delicado (difícil) enunciado.

2. Checar as hipóteses antes de aplicar um resultado.

3. Não acredite piamente em "podemos supor sem perda de generalidade ..."

4. Os espaços L^p são, a priori, espaços de funções a valores complexos.

5. Se z é um número complexo, não vale em geral que $|z| + z$ é positivo. Dadas f e g duas funções, $|f| \leq g$ não necessariamente implica $f \leq g$.

6. Apontar, em cada etapa da solução de questões como cômputo de integrais, se a integral usada é de Lebesgue ou de Riemann (se própria ou imprópria). Atenção com a mudança de variáveis.

7. Não fazer (jamais) contas do tipo: $+\infty - \infty$.

8. Não assumir (jamais) que as funções envolvidas na questão são mensuráveis.

9. É **essencial** explicar passagens (condição *sine qua non* para nota 100%).

10. É **realmente necessário** escrever os resultados que está utilizando. Soluções que não os incluem são incompletas e não tem nota 100%.

VIDE PARTE B NO VERSO

ORIENTAÇÕES AO EXAME FINAL - PARTE B

Estudem as demonstrações dos seguintes resultados.

Capítulo 1 - Medidas

- O completamento de uma medida (Teorema 1.2).
- Teorema de Carathéodory (1.3), o completamento de uma medida exterior.
- Medidas de Borel e funções crescentes e contínuas à direita (Teorema 1.5).
- 1º Princípio de Littlewood (Teorema 1.8), para medidas de Lebesgue-Stieltjes.
- Translações e homotetias e a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ (Teorema 1.9).

Capítulo 2 - Integração

- Teorema (2.2) da Convergência Monótona.
- 3º Princípio de Littlewood, Teorema de Severini-Egoroff abstrato (2.11).
- O Teorema de Fubini-Tonelli (Teorema 2.17).
- Aproximação básica de funções em $L^1(m)$ (Teorema 2.20).
- Trasformações lineares e a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ (Proposição 2.16).

Capítulo 3 - Medidas com Sinal

- Teorema da Decomposição de Hahn (Teorema 3.1).
- Regra da Cadeia (Proposição 3.2).
- Propriedades da medida variação total $|\nu|$ (Proposição 3.4).
- A função maximal de Hardy-Littlewood e Teorema Maximal 3.6.
- Relações entre o integrando [em L^1] e a primitiva [em NBV]. Isto é, NBV e a forma fraca do teorema fundamental do cálculo. Corolário 3.3.

Capítulo 4 - Espaços L^p

- Desigualdade de Hölder (Teorema 4.1).

- Desigualdade de Minkowski (Teorema 4.2).

- L^p é um espaço de Banach (Teorema 4.3).

- A identidade $\|g\|_q = \|\Phi_g\|$ (Proposição 4.6).

- Desigualdade de Young generalizada (Teorema 4.7).

Capítulo 5 - Medidas de Radon.

- Regularidade interior em conjuntos σ-finitos (Proposição 5.2).

- Densidade de $C_c(X)$ em $L^p(X)$, para $p \in [1, \infty)$ (Proposição 5.4).

- 2° Princípio de Littlewood para medidas de Radon, Teorema (5.4) de Lusin.

- $M(X)$ é um espaço vetorial normado e complexo (Proposição 5.6).

- Teorema (5.5) da Representação de Riesz.