$3^{\underline{a}}$ PROVA DE FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP - MAT 5714

28 de novembro, 2014

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____
$N^{\underline{o}}$USP : ________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Justifique todas as passagens, com uma redação clara e não carregada em simbologia.
BOA SORTE!

1. Um Teorema da Função Implícita Complexo. Seja $F = F(z,w)$ contínua em um aberto de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ e a valores em $\mathbb{C}$. Suponha F derivável na variável w, para cada z fixado. Denotemos tal derivada por

$$\frac{\partial F}{\partial w}(z,w).$$

Seja (z_0, w_0) tal que

$$F(z_0,w_0) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial F}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0.$$

   (a) Mostre que existe um raio $\rho > 0$ para o qual temos

$$F(z_0,w) \neq 0 \text{ para todo } w \ \in D(w_0;\rho) \setminus \{w_0\}.$$

   (b) Mostre que existe um raio $r > 0$ tal que para todo $z \in B(z_0;r)$,

$$\text{existe um único } w = \varphi(z) \in B(w_0;\rho) \ \text{ que satisfaz } \ F(z,\varphi(z)) = 0.$$

   Dicas. Considere $m = \min\limits_{|w-w_0|=\rho} |F(z_0;w)|$. Use continuidade uniforme.

   (c) Mostre a fórmula

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(w_0;\rho)} \frac{w\frac{\partial F}{\partial w}(z,w)}{F(z,w)}dw, \quad \text{onde } z \in B(z_0;r).$$

   (d) Suponha que F é derivável (holomorfa) na variável z, para cada w fixado. Mostre que φ é derivável e (a derivada de F em relação a z é $\partial F/\partial z$)

$$\varphi'(z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(z,w)}{\frac{\partial F}{\partial w}(z,w)}.$$

   (e) Enuncie o Teorema da Função Inversa Complexo e sua fórmula de representação, vistos na P2. Prove tal teorema da função inversa complexo utilizando a versão do teorema da função implícita complexo apresentada ao longo desta questão [nos itens (a), (b), (c) e (d)].

2. Seja $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Compute

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

$$(b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1} dx.$$

3. Compute.

$$(a) \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

$$(b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx.$$

4. Compute

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$$

$$(b) \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^a(x+1)} dx, \quad \text{onde} \quad 0 < a < 1.$$

5. Compute

$$(a) \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$(b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}.$$

6. Compute, utilizando resíduos

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

$$(b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

7. Sejam f e g funções holomorfas em uma vizinhança de $z = a$. Suponha que $z = a$ é raíz dupla de $g(z) = 0$ e que $f(a) \neq 0$. Prove que o resíduo de

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

no ponto $z = a$ é

$$\frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3\left[g''(a)\right]^2}.$$

8. Seja f meromorfa na esfera complexa e satisfazendo as condições
   (a) $f(0) = 0$, $f(-1) = 2$ e $f(3) = 3$.
   (b) f tem um polo simples em $z = 1$ com resíduo 1.
   (c) f tem um polo triplo em $z = 2$, com resíduo 2.

   Determine f e calcule seu desenvolvimento de Laurent na coroa
$$\{z : 1 < |z| < 2\}.$$

9. Seja $f(z)$ analítica na bola aberta $B(0;1)$ e com $f'(z)$ limitada neste disco. Mostre que f pode ser estendida continuamente ao disco $D(0;1)$ e que a extensão é uniformemente contínua em $D(0;1)$.

10. Seja $f(z)$ analítica na bola $B(0;1)$, com $f(0) = 0$. Prove que a série de funções
$$\Phi(z) = f(z) + f(z^2) + \cdots + f(z^n) + \cdots$$
é analítica em $B(0;1)$.

11. Mostre que existe uma sequência de polinômios (P_n) tal que
$$P_n(0) = 1, \text{ para todo } n, \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} P_n(z) = 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{C}^*.$$

12. Comparando coeficientes no desenvolvimento da série de Laurent para $\cot(\pi z)$ e de sua expressão como uma soma em frações parciais,
$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$
encontre os valores de [atenção, justifique todos os passos necessários]

$$(a) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} \qquad\qquad (c) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}.$$

13. Encontre uma forma fechada para
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^3 - n^3}.$$

14. Utiliza a fórmula

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \;=\; \lim_{m\to+\infty} \sum_{-m}^{+m} \frac{(-1)^n}{z-n} \;=\; \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2}$$

para encontrar o desenvolvimento em frações parciais da função

$$\frac{1}{\cos(\pi z)}.$$

Com a fórmula obtida, mostre então que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

15. Qual o valor de

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2+a^2}\,?$$

16. Uma fórmula substituindo o método dos coeficientes indeterminados e o método do anulador. Considere o operador diferencial linear de ordem n e com coeficientes reais, na variável real t e com I o operador identidade sobre o espaço $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, dado por

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 I \quad [a_n \neq 0].$$

Considere o polinômio característico

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0, \text{ onde } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sejam $Q = Q(t)$ uma função em $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e um número complexo arbitrário γ.

(a) Mostre que

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\left[Q(t)e^{\gamma t}\right] = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!}Q' + \frac{p(\gamma)}{0!}Q\right]e^{\gamma t}.$$

(b) Utilizando a fórmula em (a), encontre uma solução particular de

$$x''' - 3x'' + 4x' - 2x = t^2 e^t \sin t.$$

$$x''' - 4x'' + 6x' - 4x = t^2\, e^t \,\mathrm{cost}.$$

(c) Suponha que γ é uma raíz de ordem m de $p(\lambda) = 0$. Mostre que

$$x_1(t) = e^{\gamma t},\; x_2(t) = te^{\gamma t}, \ldots,\; x_m(t) = t^{m-1}e^{\gamma t}$$

são soluções da edo homogênea

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_3 x''' + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 = 0.$$

17. (Representação). Seja f holomorfa em $B(0;\rho)$. Suponhamos $0 < r < R < \rho$.

   (a) Seja $z \in B(0;R)$. Mostre que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\right)d\theta.$$

   (b) Mostre que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\theta}+r}{Re^{i\theta}-r}\right) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}.$$

18. (O reverso do teorema de Runge). Seja K um compacto cujo complementar não é conexo. Mostre que existe uma função f holomorfa em uma vizinhança de K cuja restrição $f|_K$ não pode ser aproximada uniformemente por polinômios.

19. (a) Determine a forma geral de uma função analítica em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que tenha um polo de ordem n em $z = 0$ e um polo de ordem m no infinito.

   (b) Determine os resíduos da função

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2}\cos\left(\frac{2\pi z-2}{2z}\right)$$

   nos pontos $z = 2$, no ponto ∞ e em $z = 0$.

20. Caracterização três-pontos de uma função holomorfa (autor desconhecido). Comunicado por R. B. Burckel. Seja

$$f : B(0;1) \to B(0;1)$$

uma função arbitrária (não é necessário que f seja contínua). Suponhamos que f possui a seguinte propriedade: dados três pontos z_1, z_2 e z_3 na bola $B(0;1)$, existe uma função holomorfa $h : B(0;1) \to B(0;1)$ (dependendo dos três pontos dados) tal que

$$h(z_1) = f(z_1), \quad h(z_2) = f(z_2) \quad \text{e} \quad h(z_3) = f(z_3).$$

Seguindo o roteiro abaixo, prove que f é holomorfa.

- $\diamond$ Suponha $f(0) = 0$.

  (i) Mostre que (use o Lema de Schwarz)

$$\left\{\frac{f(z)}{z} : z \neq 0\right\} \quad \text{é (em módulo) limitado por 1.}$$

(ii) Mostre que existe uma sequência (w_n) e um $a \in D(0;1)$ tais que

$$w_n \to 0 \quad \text{e} \quad \frac{f(w_n)}{w_n} \to a \in D(0;1).$$

(iii) Considere uma sequência arbitrária $(z_n) \subset B(0;1) \setminus \{0\}$ tal que

$$z_n \to 0.$$

Mostre que existe $h_n : B(0;1) \to B(0;1)$ holomorfa tal que

$$h_n(0) = 0, \quad h_n(z_n) = f(z_n) \quad \text{e} \quad h_n(w_n) = f(w_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

(iv) Mostre que (use o Lema de Schwarz)

$$g_n(z) = \frac{h_n(z)}{z}, \text{ para cada } n \text{ em } \mathbb{N},$$

é holomorfa e $g_n : B(0;1) \to B(0;1)$.

(v) Mostre que existe uma subsequência (g_{n_j}) e g holomorfa em $B(0;1)$ tal que

$$g_{n_j} \to g \ \text{ uniformemente sobre os compactos de } B(0;1).$$

(vi) Mostre que

$$\frac{f(z_{n_j})}{z_{n_j}} = \frac{h_{n_j}(z_{n_j})}{z_{n_j}} = g_{n_j}(z_{n_j}) \longrightarrow 0 \ \text{ se } j \to \infty$$

e também que

$$\frac{f(w_{n_j})}{w_{n_j}} = \frac{h_{n_j}(w_{n_j})}{w_{n_j}} = g_{n_j}(w_{n_j}) \longrightarrow 0 \ \text{ se } j \to \infty.$$

(vii) Combinando (b) e (e), mostre que

$$\text{existe } \lim_{j\to\infty} \frac{f(z_{n_j})}{z_{n_j}} = a.$$

(viii) Conclua que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)}{z_n} = a$$

e que existe a derivada de f na origem e que

$$f'(0) = a.$$

◇ Para finalizar, conclua que f é derivável em todo ponto da bola $B(0;1)$.