$2^{\underline{a}}$ PROVA DE FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP - MAT 5714

31 de outubro, 2014

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : _________ GABARITO ___________________________
$N^{\underline{o}}$USP : ______________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Justifique todas as passagens, com uma redação clara e não carregada em simbologia.
BOA SORTE!

1. *Defina famílias equicontínuas, localmente limitadas e normais (relativamente compactas). Enuncie o Teorema de Montel.*

   Seja $\mathcal{F}$ uma família em $\mathcal{A}(\Omega)$ e localmente limitada. Prove, usando o Lema de Schwarz, que $\mathcal{F}$ é equicontínua sobre cada compacto K contido em Ω.
   Sugestões. *Mostre as afirmações abaixo.*

   (a) *Existe $r > 0$ tal que $K(r) = \{z : d(z;K) \leq r\} \subset \Omega$. Ainda, $K(r)$ é compacto.*

   (b) *Existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo z em $K(r)$.*

   (c) *Dados quaisquer $a \in K$ e $f \in \mathcal{F}$, a função*

   $$\widetilde{f}(z) = \frac{f(a+rz) - f(a)}{2M}$$

   aplica o disco $D(0;1)$ em $D(0;1)$ e satisfaz $\widetilde{f}(0) = 0$.

   Solução (integration-free).

   Seja X um subconjunto de $\mathbb{C}$ e $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C},\ \text{onde } f \text{ é contínua}\}$. Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções em $C(X)$. Dizemos que

   - $\mathcal{F}$ é equicontínua se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ satisfazendo

     $$|f(z) - f(w)| < \epsilon,\ \forall f \in \mathcal{F} \text{ e } \forall z \text{ e } \forall w,\ \text{ambos em } X,\ \text{tais que } |z - w| < \delta.$$

   - $\mathcal{F}$ é localmente limitada se para todo $a \in X$, existem uma bola aberta $B(a;r)$, com $r > 0$, e um $M \geq 0$ satisfazendo

     $$|f(z)| \leq M,\ \text{para toda } f \in \mathcal{F} \text{ e para todo } z \in B(a;r) \cap X.$$

   Seja Ω um conjunto aberto e $\mathcal{F}$ uma família de funções em $C(\Omega)$. Dizemos que

   - $\mathcal{F}$ é normal (ou relativamente compacta) se toda sequência em $\mathcal{F}$ contém uma subsequência que converge compactamente a alguma função f [claramente, $f \in C(\Omega)$]. Não é exigido que o limite da subsequência pertença a $\mathcal{F}$.

Teorema de Montel. *Seja $\mathcal{F}$ uma família em $\mathcal{A}(\Omega)$ localmente limitada, com Ω um aberto no plano complexo. Então,*

- *$\mathcal{F}$ é equicontínua sobre cada subconjunto compacto de Ω.*
- *$\mathcal{F}$ é normal (isto é, relativamente compacta).*

A seguir, resolvamos a questão.

(a) Seja $2r = d(K;\Omega^c)$ [se $\Omega = \mathbb{C}$, escolhemos qualquer $r > 0$]. Como K é compacto e Ω^c é fechado, tal distância é assumida. Isto é, existem um ponto $\alpha \in K$ e um ponto $\beta \in \Omega^c$ tais que

$$|\alpha - \beta| = d(K;\Omega^c) = 2r \leq |a-b|, \quad \text{quaisquer que sejam } a \in K \text{ e } b \in \Omega^c.$$

Segue então a inclusão

$$D(a;r) \subset \Omega, \text{ para todo } a \in K.$$

É claro que

$$\{z : d(z;K) \leq r\} = \bigcup_{a\in K} D(a;r).$$

Donde segue

$$K(r) = \{z : d(z;K) \leq r\} \subset \Omega.$$

Como K é limitado, segue que $K(r)$ também é limitado. Ainda, a função

$$z \in \mathbb{C} \mapsto d(z;K)$$

é contínua [visto no capítulo 2] e portanto pré-imagem por tal função do intervalo fechado $[0,r]$ é um fechado em $\mathbb{C}$. Isto é, o conjunto $K(r)$ é fechado. Juntando as informações, segue que

$$K(r) \text{ é um subconjunto compacto de } \Omega.$$

(b) Seja $z \in K(r)$. Por hipótese, existe $B(z;r(z))$ não degenerada tal que $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada em $B(z;r(z))$ por uma constante $M(z)$. Temos

$$K(r) \subset \bigcup_{z\in K(r)} B(z;r(z)).$$

Então, como $K(r)$ é compacto, existem $z_1,\ldots,z_n \in K(r)$ tais que

$$K(r) \subset B(z_1;r(z_1)) \cup \cdots \cup B(z_1;r(z_1)).$$

Seja $M = \max\{M(z_j) : j = 1,\ldots,n\}$. Encontramos a estimativa

$$|f(z) \leq M, \quad \text{quaisquer que sejam } f \in \mathcal{F} \text{ e } z \in K(r).$$

Vide próxima página

(c) Seja K um compacto contido em Ω e fixemos um arbitrário a em K. Seja $2r = d(K; \Omega^c)$, como em (a). Seja $M = M(K, r)$ como em (b). Definamos

$$\widetilde{f}(z) = \frac{f(a + rz) - f(a)}{2M}, \text{ onde } z \in D(0; 1).$$

É claro que $\widetilde{f}(0) = 0$. Ainda mais,

$$|\widetilde{f}(z)| \leq \frac{|f(a + rz)| + |f(a)|}{2M} \leq \frac{2M}{2M} = 1, \quad \text{para todo } z \in D(0; 1).$$

Logo,

$$\widetilde{f} : D(0; 1) \to D(0; 1) \ \text{ e } \ \widetilde{f}(0) = 0.$$

O Lema de Schwarz garante

$$|\widetilde{f}(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \in D(0; 1).$$

Isto é,

$$|f(a + rz) - f(a)| \leq 2M|z|, \quad \text{para todo } z \in D(0; 1).$$

Assim, se ζ pertence a K e $|\zeta - a| \leq r$ então obtemos

$$|f(\zeta) - f(a)| \leq 2M\frac{|\zeta - a|}{r} = \frac{2M}{r}|\zeta - a|.$$

Tal desigualdade vale para quaisquer pontos $a \in K$ e $\zeta \in K$, tais que $|\zeta - a| \leq r$, e qualquer $f \in \mathcal{F}$. Logo, $\mathcal{F}$ é equicontínua sobre K ♣

2. *Consideremos o quadrado Q centrado na origem e de vértices*

$$z_0 = z_4 = 1+i, \quad z_1 = -1+i, \quad z_2 = -(1+i), \quad e \ \ z_3 = 1-i.$$

Consideremos as curvas (esboce os segmentos lineares)

$$\gamma_k(t) = z_k + (t-k)(z_{k+1} - z_k), \ \textit{onde}\ t \in [k, k+1], \ \textit{para}\ k = 0,1,2,3.$$

Seja $\gamma : [0,4] \to \mathbb{C}$ dada pela justaposição $\gamma = \gamma_0 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$. Isto é, temos $\gamma(t) = \gamma_k(t)$ se $t \in [k, k+1]$ e γ é a fronteira do quadrado Q. Mostre que

$$Ind(\gamma; 0) = Ind(\gamma_0; 0) + Ind(\gamma_1; 0) + Ind(\gamma_2; 0) + Ind(\gamma_3; 0).$$

Mostre que $Ind(\gamma_k; 0) = \frac{1}{4}$ para $k = 0,1,2,3$. Mostre então que $Ind(\gamma; 0) = 1$.

Solução (integration-free).

◇ Por um teorema provado em sala (Teorema 7.11), existe uma função contínua [chamada ramo] $\phi : [0,4] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\phi(t)}.$$

Então, $\phi_k = \phi\Big|_{[k,k+1]} : [k, k+1] \to \mathbb{R}$ são contínuas e satisfazem

$$\gamma_k(t) = |\gamma_k(t)| e^{i\phi_k(t)}.$$

Por definição temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\gamma; 0) &= \frac{\phi(4) - \phi(0)}{2\pi} \\ &= \frac{\phi(4) - \phi(3)}{2\pi} + \frac{\phi(3) - \phi(2)}{2\pi} + \frac{\phi(2) - \phi(1)}{2\pi} + \frac{\phi(1) - \phi(0)}{2\pi} \\ &= \mathrm{Ind}(\gamma_3; 0) + \mathrm{Ind}(\gamma_2; 0) + \mathrm{Ind}(\gamma_1; 0) + \mathrm{Ind}(\gamma_0; 0).\end{aligned}$$

◇ $\mathrm{Ind}(\gamma_3; 0)$. O segmento linear desde $z_3 = 1 - i$ até $z_4 = z_0 = 1 + i$ está contido no semi-plano "à direita"

$$\Omega = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}.$$

Em tal semi-plano está bem definido o argumento contínuo

$$\theta(z) = \arcsin\left[\mathrm{Im}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right] \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Temos então

$$\gamma_3(t) = |\gamma_3(t)| e^{i\theta(\gamma_3(t))}, \text{ para todo } t \in [3,4].$$

Ainda, $\theta \circ \gamma_3 : [3,4] \to \mathbb{R}$ é contínua. Então, por definição temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\gamma_3; 0) = \frac{\theta(\gamma_3(4)) - \theta(\gamma_3(3))}{2\pi} &= \frac{\theta(1+i) - \theta(1-i)}{2\pi} \\ &= \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

◇ Os demais indíces. Com a rotação de $\pi/2$ rad dada por $R_i(z) = iz$ vemos que, a menos de uma reparametrização, a curva γ_0 unindo $z_0 = 1 + i$ até $z_1 = -1 + i$ é $R_i \circ \gamma_3$, com $R_i(0) = 0$. Pela propriedade $I2$ segue

$$\text{Ind}(\gamma_0; 0) = \text{Ind}(\gamma_3; 0) = \frac{1}{4}.$$

A menos de uma reparametrização, a curva γ_1 unindo $z_1 = -1 + i$ até $z_2 = -1 - i$ é $R_i \circ \gamma_0$. Pela propriedade $I2$ segue

$$\text{Ind}(\gamma_1; 0) = \text{Ind}(\gamma_0; 0) = \frac{1}{4}.$$

Por fim, a menos de uma reparametrização, a curva γ_2 unindo $z_2 = -1 - i$ até $z_3 = 1 - i$ é $R_i \circ \gamma_1$. Pela propriedade $I2$ segue

$$\text{Ind}(\gamma_2; 0) = \text{Ind}(\gamma_1; 0) = \frac{1}{4} \clubsuit$$

3. *Sejam um raio* $R > 1$ *e* γ *a semi-circunferência orientada no sentido anti-horário (esboce) dada por*

$$\gamma(t) = \begin{cases} Re^{it}, & se\ 0 \leq t \leq \pi \\ t - (\pi + R), & se\ \pi \leq t \leq \pi + 2R. \end{cases}$$

Mostre que $Ind(\gamma; i) = 1$.

1ª Solução (integration-free).

Seja $r > 0$ um raio, com a circunferência $S(i; r)$ contida no interior da região compacta limitada por γ. Claramente $0 < r < 1$. A curva contínua e fechada

$$\Gamma(t) = r\frac{\gamma(t) - i}{|\gamma(t) - i|}, \text{ onde } t \in [0, \pi + 2R],$$

é tal que $\Gamma([0, \pi + 2R]) = S(0; r)$.

- Toda semi-reta com início no ponto i intersecta Imagem(γ) em um só ponto.
- A função γ restrita ao intervalo aberto $(0, \pi + 2R)$ é injetora.
- Por tais motivos, a função Γ restrita a $(0, \pi + 2R)$ é injetora.
- Por hipótese, γ tem orientação positiva. Logo, Γ tem orientação positiva.

Pelo Teorema 7.11 existe $\theta : [0, \pi + 2R] \to \mathbb{R}$ contínua e satisfazendo

$$\Gamma(t) = re^{i\theta(t)}, \text{ para todo } t \in [0, \pi + 2R].$$

- Como a curva Γ é positivamente orientada, segue que a função θ é crescente.
- Como θ é crescente e a curva Γ é fechada, concluímos que

$$\theta(\pi + 2R) = \theta(0) + 2n\pi, \quad \text{para algum } n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

- Por tais motivos, mais continuidade e conexidade e compacidade, obtemos

$$\theta\Big([0, \pi + 2R]\Big) = [\theta(0), \theta(0) + 2n\pi].$$

Como $\Gamma(t) = re^{i\theta(t)}$ restrita ao intervalo $(0, \pi + 2R)$ é injetora, não ocorre $n \geq 2$. Pois, caso contrário, existem t_1 e t_2 distintos e no intervalo $(0, \pi + 2R)$ e satisfazendo $\theta(t_2) = \theta(t_1) + 2\pi$ donde então segue $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$, uma contradição.

Desta forma, concluímos que $n = 1$ e

$$\text{Ind}(\gamma; i) = \text{Ind}(\Gamma; 0) = \frac{\theta(\pi + 2R) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{2n\pi}{2\pi} = n = 1 \clubsuit$$

Vide próxima página

2ª Solução (integration-free).

Consideremos a semi-circunferência parametrizada no sentido anti-horário

$$\eta(t) = \begin{cases} (\pi - t) + 3R, & \text{se } \pi + 2R \leq t \leq \pi + 4R \\ \\ Re^{i(t-4R)}, & \text{se } \pi + 4R \leq t \leq 2\pi + 4R. \end{cases}$$

O número i pertence à componente ilimitada do complementar de Imagem(η). Logo, pelo teorema 7.15 segue

$$\text{Ind}(\eta; i) = 0.$$

Consideremos a curva justaposta $\gamma \vee \eta$. Pela definição de índice (7.13) segue

$$\text{Ind}(\gamma \vee \eta; i) = \text{Ind}(\gamma; i) + \text{Ind}(\eta; i).$$

Logo,

$$\text{Ind}(\gamma; i) = \text{Ind}(\gamma \vee \eta; i).$$

Escrevamos $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ com

$$\gamma_1 \text{ definida em } [0, \pi] \text{ e } \gamma_2 \text{ definida em}[\pi, \pi + 2R].$$

Analogamente, escrevamos $\eta = \eta_1 \vee \eta_2$ com

$$\eta_1 \text{ definida em } [\pi + 2R, \pi + 4R] \text{ e } \eta_2 \text{ definida em } [\pi + 4R, 2\pi + 4R].$$

Pela propriedade (I1) [vide Figura 7.7 nas notas de aula] temos

$$\text{Ind}(\gamma_2; i) = -\text{Ind}(\eta_1; i).$$

Então, pela definição de índice (7.13) temos

$$\text{Ind}(\gamma \vee \eta; i) = \text{Ind}(\gamma_1; i) + \text{Ind}(\eta_2; i).$$

Reparametrizemos η_2 no intervalo $[\pi, 2\pi]$. Seja η_3 tal reparametrização.
Pela propriedade (I2) temos

$$\text{Ind}(\eta_2; i) = \text{Ind}(\eta_3; i).$$

Logo [e uma vez mais utilizando a definição (7.13)]

$$\text{Ind}(\gamma \vee \eta; i) = \text{Ind}(\gamma_1; i) + \text{Ind}(\eta_3; i) = \text{Ind}(\gamma_1 \vee \eta_3; i).$$

Seja $\Gamma = \gamma_1 \vee \eta_3$. Evidentemente

$$\Gamma = \gamma_1 \vee \eta_3 \ \text{ é a parametrização anti-horária de } S^1 = \text{Imagem}(\Gamma).$$

Pelo Teorema 7.13 o índice Ind_Γ é constante nas componentes de $\mathbb{C} \setminus S^1$.
Como 0 e i pertencem à mesma componente de $\mathbb{C} \setminus S^1$, segue que

$$\text{Ind}(\Gamma; i) = \text{Ind}(\Gamma; 0).$$

É bem sabido que

$$\text{Ind}(\Gamma; 0) = 1 \clubsuit$$

4. (a) *Verifique que* $p(z) = z^5 + 13z^2 + 15$ *tem*

dois zeros na coroa $\{z : 1 < |z| < 2\}$ *e três zeros na coroa* $\left\{z : 2 < |z| < \frac{5}{2}\right\}$.

(b) *Seja* $a \in \mathbb{C}$, *com* $|a| > e$ *(onde* e *é o número de Euler). Verifique que a equação*

$$e^z - az^n = 0$$

tem exatamente n *soluções em* $B(0;1)$.

Solução (integration-free).

(a) ◇ Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $p(z)$ tem exatamente 5 zeros.

◇ Suponhamos $|\zeta| = 5/2$. Temos

$$|13\zeta^2 + 15| \leq \frac{325 + 60}{4} = \frac{385}{4} = \frac{3080}{32} < \frac{3125}{32} = |\zeta^5|.$$

Logo, pelo Teorema de Rouché

$$\text{todos os cinco zeros de } p(z) \text{ estão em } B\left(0; \frac{5}{2}\right).$$

◇ Seja $\zeta \in D(0;1)$. Seguem $|\zeta^5 + 13\zeta^2| \leq 14$ e $p(\zeta) = \zeta^5 + 13\zeta^2 + 15 \neq 0$. Assim,

$$\text{todos os cinco zeros de } p(z) \text{ estão no anel } \left\{z : 1 < |z| < \frac{5}{2}\right\}.$$

◇ Suponhamos $|\zeta| = 2$. Então,

$$|\zeta^5 + 15| \leq 32 + 15 = 47 < 52 = |13\zeta^2|.$$

Logo, pelo Teorema de Rouché

$$\begin{cases} p(z) = z^5 + 13z^2 + 15 \text{ tem dois zeros em } B(0;2) \\ \text{e} \\ p(z) = z^5 + 13z^2 + 15 \text{ não tem zeros na circunferência } S(0;2). \end{cases}$$

◇ Combinando as informações acima, concluímos que

$$\begin{cases} p(z) \text{ tem dois zeros no anel } \{z : 1 < |z| < 2\} \\ \text{e} \\ p(z) \text{ tem três zeros no anel } \left\{z : 2 < |z| < \frac{5}{2}\right\}. \end{cases}$$

(b) Suponhamos $|\zeta| = 1$. Então,

$$|e^\zeta| = e^{\mathrm{Re}(\zeta)} \leq e^1 = e < |a| = |a\zeta^n|.$$

Logo, pelo Teorema de Rouché

$$f(z) = e^z - az^n \;\text{ tem } n \text{ soluções na bola } B(0;1)\,\clubsuit$$

5. *Suponha que Ω é um aberto conexo e não vazio de $\mathbb{C}$. Seja f_n, para $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções holomorfas em Ω e $u_n = Re(f_n)$.*

   Prove que se (u_n) converge compactamente em Ω e se existe $\alpha \in \Omega$ tal que $(f_n(\alpha))$ converge em $\mathbb{C}$, então (f_n) converge compactamente em Ω.

Solução.

O conjunto X dos pontos de Ω que admitem uma vizinhança na qual (f_n) converge compactamente é evidentemente aberto em Ω. Um simples raciocínio com sequências mostra que tal conjunto é também fechado em Ω. Então, como Ω é conexo, só falta mostrarmos que X não vazio.

Podemos supor, sem perda de generalidade, $\alpha = 0$.

Lema. *Consideremos f holomorfa na bola $B(0;\rho)$, com $\rho > 0$, e sua parte real $u = Re(f)$. Seja r tal que $0 < r < \rho$. Então, para cada ponto $w \in B(0;r)$ temos*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\frac{re^{i\theta}+w}{re^{i\theta}-w}d\theta \; + \; iIm[f(0)].$$

Prova.

Escrevendo
$$f(z) = \sum a_n z^n, \text{ para todo } |z| < \rho,$$
obtemos
$$u(z) = \frac{1}{2}\sum(a_n z^n + \overline{a_n z^n}).$$
Dado $z = re^{i\theta}$ na circunferência $S(0;r)$, temos

$$u(re^{i\theta}) = \mathrm{Re}(a_0) + \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1} r^m(a_m e^{im\theta} + \overline{a_m}e^{-im\theta}).$$

Multiplicando tal identidade por $e^{-in\theta}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, e integrando obtemos

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = r^n a_n \pi.$$

Achamos então fórmulas para os coeficientes que dependem apenas de $u = \mathrm{Re}f$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\frac{1}{(re^{i\theta})^n}d\theta, \text{ se } n \geq 1.$$

Observemos que, pela fórmula do valor médio de Gauss,

$$a_0 = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta \implies \mathrm{Re}(a_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta.$$

Dado então $w \in B(0;r)$ temos (pelo Teste-M de Weierstrass, pois $\frac{|w|}{r} < 1$)

$$f(w) = a_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \left(\frac{w}{re^{i\theta}}\right)^n d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \left[1 + 2\sum_{n\geq 1} \left(\frac{w}{re^{i\theta}}\right)^n\right] d\theta \ + \ i\mathrm{Im}(a_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \left[1 + 2\left(\frac{1}{1-\frac{w}{re^{i\theta}}} - 1\right)\right] d\theta \ + \ i\mathrm{Im}(a_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \left(\frac{2re^{i\theta}}{re^{i\theta}-w} - 1\right) d\theta \ + \ i\mathrm{Im}(a_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{re^{i\theta}+w}{re^{i\theta}-w} d\theta \ + \ i\mathrm{Im}(a_0) \blacksquare$$

O lema está provado.

A seguir, suponhamos $0 < \tau < r < \rho$ e

$$B(0;\tau) \subset B(0;r) \subset B(0;\rho) \subset \Omega.$$

Pelo lema temos

$$f_n(w) - f_m(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[u_n(re^{i\theta}) - u_m(re^{i\theta})\right] \frac{re^{i\theta}+w}{re^{i\theta}-w} d\theta + i\mathrm{Im}[f_n(0) - f_m(0)].$$

Para w variando em $D(0;\tau)$, existe uma constante M tal que

$$\left|\frac{re^{i\theta}+w}{re^{i\theta}-w}\right| \leq M, \text{ para todo } w \in D(0;\tau).$$

Dado $\epsilon > 0$, devido às hipóteses segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} |f_n(0) - f_m(0)| \leq \epsilon, \text{ para quaisquer } n \geq N \text{ e } m \geq N, \\ \\ |u_n(re^{i\theta}) - u_m(re^{i\theta})| \leq \epsilon, \text{ para quaisquer } n \geq N \text{ e } m \geq N \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Desta forma encontramos

$$|f_n(w) - f_m(w)| \leq \epsilon M + \epsilon, \text{ para quaisquer } n \geq N, m \geq N \text{ e } w \in D(0;\tau).$$

Logo, (f_n) converge uniformemente em $D(0;\tau)$ e 0 pertence a X ♣

6. *Considere circunferências orientadas γ_1, γ_2 e γ_3 tais que γ_1 é positivamente orientada e γ_2 e γ_3 são negativamente orientadas e contidas no interior de γ_1, além de que γ_2 e γ_3 são disjuntas e seus interiores também.*

   Sejam $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ e o conjunto $V = \{z \in \mathbb{C} : Ind_\Gamma(z) = 1\}$. Suponha $0 \in V$.

   (a) *Se Ω é um aberto conexo contendo $\overline{V}$ e $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, determine $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sabendo que*

   $$f(z) = \int_\Gamma \frac{g(\xi)(1 - \cos\xi)}{\xi^2(\xi - z)}\, d\xi, \text{ para todo } z \in V.$$

   (b) *Seja $a \in V$ tal que $a \neq 0$ e $g(a)(1 - \cos a) \neq 0$. Calcule*

   $$\lambda(a) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz.$$

   Sugestão. *Teorema de Cauchy homológico.*

   Solução.

   Como Ω contém $\overline{V}$, segue que Γ é homóloga a 0 em Ω.

   (a) Consideremos a função

   $$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{1-\cos\xi}{\xi^2}, \text{ se } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \\ \frac{1}{2}, \text{ se } \xi = 0. \end{cases}$$

   Dado $\xi \neq 0$, obtemos

   $$\frac{1 - \cos\xi}{\xi^2} = \frac{\frac{\xi^2}{2!} - \frac{\xi^4}{4!} + \frac{\xi^6}{6!} - \cdots}{\xi^2} = \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4!} + \frac{\xi^4}{6!} - \cdots.$$

   Donde segue,

   $$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4!} + \frac{\xi^4}{6!} - \cdots, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{C}.$$

   Assim, φ é inteira. Encontramos então

   $$f(z) = \int_\Gamma \frac{g(\xi)\varphi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \text{ para todo } z \in V.$$

   A função $g\varphi$ é holomorfa em Ω. Pelo teorema de Cauchy homológico temos

   $$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\xi)\varphi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \mathrm{Ind}_\Gamma(z) g(z)\varphi(z) = g(z)\varphi(z), \text{ para todo } z \in V.$$

   Logo,

   $$(6.1) \qquad f(z) = 2\pi i g(z)\varphi(z) = \begin{cases} 2\pi i\frac{g(z)(1-\cos z)}{z^2}, \text{ se } z \in V \setminus \{0\}, \\ \\ \pi i g(0), \text{ se } z = 0. \end{cases}$$

(b) Lema. Seja $F : O \to \mathbb{C}$ contínua com O um aberto em $\mathbb{C}$. Seja $\gamma : [0,1] \to O$ uma curva de classe C^1 por partes. Seja w um ponto arbitrário no aberto $W = O \setminus \text{Imagem}(\gamma)$. Sob tais hipóteses, a função

$$\Phi(w) = \int_\gamma \frac{F(z)}{z-w}dz$$

é holomorfa no aberto W e

$$\Phi'(w) = \int_\gamma \frac{F(z)}{(z-w)^2}dz.$$

Verificação.
Desenvolvendo a integral encontramos

$$\Phi(w) = \int_0^1 \frac{F(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}dt.$$

Sendo que a função

$$h(w,t) = \frac{F(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}, \text{ onde } (w,t) \in W \times [0,1],$$

é contínua em cada $W \times [t_j, t_{j+1}]$, onde $\{t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ é uma partição de $[0,1]$, e holomorfa na primeira variável. Ainda,

$$\frac{\partial h}{\partial w}(w,t) = \frac{F(\gamma(t))\gamma'(t)}{\left(\gamma(t)-w\right)^2}$$

é contínua em $W \times [0,1]$. Pela regra de Leibnitz complexa, Φ é derivável e

$$\Phi'(w) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial w}(w,t)dt = \int_0^1 \frac{F(\gamma(t))\gamma'(t)}{\left(\gamma(t)-w\right)^2}dt = \int_\gamma \frac{F(z)}{(z-w)^2}dz \blacksquare$$

Retornemos ao problema original.
Pelas hipóteses sobre Γ e V e pelo teorema de Cauchy homológico segue

$$f(a) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \;=\; \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z-a}dz, \text{ para todo } a \in V.$$

Assim, pelo lema provado acima temos

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz, \text{ para todo } a \in V.$$

Logo,

$$\lambda(a) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = 2\pi i f'(a).$$

Por (6.1) encontramos

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= 2\pi i[g'(a)\varphi(a) + g(a)\varphi'(a)] \\
&= 2\pi i\left[g'(a)\frac{1-\cos a}{a^2} + g(a)\frac{a^2\sin a - 2a(1-\cos a)}{a^4}\right].
\end{aligned}
$$

Para encerrar,

$$
\lambda \ = -\frac{4\pi^2}{a^3}\left\{g'(a)a(1-\cos a) + g(a)[a\sin a - 2(1-\cos a)]\right\} \clubsuit
$$

7. *Sejam* Ω *um aberto não vazio de* $\mathbb{C}$ *e* $[a,b]$ *um intervalo compacto de* $\mathbb{R}$. *Consideremos duas funções Riemann-integráveis* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *e* $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$. *Suponhamos que* $\varphi(t) \notin \Omega$ *para todo* $t \in [a,b]$.

   Prove que a função $F : \Omega \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$F(z) = \int_a^b \frac{\psi(t)}{\varphi(t) - z} dt$$

   é analítica.
   Dica. *Considere um ponto* $\zeta \in \Omega$ *e desenvolva* $F(z)$ *em uma série de potências em um disco* $D(\zeta; r)$ *com um raio* r *conveniente.*

   Determine então o maior aberto conexo de $\mathbb{C}$ *no qual é analítica a função*

$$G(z) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 - e^z} dt.$$

Solução.

◇ Fixemos um arbitrário $\zeta \in \Omega$. Seja $r > 0$ tal que $D(\zeta; r) \subset \Omega$.
Observemos que $r < d(\zeta; \Omega^c)$ [a igualdade é impossível].
Valem as desigualdades

$$|z - \zeta| \leq r < d(\zeta; \Omega^c) \leq |\varphi(t) - \zeta|, \quad \text{para quaisquer } z \in D(\zeta; r) \text{ e } t \in [a,b].$$

Logo,

$$\frac{|z - \zeta|}{|\varphi(t) - \zeta|} \leq \frac{r}{d(\zeta; \Omega^c)} = \lambda < 1.$$

A série geométrica

$$\sum_{n \geq 0} \lambda^n$$

converge. Então, pelo teste-M de Weierstrass concluímos que a série

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(t) - z} &= \frac{1}{\varphi(t) - \zeta - (z - \zeta)} \\ &= \frac{1/[\varphi(t) - \zeta]}{1 - \frac{z - \zeta}{\varphi(t) - \zeta}} \\ &= \frac{1}{[\varphi(t) - \zeta]} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - \zeta}{\varphi(t) - \zeta} \right)^n, \end{aligned}$$

converge uniformemente conforme t varia em $[a,b]$ e z varia em $D(\zeta; r)$.

A função $\psi(t)$ é limitada, pois Riemann-integrável. Temos então

$$\frac{\psi(t)}{\varphi(t) - z} = \frac{\psi(t)}{[\varphi(t) - \zeta]} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - \zeta}{\varphi(t) - \zeta} \right)^n,$$

com convergência uniforme para t percorrendo $[a,b]$ e z percorrendo $D(\zeta; r)$.

Desta forma, integrando em $[a,b]$ temos

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_a^b \frac{\psi(t)}{\varphi(t)-z}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_a^b \frac{\psi(t)}{[\varphi(t)-\zeta]^{n+1}}dt\right](z-\zeta)^n, \quad \text{para todo } z \in D(\zeta;r). \end{aligned}$$

Logo, F é analítica em Ω.

◇ Aplicando o resultado provado acima para

$$\psi(t) = \sin t, \quad \varphi(t) = t^2 \quad \text{e} \quad [a,b] = [0,1]$$

temos que

$$F(z) = \int_0^1 \frac{\sin tt}{t^2 - z}dt$$

é analítica em $[0,1]^c$ pois Imagem$(\varphi) = [0,1]$.

Seja então o conjunto

$$X = \{z \in \mathbb{C} : e^z \in [0,1]\} = \exp^{-1}\Big([0,1]\Big).$$

Evidentemente X é fechado.

Escrevendo $z = x + yi$ temos $e^z = e^x e^{iy} \in [0,1]$. Logo,

$$e^x \in [0,1] \quad \text{e} \quad y \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Assim,

$$x \in (-\infty, 0] \quad \text{e} \quad y \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Logo,

$$X = \{z = x + iy : x \in (-\infty, 0] \ \text{ e } \ y \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

O conjunto

$$O = X^c$$

é aberto e

$$\exp(O) \subset [0,1]^c.$$

Portanto,

$$(F \circ \exp)(z) \ \text{ á analítica } \ \text{no aberto } O.$$

Notemos que O é conexo por caminhos e portanto conexo.

Notemos também que

$$(F \circ \exp)(z) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 - e^z}dt = G(z), \quad \text{para todo } z \in O.$$

Por fim, não podemos adicionar pontos z, pertencentes ao conjunto X, ao domínio de $G(z)$ pois caso contrário temos $t^2 - e^z = 0$ para algum $t \in [0,1]$ ♣

8. *Compute as integrais*

$$(a) \qquad \int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z^2-3z+2}dz.$$

$$(b) \qquad \int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}dz.$$

Sugestão. *Desenvolva os integrandos pelo método de frações parciais.*

Solução.

Seja

$$\gamma(\theta) = \frac{3}{2}e^{i\theta}, \text{ onde } \theta \in [0, 2\pi].$$

(a) Temos,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{1}{z^2-3z+2}dz &= \int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z-2)}dz \\ &= \int_\gamma \frac{1}{z-2}dz - \int_\gamma \frac{1}{z-1}dz \\ &= \mathrm{Ind}(\gamma; 2)2\pi i - \mathrm{Ind}(\gamma; 1)2\pi i \\ &= 0 - 2\pi i. \end{aligned}$$

(b) Temos

$$\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z} = \frac{3z^2-6z+2}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int\limits_\gamma \frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}dz &= \int_\gamma \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\right) dz \\ &= [\mathrm{Ind}(\gamma; 0) + \mathrm{Ind}(\gamma; 1) + \mathrm{Ind}(\gamma; 2)]2\pi i \\ &= (1+1+0)2\pi i \\ &= 4\pi i \clubsuit \end{aligned}$$

9. *Seja Ω um aberto não vazio e arbitrário em $\mathbb{C}$. Seja (f_n) uma sequência de funções analíticas em Ω que converge compactamente a uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Mostre que:*

   (a) f é analítica em Ω.

   (b) a sequência $(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Duas Soluções.

Seja $z_0 \in \Omega$ e um disco não degenerado $D(z_0; r) \subset \Omega$. Devido às hipóteses, temos que $f_n \in \mathcal{A}(B(z_0; r)) \cap C(D(z_0; r))$, para cada n, e também que

$$f_n \ \text{ converge uniformemente a } f \text{ em } D(z_0; r).$$

1ª Solução (integration-free).

(a) Pelo corolário [6.20(b)] ao teorema da convergência de Weierstrass segue que f é analítica em $B(z_0; r)$. Variando z_0 vemos que f é analítica em Ω.

(b) Pelo corolário [Corolário 6.20(c)] ao teorema da convergência de Weierstrass segue que $(f_n^{(k)})$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ nos compactos de $B(z_0; r)$.

Seja K um compacto em Ω. Dado $z \in K$, seja um raio $r = r(z) > 0$ tal que

$$z \in B(z; r(z)) \subset D(z; 2r(z)) \subset \Omega.$$

Devido à compacidade de K, existem $z_1, \ldots, z_N$ em K tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(z_j; r(z_j)) \subset \bigcup_{j=1}^{N} D(z_j; 2r(z_j)) \subset \Omega.$$

Fixemos j em $\{1, \ldots, N\}$.

Cada função f_n é analítica em $B(z_j; 2r(z_j))$ e contínua em $D(z_j; 2r(z_j))$. Ainda mais, por hipótese $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f em $D(z_j; 2r(z_j))$.

Portanto, pelo citado corolário [Corolário 6.20(c)] concluímos que

$$\begin{cases} (f_n^{(k)})_{\mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } f^{(k)} \text{ nos compactos de } B(z_j; 2r(z_j)), \\ \text{para cada } k = 0, 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Segue então que

$$\begin{cases} (f_n^{(k)})_{\mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } f^{(k)} \text{ no disco } D(z_j; r(z_j)), \\ \text{para cada } k = 0, 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

A seguir, variemos j no conjunto $\{1, \ldots, N\}$.

Então, devido à inclusão $K \subset D(z_1; r(z_1)) \cup \cdots \cup D(z_N; r(z_N))$ obtemos que

$$\Big\{ \ (f_n^{(k)})_{\mathbb{N}} \text{ converge uniformemente a } f^{(k)} \text{ no compacto } K, \ \text{ para cada } k \geq 0 \clubsuit$$

Vide próxima página

2ª Solução.

Mantenhamos a notação já introduzida.

(a) Pela fórmula integral de Cauchy [Teorema 10.11] temos

$$(9.2.1) \qquad f_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0;r)} \frac{f_n(z)}{z-w} dz, \text{ para todo } w \in B(z_0;r),$$

com $S(z_0;r)$ a circunferência compacta $\{z : |z-z_0| = r\}$.
Fixemos um ponto $w \in B(z_0;r)$. Devido às hipóteses segue que

$$\frac{f_n(z)}{z-w} \longrightarrow \frac{f(z)}{z-w} \text{ uniformemente, para } z \text{ variando em } S(z_0;r).$$

Também por hipótese, $f_n(w) \to f(w)$. Impondo $n \to \infty$ em (9.2.1) acima temos

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0;r)} \frac{f(z)}{z-w} dz, \quad \text{para todo } w \in B(z_0;r).$$

Pelo Teorema da derivação sob o sinal de integração [10.4] segue que f é derivável e então analítica.

(b) É trivial ver que basta mostrarmos que f_n' converge compactamente a f'.
Sejam z_0 e r como acima e ρ tal que $0 < \rho < r$. Consideremos um arbitrário

$$w \text{ em } D(z_0;\rho).$$

Pela fórmula integral de Cauchy temos

$$f'(w) - f_n'(w) \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0;r)} \frac{f(z)-f_n(z)}{(z-w)^2} dz.$$

Então, pela estimativa M-L encontramos

$$|f'(w) - f_n'(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\sup_{z \in S(z_0;r)} |f(z) - f_n(z)| \right) \frac{1}{(r-\rho)^2} 2\pi r.$$

Donde segue que

$$f_n' \text{ converge uniformemente a } f', \text{ sobre } D(z_0;\rho), \text{ para todo } 0 < \rho < r.$$

Consideremos a seguir o maior raio $R > 0$ tal que

$$B(z_0;R) \subset \Omega.$$

Pelo já provado concluímos que $f_n \to f$ uniformemente nos subconjuntos compactos de $B(z_0;R)$, onde z_0 é um ponto arbbitrário de Ω.
Para encerrar, seja K um compacto qualquer em Ω. Cada ponto de K é o centro de um disco não degenerado, compacto e contido em Ω. Em cada um destes discos, f_n' converge uniformemente a f. Por compacidade, uma quantidade finita destes discos recobrem K. Segue então que

$$f_n' \longrightarrow f' \text{ uniformemente sobre o compacto } K \clubsuit$$

10. *(a) Seja* $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Consideremos a transformação de Möbius*

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Mostre que temos $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ *se e só se podemos escolher* a, b, c *e* d *em* $\mathbb{R}$.

(b) Seja Γ *uma circunferência (generalizada) por* z_2, z_3 *e* z_4 *em* $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Dois pontos* z *e* z^*, *ambos em* $\mathbb{C}_\infty$, *são ditos* simétricos *com relação a* Γ *se*

$$[z^*, z_2, z_3, z_4] = \overline{[z, z_2, z_3, z_4]}.$$

Mostre que a definição de simetria independe dos pontos escolhidos em Γ. *[Isto é, se* w_2, w_3, w_4 *são outros três pontos em* Γ, *então a equação destacada acima é satisfeita se e somente se* $[z^*, w_2, w_3, w_4] = \overline{[z, w_2, w_3, w_4]}$.*]*

Conclua que, dada uma aplicação de Möbius φ *e duas circunferências (generalizadas)* Γ_1 *e* Γ_2 *onde* $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$, *então a aplicação* φ *mapeia um par de pontos* (α, β) *simétrico em relação a* Γ_1 *no par* $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ *simétrico em relação a* Γ_2.

Solução (integration-free).

(a)($\Leftarrow$) Se a, b, c, e d são reais então é claro que $\varphi(\mathbb{R}_\infty) \subset \mathbb{R}_\infty$. Analogamente,

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

satisfaz $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_\infty) \subset \mathbb{R}_\infty$. Logo, $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$.

($\Rightarrow$) [Se $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$, mostremos que podemos escolher a, b, c e d reais.]

1ª Solução. Solução de Ana Kelly de Oliveira.

Por hipótese, existem z_1, z_2 e z_3, todos em $\mathbb{R}_\infty$, tais que φ aplica a terna z_1, z_2, z_3 ordenadamente na terna $0, 1, \infty$.

- ⋄ Se z_1, z_2 e z_3 são todos reais, a transformação é dada por

$$\varphi(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \text{ com coeficientes reais.}$$

- ⋄ Se $z_1 = \infty$, então φ é dada por

$$\varphi(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \text{ com coeficientes reais.}$$

- ⋄ Se $z_2 = \infty$, então φ é dada por

$$\varphi(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}, \text{ com coeficientes reais.}$$

- ⋄ Se $z_3 = \infty$, então φ é dada por

$$\varphi(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \text{ com coeficientes reais.}$$

2ª Solução.

(1) Se $\varphi(\infty)=\infty$, então temos $c=0$. Logo, $a\neq 0$ e $d\neq 0$. Escrevemos

$$\varphi(z)=\frac{az+b}{0.z+d}=a'z+b'=\frac{a'z+b'}{0.z+1}, \quad \text{com } a'=\frac{a}{d} \text{ e } b'=\frac{b}{d}.$$

Então, $b'=\varphi(0)$ e $\varphi(1)=a'+b'$ são reais. Logo, a' é real e $a'.1\neq 0$.

(2) A inversão

$$Inv(z)=\frac{1}{z}=\frac{0z+1}{1z+0}, \quad \text{satisfaz } Inv(\mathbb{R}_\infty)=\mathbb{R}_\infty.$$

(3) Se $\varphi(0)=\infty$, então temos $d=0$. Logo, $b\neq 0$ e $c\neq 0$. Escrevemos

$$\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+0}=(a/c)+\frac{(b/c)}{z}=\frac{a'z+b'}{1.z+0}, \text{ com } a'=(a/c) \text{ e } b'=(b/c).$$

Então, $b'=\varphi(0)$ e $\varphi(1)=a'+b'$ são reais. Logo, a' é real e $b'.1\neq 0$.

(4) Se $\varphi(0)=r\in\mathbb{R}$, a aplicação de Möbius com coeficientes reais

$$T(z)=z-r=\frac{1z-r}{0z+1} \quad \text{satisfaz } T(\mathbb{R}_\infty)=\mathbb{R}_\infty \text{ e } T(r)=0.$$

Então, por (2) e (3) a bijeção de Möbius

$$\psi(z)=\frac{1}{(T\circ\varphi)(z)} \quad \text{satisfaz } \psi(\mathbb{R}_\infty)=\mathbb{R}_\infty \text{ e } \psi(0)=\infty.$$

Por (3), a aplicação ψ é dada por uma matriz com coeficientes reais. Temos

$$\varphi=T^{-1}\circ Inv\circ\psi.$$

As aplicações T^{-1} [vide acima], $Inv(z)$ e ψ [vide (2) e (3)] são representáveis por matrizes inversíveis com coeficientes reais. Por fim, sabemos que φ é representável pelo produto destas três matrizes.

(b) **Lema 1.** *Se φ é uma transformação de Möbius, então*

$$[\varphi(\zeta),\varphi(\zeta_2),\varphi(\zeta_3),\varphi(\zeta_4)]=[\zeta,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4],$$

quaisquer que sejam ζ_2,ζ_3 e ζ_4 distintos em $\mathbb{C}_\infty$ e ζ arbitrário em $\mathbb{C}_\infty$.

Verificação.

Seja T a aplicação de Möbius mapeando ζ_2,ζ_3,ζ_4 em $1,0,\infty$, em ordem. Então, $T\circ\varphi^{-1}$ mapeia $\varphi(\zeta_2),\varphi(\zeta_3),\varphi(\zeta_4)$ em $1,0,\infty$ e temos

$$[\varphi(\zeta),\varphi(\zeta_2),\varphi(\zeta_3),\varphi(\zeta_4)]=(T\circ\varphi^{-1})(\varphi(\zeta)=T(\zeta)=[\zeta,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4]\ \blacksquare$$

Vide próxima página

1ª Prova da primeira afirmação dada no item (b). Solução baseada na de Jeovanny de J. M. Acevedo e na de Marcelo K. Inagaki (para a questão 17).

Comecemos com um resultado "trivial".

Lema 2. *Sejam ζ_2, ζ_3 e ζ_4 distintos em $\mathbb{C}_\infty$ e ζ_1 arbitrário em $\mathbb{C}_\infty$. Então,*

$$\overline{[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4]} = [\overline{\zeta_1}, \overline{\zeta_2}, \overline{\zeta_3}, \overline{\zeta_4}].$$

Verificação.

Seja S a aplicação de Möbius mapeando $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ ordenadamente em $1, 0, \infty$. Por definição, existem a, b, c, e d em $\mathbb{C}$ (com $ad - bc \neq 0$) tais que

$$S(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \text{ para todo } \zeta \in \mathbb{C}_\infty.$$

Então, a aplicação de Möbius

$$S^*(\zeta) = \frac{\overline{a}\zeta + \overline{b}}{\overline{c}z + \overline{d}}, \text{ onde } \zeta \in \mathbb{C}_\infty,$$

satisfaz

$$S^*(\overline{\zeta}) = \overline{S(\zeta)} \text{ e mapeia } \overline{\zeta_2}, \overline{\zeta_3}, \overline{\zeta_4} \text{ em } 1, 0, \infty \text{ em ordem.}$$

Pela esta última identidade e a definição de produto cruzado segue

$$\overline{[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4]} = \overline{S(\zeta_1)} = S^*(\overline{\zeta_1}) = [\overline{\zeta_1}, \overline{\zeta_2}, \overline{\zeta_3}, \overline{\zeta_4}] \clubsuit$$

A seguir, sejam z_2, z_3 e z_4 em $\mathbb{C}_\infty$ e determinando Γ. Sejam z e z^* tais que

$$[z^*, z_2, z_3, z_4] = \overline{[z, z_2, z_3, z_4]}.$$

Seja T a aplicação de Möbius mapeando ordenadamente z_2, z_3, z_4 em $1, 0, \infty$ (os quais determinam $\mathbb{R}_\infty$). Devido à última identidade acima encontramos

$$T(z^*) = \overline{T(z)} \text{ ou, equivalentemente, } \overline{T(z^*)} = T(z).$$

Como T estabelece bijeções entre circunferências generalizadas, temos

$$T(\Gamma) = \mathbb{R}_\infty.$$

Sejam w_2, w_3 e w_4 outra terna de pontos determinando Γ. Destaquemos que os pontos $T(w_2)$, $T(w_3)$ e $T(w_4)$ estão todos em $\mathbb{R}_\infty$.
Com tal destaque, o Lema 1, o Lema 2 e a identidade $\overline{T(z^*)} = T(z)$ obtemos

$$\begin{aligned}
[z^*, w_2, w_3, w_4] &= [T(z^*), T(w_2), T(w_3), T(w_4)] \\
&= \overline{\left[\overline{T(z^*)}, \overline{T(w_2)}, \overline{T(w_3)}, \overline{T(w_4)}\right]} \\
&= \overline{[T(z), T(w_2), T(w_3), T(w_4)]} \\
&= \overline{[z, w_2, w_3, w_4]} \clubsuit
\end{aligned}$$

Vide próxima página

2ª Prova da primeira afirmação dada em (b). Prova da conclusão.

Lema 3. *Seja Γ como dada, Λ uma outra circunferência generalizada e φ uma aplicação de Möbius, com $\varphi(\Gamma) = \Lambda$. Então, z e z^* são simétricos em relação a Γ se e somente se $\varphi(z)$ e $\varphi(z^*)$ são simétricos em relação a Λ.*
Verificação.
Sejam z_2, z_3 e z_4 determinando Γ. Pelo Lema 1, temos

$$[z, z_2, z_3, z_4] = \overline{[z^*, z_2, z_3, z_4]}$$

se e somente se

$$[\varphi(z), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)] = \overline{[\varphi(z^*), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)]} \blacksquare$$

Devido ao Lema 3, a definição de simetria em relação a Γ, para os pontos z e z^*, independe da particular escolha de pontos determinando Γ se e somente se a definição de simetria em relação a Λ, para os pontos $\varphi(z)$ e $\varphi(z^*)$, independe da particular escolha de três pontos determinando Λ.

Desta forma, e como existe uma aplicação de Möbius estabelecendo uma bijeção entre Γ e $\mathbb{R}_\infty$, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\Gamma = \mathbb{R}_\infty.$$

Consideremos então x_2, x_3 e x_4 distintos em $\mathbb{R}_\infty$ e z e z^* tais que

(Eq.10.1) $$[z^*, x_2, x_3, x_4] = \overline{[z, x_2, x_3, x_4]}.$$

A aplicação de Möbius T que mapeia x_2, x_3, x_4 em $1, 0, \infty$ satisfaz

$$T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty.$$

Logo, pela parte (a) temos

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ com } a, b, c \text{ e } d \text{ reais e } ad - bc \neq 0.$$

Devido à equação (Eq. 10.1) temos

$$T(z^*) = \overline{T(z)}.$$

Logo, como a, b, c e d são reais,

$$\frac{az^*+b}{cz^*+d} = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}.$$

Donde segue

$$acz^*\overline{z} + adz^* + bc\overline{z} + bd = acz^*\overline{z} + ad\overline{z} + bcz^* + bd$$

e portanto

$$(ad - bc)z^* = (ad - bc)\overline{z}.$$

Consequentemente (pois $ad - bc \neq 0$),

$$z^* = \overline{z}.$$

Logo, z^* independe da escolha de pontos x_2, x_3 e x_4 determinando $\mathbb{R}_\infty$.

Concluímos entao que a definição de pontos simétricos em relação a Γ independe da escolha dos pontos z_2, z_3 e z_4 determinando Γ.

A conclusão. A última afirmação dada em (b) foi provada no Lema 3.♣

11. *Defina* produto cruzado.

No que segue, considere z_1, z_2, z_3 e z_4 números distintos em $\mathbb{C}$.

(a) *Prove a fórmula para o produto cruzado*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

e prove que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência ou a uma mesma reta se e somente se seu produto cruzado é um número real.

(b) *Suponha que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência, e nesta ordem (suponha ou o sentido anti-horário ou o horário). Mostre que*

$$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| \;=\; |z_1 - z_2||z_3 - z_4| \;+\; |z_2 - z_3||z_4 - z_1|.$$

Solução (integration-free).

Consideremos ζ_2, ζ_3 e ζ_4 distintos em $\mathbb{C}_\infty$ e ζ_1 arbitrário em $\mathbb{C}_\infty$. Seja T a (única) aplicação de Möbius que mapeia ζ_2, ζ_3 e ζ_4 ordenadamente em $1, 0, \infty$. Definimos o produto cruzado

$$[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4]$$

como o elemento $T(\zeta_1) \in \mathbb{C}_\infty$. Isto é,

$$[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] = T(\zeta_1).$$

(a) Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos distintos. Seja $w = T(z)$ a aplicação de Möbius mapeando z_2, z_3 e z_4 ordenadamente em $1, 0$ e ∞. Então, temos

$$T(z) = \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Donde segue,

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

A seguir, observemos que os pontos distintos z_2, z_3, z_4 determinam uma circunferência generalizada Γ. Então, como T é uma **bijeção** entre circunferências generalizadas, concluímos que

$$T(\Gamma) = \mathbb{R}_\infty.$$

Donde segue que (notemos que $z_1 \neq z_4$ e que $T(z_1)$ é um número)

$$z_1 \in \Gamma \iff T(z_1) = [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}.$$

Isto mostra que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência generalizada se e somente se $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ é um número real.

(b) Suponhamos que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência Γ. Suponhamos que tais pontos estão ordenados no sentido anti-horário. Seja T a aplicação de Möbius mapeando z_2, z_3 e z_4 ordenadamente em $1, 0, \infty$. Pelo item (a) segue

$$\text{(Eq.11.1)} \qquad T(z_1) = [z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = r \in \mathbb{R}.$$

Como T é uma bijeção entre circunferências generalizadas e $\mathbb{R}_\infty$ é a circunferência generalizada determinada por 1, 0 e ∞, concluímos que

$$T(\Gamma) = \mathbb{R}_\infty.$$

A seguir, consideremos o seguinte arco de circunferência em Γ: o arco orientado no sentido anti-horário com início no ponto z_2, passando pelo ponto z_3 e com final no ponto z_4. As extremidades z_2 e z_4 pertencem ao arco. Indiquemos tal arco por γ.

Observemos que $z_1 \in \Gamma \setminus \gamma$. Ainda mais, $\Gamma \setminus \gamma$ também é um arco (um arco na circunferência Γ e não contendo as extremidades z_2 e z_4) e portanto $\Gamma \setminus \gamma$ é conexo por caminhos e conexo. Pela continuidade de T segue que

$$T(\Gamma \setminus \gamma) \text{ é um conexo na reta real.}$$

Assim, $T(\Gamma \setminus \gamma)$ é um intervalo em $\mathbb{R}$.

Afirmação. $T(\Gamma \setminus \gamma) = (1, +\infty)$.

Verificação. Pela continuidade de T temos:

$$\begin{cases} \text{se } z_1 \to z_2, \text{ com } z_1 \text{ em } \Gamma \setminus \gamma, \text{ então } T(z_1) \to T(z_2) = 1, \\ \text{se } z_1 \to z_4, \text{ com } z_1 \text{ em } \Gamma \setminus \gamma, \text{ então } T(z_1) \to T(z_4) = \infty. \end{cases}$$

Ainda mais, os elementos $1 = T(z_2)$ e $\infty = T(z_4)$ não pertencem a $T(\Gamma \setminus \gamma)$. Concluímos então que

$$T(\Gamma \setminus \gamma) = (1, \infty) \blacksquare$$

A seguir, observemos a identidade

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4).$$

Donde segue

$$\text{(Eq. 11.2)} \qquad \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} + 1 = r.$$

Pela equação (Eq. 11.1) e pela afirmação acima, temos $r > 1$. Logo, a fração no lado esquerdo de (Eq. 11.2) é um número real estritamente positivo.

Vide próxima página

Temos então
$$\left|\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\right| = \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$
e
$$\left|\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\right| = r.$$
Sustituindo estas duas últimas identidades na equação (Eq.2) encontramos
$$\left|\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\right| + 1 = \left|\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\right|.$$
Donde segue,
$$|z_1-z_2|\,|z_3-z_4| + |z_1-z_4|\,|z_2-z_3| = |z_1-z_3|\,|z_2-z_4| \clubsuit$$

12. *Prove o teorema fundamental da álgebra como um corolário do teorema de Rouché.*

Solução (integration-free).

Teorema Fundamental da Álgebra. *Seja $p(z)$ um polinômio complexo de grau $n \geq 1$. Então, $p(z)$ tem n zeros (contados com suas multiplicidades) em $\mathbb{C}$.*

Prova.

Escrevamos $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. Seja $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$.

Temos,

$$|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}| \leq M(1 + |z| + \cdots + |z|^{n-1}).$$

Claramente, existe $r > 0$ tal que

$$M(1 + r + \cdots + r^{n-1}) < |a_n| r^n.$$

Donde segue

$$|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}| < |a_n z^n|, \quad \text{para todo } |z| = r.$$

Pelo teorema de Rouché, os polinômios

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \quad \text{e} \quad a_n z^n$$

tem o mesmo número de zeros (contadas as multiplicidades) na bola $B(0; r)$.

Notemos que $z = 0$ é um zero de ordem n do polinômio $a_n z^n$.

Logo, $p(z)$ tem n zeros na bola $B(0; r)$. Portanto, $p(z)$ tem n zeros em $\mathbb{C}$ ♣

13. *Sejam f e f_n, para $n = 1, 2, \ldots$, analíticas e não constantes em um aberto e conexo Ω. Suponhamos que*

$$f_n \ \text{ converge compactamente a } \ f.$$

Seja $\alpha \in \Omega$ e $r > 0$, com $D(\alpha; r) \subset \Omega$. Seja $\gamma(\theta) = \alpha + re^{i\theta}$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Suponhamos que f não se anula na imagem de γ. *Então, para todo n grande o suficiente, f_n e f tem o mesmo número de zeros no interior de γ.*

Solução (integration-free).

- ◇ Contra-exemplo de Jeovanny de J. M. Acevedo.

  O resultado acima é falso se f se anula na circunferência $S(\alpha; r)$. Tomemos

  $$f(z) = z + 1 \quad \text{e} \quad f_n(z) = z + 1 - \frac{1}{n}, \text{ para quaisquer } n \geq 1 \text{ e } z \in \mathbb{C}.$$

  Então, f não se anula em $B(0; 1)$ e (f_n) converge uniformemente a f em $\mathbb{C}$. Entretanto, cada f_n tem um zero no ponto

  $$-1 + \frac{1}{n} \ \text{ que pertence à bola } B(0; 1).$$

A seguir, resolvemos a questão.

Seja

$$m = \min_{z \in S(\alpha; r)} |f(z)| > 0.$$

Como f_n converge compactamente a f, existe N satisfazendo

$$|f_n(z) - f(z)| < m, \quad \text{para quaisquer } n \in \mathbb{N} \text{ e } z \in S(\alpha; r).$$

Donde segue

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)|, \text{ para quaisquer } n \geq N \text{ e } z \in S(\alpha; r).$$

Pelo teorema de Rouché concluímos que

$$f_n = (f_n - f) + f \quad \text{e} \quad f$$

tem a mesma quantidade de zeros em $B(\alpha; \rho)$, para todo $n \geq N$ ♣

14. (a) *Seja $p(z)$ um polinômio* não nulo *com coeficientes reais não negativos, com*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \text{ onde } 0 \le a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n.$$

Mostre que todos os zeros de $p(z)$ estão dentro do disco unitário $D(0;1)$.
Sugestão. *Aplique o teorema de Rouché à função $(1-z)p(z)$.*

(b) *Prove que, para todo $0 < \rho < 1$, o polinômio*

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n$$

não tem zeros na bola $B(0;\rho)$, se n é grande o suficiente.

Solução (integration-free).

Evidentemente, podemos supor $a_n \neq 0$.

(a) Temos

$$(1-z)p(z) = a_0 + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1}.$$

Fixemos $r > 1$. Consideremos ζ tal que $|\zeta| = r$. Encontramos

$$\begin{aligned}
|(1-\zeta)p(\zeta) + a_n\zeta^{n+1}| &\le a_0 + (a_1 - a_0)r + (a_2 - a_1)r^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})r^n \\
&= a_0(1-r) + a_1 r(1-r) + a_2 r^2(1-r) + \cdots + a_{n-1}r^{n-1}(1-r) + a_n r^n \\
&< a_n r^{n+1} \\
&= |a_n \zeta^{n+1}|.
\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema de Rouché segue que

$$(1-z)p(z) \ \text{ e } \ a_n z^{n+1}$$

tem $n+1$ zeros em $B(0;r)$, para todo raio $r > 1$. É então claro que

$$p(z) \text{ tem } n \text{ zeros em } B(0;r), \text{ para todo raio } r > 1.$$

Portanto, todos os n zeros de $p(z)$ estão no disco $D(0;1)$.

Vide próxima página

(b) Sabidamente,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} z^m = \frac{1}{1-z} \text{ converge uniformemente em } D(0;\rho), \text{ para cada } 0<\rho<1.$$

Então, pelo teorema de derivação de séries de potências,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ converge uniformemente em } D(0;\rho), \text{ se } 0<\rho<1.$$

Fixemos ρ com $0<\rho<1$. Seja

$$m = \min_{|z|\leq\rho} \left|\frac{1}{(1-z)^2}\right| > 0 \qquad [\text{é claro que } m>0].$$

Sejam $P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n$ os polinômios enunciados.

Por definição de convergência uniforme, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| P_n(z) \;-\; \frac{1}{(1-z)^2} \right| \;\leq\; \frac{m}{2}, \text{ para quaisquer } n \geq N \text{ e } z \in D(0;\rho).$$

Donde segue

$$|P_n(z)| \;\geq\; \left|\frac{1}{(1-z)^2}\right| - \frac{m}{2} \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}, \text{ para quaisquer } n \geq N \text{ e } z \in D(0;\rho).$$

Assim, $P_n(z)$ não se anula em $B(0;\rho)$ se $n \geq N$ ♣

15. *Sejam Ω um aberto no plano complexo e $[a, b]$ um intervalo compacto na reta. Seja $f : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Suponha f holomorfa na primeira variável, para cada t fixado em $[a, b]$. Considere a função*

$$F(z) = \int_a^b f(z, t)dt, \ \textit{onde } z \in \Omega.$$

Mostre que

(a) *F é contínua.*

(b) *F é holomorfa.*

(c) *Vale a fórmula,*

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)dt, \ \textit{para todo } z \in \Omega.$$

Solução. Fixemos z_0 em Ω e um disco não degenerado $D(z_0; r) \subset \Omega$.

(a) Então, f é uniformemente contínua no compacto $D(z_0; r) \times [a, b]$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe um δ, com $0 < \delta < r$, satisfazendo: qualquer que seja $|h| < \delta$ temos $|f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)| < \epsilon$ para todo $t \in [a, b]$. Donde segue

$$|F(z_0 + h) - F(z_0)| \leq \int_a^b \epsilon \, dt = \epsilon(b - a) \ \ \text{[i.e., } F \text{ é contínua em } z_0\text{]}.$$

(b) Sejam Δ um triângulo fechado e convexo contido em Ω e uma parametrização $\gamma = \gamma(s) : [0, 1] \to \Omega$ de $\partial\Delta$. Pelo teorema de Fubini para funções contínuas na variável $(s, t) \in [0, 1] \times [a, b]$ e a valores complexos temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} F(z)dz &= \int_0^1 \int_a^b f(\gamma(s), t)\gamma'(s)dtds \\
&= \int_a^b \int_0^1 f(\gamma(s), t)\gamma'(s)dsdt \\
&= \int_a^b \left(\int_{\partial\Delta} f(z, t)dz \right) dt.
\end{aligned}$$

Como $f(z, t)$ (com t fixo) é holomorfa, por Cauchy-Goursat segue que o integrando na última integral imediatamente acima é zero. Donde segue

$$\int_{\partial\Delta} F(z)dz = 0.$$

Sendo f contínua [item (a)], pelo teorema de Morera temos $F \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(c) Seja $\sigma(s) = z_0 + re^{2\pi is}$, $s \in [0,1]$. Pela fórmula integral de Cauchy para

$$z \mapsto F'(z) \quad \text{e} \quad z \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \text{ [com } t \text{ fixado]}$$

e pelo teorema de Fubini, sob as mesmas hipóteses que em (a), temos

$$\begin{aligned}
F'(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{F(z)}{(z-z_0)^2}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1\int_a^b \frac{f(\sigma(s),t)\,\sigma'(s)}{(\sigma(s)-z_0)^2}dtds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b\int_0^1 \frac{f(\sigma(s),t)\,\sigma'(s)}{(\sigma(s)-z_0)^2}ds\,dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(z,t)}{(z-z_0)^2}\,dz\right)dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt \clubsuit
\end{aligned}$$

16. *Seja* $f : \mathbb{C}\times[0,+\infty) \to \mathbb{C}$ *contínua. Suponha que para cada* z_0 *em* $\mathbb{C}$*, existem um disco* $D(z_0;r)$ *não degenerado e uma função* $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *satisfazendo*

$$|f(z,t)| \leq M(t),\ \text{para todos } z \in D(z_0;r) \text{ e } t \in [0,+\infty),\ \text{e } \int_0^\infty M(t)dt < \infty.$$

Verifique as afirmações abaixo.

(a) *Está bem definida a função* $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\varphi(z) = \int_0^\infty f(z,t)dt.$$

(b) *A função* φ *é contínua.*

(c) *Suponha que* $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ *existe e é contínua em* $\mathbb{C}\times[0,+\infty)$*. Suponha também que para cada ponto* z_0 *no plano existem uma vizinhança compacta* K *do ponto* z_0 *e uma função* $N : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *satisfazendo*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right| \leq N(t),\ \text{para todos } z \in K \text{ e } t \in [0,+\infty),\ \text{e } \int_0^\infty N(t)dt < \infty.$$

Então, φ *é holomorfa e*

$$\varphi'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Solução.

(a) Fixemos $z \in \Omega$. Por hipótese, temos

$$0 \leq |f(z,t)| + \mathrm{Re}(f)(z,t) \leq 2M(t),$$

para alguma função não negativa $M = M(t)$ tal que

$$\int_0^\infty M(t)dt < \infty.$$

Logo, as integrais de Riemann (com integrando maior ou igual a zero)

$$\int_0^r [|f(z,t)| + \mathrm{Re}(f)(z,t)]dt,\ \text{com } 0 \leq r < +\infty,$$

são limitadas e convergem (e crescendo), se $r \to +\infty$, à integral imprópria

$$\int_0^\infty [|f(z,t)| + \mathrm{Re}(f)(z,t)]dt \leq 2\int_0^\infty M(t)dt < \infty.$$

Logo, está bem definida a integral imprópria

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}(f)(z,t)dt.$$

Analogamente para $\mathrm{Im}(f)(z,t)$ [basta trocar f por if]. Segue então que

$$\int_0^\infty f(z,t)dt \text{ converge.}$$

Observemos que [verifique]

$$\left|\int_0^\infty f(z,t)dt\right| \leq \int_0^\infty |f(z,t)|dt \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

(b) Fixemos um ponto z_0 em Ω, um disco $D(z_0;r)$ e uma função $M = M(t)$ como no enunciado. Dado $\epsilon > 0$, é simples ver que existe $m > 0$ tal que

$$\int_m^\infty M(t)dt < \epsilon \text{ [verifique].}$$

Seja $h \in \mathbb{C}$ com $|h| < r$. Temos então

$$|\varphi(z_0+h) - \varphi(z_0)| = \left|\int_0^\infty [f(z_0+h,t) - f(z_0,t)]dt\right|$$

$$\leq \int_0^m |f(z_0+h,t) - f(z_0,t)|dt + \int_m^\infty |f(z_0+h,t) - f(z_0,t)|dt.$$

A última integral acima é (pela desigualdade triangular) menor ou igual a

$$2\int_m^\infty M(t)dt < 2\epsilon.$$

Quanto à penúltima integral, pela continuidade uniforme de $f(z,t)$ no compacto $D(z_0;r) \times [0,m]$ segue que existe um δ, com $0 < \delta < r$, tal que

$$\text{para todo } |h| < \delta \text{ temos } |f(z_0+h,t) - f(z_0,t)| \leq \frac{\epsilon}{m} \text{ para todo } t \in [0,m].$$

Concluímos então que

$$\text{para todo } |h| < \delta \text{ temos } |\varphi(z_0+h) - \varphi(z_0)| < 3\epsilon.$$

Logo, φ é contínua em z_0. Portanto, $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua.

(c) Pelos itens (a) e (b), está bem definida e é contínua a função

$$\Omega \ni z \mapsto \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

A seguir, sejam z_0 em Ω, uma vizinhança compacta K e um função $N(t)$ como enunciados em (c). Podemos supor $K = D(z_0;r)$.
Escrevamos então, para $0 < |h| < r$,

$$D(h) = \frac{\varphi(z_0+h) - \varphi(z_0)}{h} - \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{f(z_0+h,t) - f(z_0,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)\right] dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial z}(z_0+sh,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)\right] ds\, dt.$$

Dado $\epsilon > 0$, devido às hipóteses, existe $m > 0$ grande o suficiente tal que

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right| \leq N(t), \text{ para todos } t > m \text{ e } z \in D(z_0;r), \\ \text{e} \\ \int_m^\infty N(t)dt < \epsilon. \end{cases}$$

Temos então, para $0 < |h| < r$,

$$|D(h)| \leq \int_0^m \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + sh, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) \right| ds\, dt + 2\epsilon.$$

Como $D(z_0; r) \times [0, m]$ é compacto, por continuidade uniforme segue que existe um δ, com $0 < \delta < r$, tal que para todo $0 < |h| < \delta$ temos que a integral iterada imediatamente acima é tal que obtemos

$$|D(h)| < 3\epsilon.$$

Concluímos então que

$$D(h) \to 0 \text{ se } h \to 0 \clubsuit$$

17. *Seja Ω um aberto conexo tal que $0 \notin \Omega$. Seja Ω^* o simétrico de Ω em relação à circunferência S^1. Isto é,*

$$\Omega^* = \{z^* : z \in \Omega\}, \text{ com } z^* \text{ o simétrico de } z \text{ em relação a } S^1.$$

(a) *Mostre que*

$$\Omega^* = \left\{ z^* = \frac{1}{\overline{z}} : z \in \Omega \right\}.$$

(b) *Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, defina $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ por*

$$f^*(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Mostre que f^* é holomorfa.

(c) *Suponha que Ω é simétrico em relação a S^1. Isto é, $\Omega^* = \Omega$. Suponha que f é holomorfa em Ω e que $f(z) \in \mathbb{R}$, para todo $z \in \Omega \cap S^1 \neq \emptyset$. Mostre que*

$$f^* = f.$$

(d) *Enuncie e prove uma versão do Princípio da Reflexão de Schwarz (visto na aula) em que a reta real é substituída por S^1.*

Solução.

(a) **1ª Prova de (a).**

Consideremos os pontos $1, i$ e -1 que determinam S^1. Por definição temos

$$[z^*, 1, i, -1] = \overline{[z, 1, i, -1]}.$$

Isto é,

$$\frac{(z^* - i)(1+1)}{(z^*+1))(1-i)} = \overline{\left[\frac{(z-i)(1+1)}{(z+1))(1-i)}\right]}.$$

Donde segue

$$(z^* - i)(\overline{z}+1)(1+i) = (z^*+1)(\overline{z}+i)(1-i)$$

e então

$$(z^* - i)(\overline{z}+1)2i = (z^*+1)(\overline{z}+i)2.$$

Logo, cancelando "2" e desenvolvendo,

$$i(z^*\overline{z} + z^* - i\overline{z} - i) = z^*\overline{z} + iz^* + \overline{z} + i$$

e então

$$iz^*\overline{z} + 1 = z^*\overline{z} + i.$$

Assim, encontramos

$$(1-i)z^*\overline{z} = 1 - i.$$

Por fim, cancelando $1-i$ obtemos

$$z^* = \frac{1}{\overline{z}},$$

o que mostra que

$$\Omega^* = \left\{ \frac{1}{\overline{z}} : z \in \Omega \right\}.$$

Fim da 1ª prova de (a).

2ª Prova de (a). Baseada na solução de Marcelo K. Inagaki.

Lema. *Sejam ζ_2, ζ_3 e ζ_4 distintos em $\mathbb{C}_\infty$ e ζ_1 arbitrário em $\mathbb{C}_\infty$. Então,*

$$\overline{[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4]} = [\overline{\zeta_1}, \overline{\zeta_2}, \overline{\zeta_3}, \overline{\zeta_4}].$$

Verificação.

Seja S a aplicação de Möbius mapeando $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ ordenadamente em $1, 0, \infty$. Por definição, existem a, b, c, e d em $\mathbb{C}$ (com $ad - bc \neq 0$) tais que

$$S(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \text{ para todo } \zeta \in \mathbb{C}_\infty.$$

Então, a aplicação de Möbius

$$S^*(\zeta) = \frac{\overline{a}\zeta + \overline{b}}{\overline{c}z + \overline{d}}, \text{ onde } \zeta \in \mathbb{C}_\infty,$$

satisfaz

$$S^*(\overline{\zeta}) = \overline{S(\zeta)} \text{ e mapeia } \overline{\zeta_2}, \overline{\zeta_3}, \overline{\zeta_4} \text{ em } 1, 0, \infty \text{ ordenadamente.}$$

Por esta última identidade e a definição de produto cruzado, segue

$$\overline{[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4]} = \overline{S(\zeta_1)} = S^*(\overline{\zeta_1}) = [\overline{\zeta_1}, \overline{\zeta_2}, \overline{\zeta_3}, \overline{\zeta_4}] \clubsuit$$

A seguir, utilizamos a propriedade

$$[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] = [\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2), \varphi(\zeta_3), \varphi(\zeta_4)], \text{ para toda aplicação de Möbius } \varphi.$$

Também utilizamos que a inversão $\mathrm{Inv}(z)$ é uma aplicação de Möbius, onde

$$\mathrm{Inv}(z) = \frac{1}{z} \text{ para cada } z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Consideremos os pontos $1, i$ e -1, os quais determinam a circunferência S^1. Então, utilizando que z^* e z são simétrico em relação a S^1, o Lema acima, a aplicação $\mathrm{Inv}(z)$ e a propriedade enunciada e destacada acima encontramos

$$\begin{aligned}
[z^*, 1, i, -1] &= \overline{[z, 1, i, -1]} \\
&= [\overline{z}, 1 - i, -1] \\
&= \left[\frac{1}{\overline{z}}, 1, \frac{1}{-i}, -1\right] \\
&= \left[\frac{1}{\overline{z}}, 1, i, -1\right].
\end{aligned}$$

Logo, se T é a aplicação de Möbius mapeando $1, i, -1$ em $1, 0, \infty$, em ordem, temos

$$T(z^*) = T\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) \quad \text{e} \quad (T \text{ é bijetora}) \quad z^* = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Isto mostra que

$$\Omega^* = \left\{\frac{1}{\overline{z}} : z \in \Omega\right\}.$$

Fim da 2ª (e última) prova de (a).

(b) **1ª Prova de (b).**

Analisemos o limite, para $h \to 0$, de

$$\frac{f^*(z+h)-f^*(z)}{h} = \frac{\overline{f\left(\frac{1}{\overline{z+h}}\right)} - \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}}{h}$$

$$= \overline{\left[\frac{f\left(\frac{1}{\overline{z}+\overline{h}}\right) - f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}{\overline{h}}\right]}.$$

Analisando o limite do conjugado para $h \to 0$ obtemos

$$\overline{\left[\frac{f^*(z+h)-f^*(z)}{h}\right]} = \frac{f\left(\frac{1}{\overline{z}+\overline{h}}\right) - f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}{\overline{h}}$$

$$= \frac{f\left(\frac{1}{\overline{z}+\overline{h}}\right) - f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}{\frac{1}{\overline{z}+\overline{h}} - \frac{1}{\overline{z}}}\left[\frac{\frac{1}{\overline{z}+\overline{h}} - \frac{1}{\overline{z}}}{\overline{h}}\right] \longrightarrow f'\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\frac{(-1)}{\overline{z}^2}.$$

Isto mostra que f^* é derivável e

$$(f^*)'(z) = -\overline{\left(\frac{f'\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}{\overline{z}^2}\right)} \quad \text{ou, ainda, } (f^*)'(z^*) = -\overline{z^2 f'(z)}.$$

Fim da 1ª prova de (b).

2ª Prova de (b). Solução de Marcelo K. Inagaki.

Notemos que a função inversão $\mathrm{Inv} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, dada por

$$\mathrm{Inv}(z) = \left(\frac{1}{z}\right), \text{ onde } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},$$

é holomorfa (e bijetora).

Sabidamente, a função definida no aberto $\{\overline{z} : z \in \Omega\}$ e dada por

$$g(\zeta) = \overline{f(\overline{\zeta})}, \text{ para todo } \zeta \in \{\overline{z} : \ z \in \Omega\},$$

é holomorfa.

Pelo item (a) temos que

$$\mathrm{Inv}(\Omega^*) = \left\{\frac{1}{z^*} : z \in \Omega\right\} = \{\overline{z} : z \in \Omega\}.$$

Seja z^* arbitrário em Ω^*. Pelas definições e por (a), temos

$$f^*(z^*) = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z^*}}\right)} = g\left(\frac{1}{z^*}\right) = (g\circ \mathrm{Inv})(z^*).$$

Donde segue $f^* = (g \circ \mathrm{Inv})$ e portanto f^* é holomorfa.

Fim da 2ª prova de (b).

(c) Por hipótese, $\Omega^* = \Omega$ e f é holomorfa. Pelo item (b) segue que

$$f^* : \Omega \to \mathbb{C} \;\; \text{é holomorfa.}$$

Seja $\omega \in \Omega \cap S^1$. Então, $1 = |\omega|^2 = \omega\overline{\omega}$. Pelo item (a) encontramos

$$\omega^* = \frac{1}{\overline{\omega}}.$$

Logo, se $\omega \in S^1$ então temos

$$\omega^* = \frac{1}{\overline{\omega}} = \omega.$$

Donde segue,

$$f^*(\omega) = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)} = \overline{f(\omega)}.$$

Por hipótese temos que $f(\omega)$ é um real. Logo,

$$f^*(\omega) = \overline{f(\omega)} = f(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in \Omega \cap S^1 \quad \text{[que é não vazio].}$$

Então, f^* e f concidem em um conjunto com ponto de acumulação em seu domínio comum, o abeto conexo Ω. Pelo princípio de identidade concluímos que

$$f^*(z) = f(z), \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Vide próxima página

(d) Um Princípio da Reflexão de Schwarz. *Seja Ω um aberto conexo tal que $0 \notin \Omega$. Suponhamos $S^1 \subset \Omega$ e que Ω é simétrico em relação ao S^1. Sejam*

$$\Omega^+ = \{z \in \Omega : \ |z| > 1\} \quad e \quad \Omega^- = \{z \in \Omega : \ |z| < 1\}.$$

Seja f uma função contínua em $\Omega^+ \cup S^1$, holomorfa em Ω^+ e assumindo valores reais em S^1. Então,

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & se\ z \in \Omega^+ \cup S^1 \\ \\ \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}, & se\ z \in \Omega^- \cup S^1, \end{cases}$$

é uma extensão holomorfa de f ao aberto Ω. Tal extensão é única.

Prova.

- Se $z \in S^1$, então $z = 1/\overline{z}$ e $f(1/\overline{z}) = f(z)$ é real. Logo, F é bem posta. Como f é holomorfa em Ω^+, por (b) segue que F é holomorfa em Ω^-. A função F é contínua. Vejamos. Consideremos um ponto $\omega \in S^1$ e uma sequência $(\zeta_n) \subset \Omega^-$ tal que $\zeta_n \to \omega$. Então,

$$\frac{1}{\overline{\zeta_n}} \to \frac{1}{\overline{\omega}} = \omega.$$

Desta forma, devido à continuidade de f em $\Omega^+ \cup S^1$ deduzimos que

$$f\left(\frac{1}{\overline{\zeta_n}}\right) \to f(\omega).$$

Por hipótese, $f(\omega)$ é real. Assim, concluímos que

$$F(\zeta_n) = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{\zeta_n}}\right)} \to \overline{f(\omega)} = f(\omega) = F(\omega).$$

- A seguir, seja φ uma transformação de Möbius tal que

$$\varphi(\mathbb{R}) = S^1, \quad \text{com } t \mapsto \varphi(t) \text{ orientada no } \textbf{sentido horário}.$$

Com tal escolha de orientação, temos

$$\begin{cases} \varphi\Big(H^+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}\Big) = \{z : |z| > 1\}, \\ \\ \varphi\Big(H^- = \{z : \mathrm{Im}(z) < 0\}\Big) = \{z : |z| < 1\}. \end{cases}$$

Pelo exercício 6(d) Lista 9, a aplicação φ mapeia (pontos) simétricos em relação a $\mathbb{R}$ em simétricos em relação ao S^1. Já φ^{-1} faz o inverso. O aberto $\varphi^{-1}(\Omega)$ é conexo e simétrico em relação ao eixo real e o contém. A composição

$$F \circ \varphi : O \to \mathbb{C}, \quad \text{onde } O = \varphi^{-1}(\Omega),$$

é contínua, holomorfa em $O \setminus \mathbb{R}$ e satisfaz $(F \circ \varphi)(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
Pelo princípio da reflexão de Schwarz visto em aula [Teorema 10.21] segue que $F \circ \varphi$ é holomorfa em $\varphi^{-1}(\Omega)$. Logo, F é holomorfa em Ω♣

18. *(a) Existe ou não uma sequência de polinômios que converge uniformemente em $D(0;1)$ para $g(z) = \overline{z}$? Justifique a sua resposta.*

(b) Seja $f : D(0;1) \to \mathbb{C}$ contínua, com f holomorfa na bola $B(0;1)$. Mostre que existe uma sequência de polinômios que converge uniformemente no disco $D(0;1)$ para f.

Solução (integration-free).

(a) A resposta é não. Justifiquemos.

Suponhamos que exista uma sequência de polinômios (p_n) tal que $p_n \to g$ uniformementente em $D(0;1)$. Obviamente, os polinômios estão em

$$\mathcal{A}(B(0;1)) \cap C(D(0;1)),$$

com $B(0;1)$ um aberto limitado. Por corolário do teorema da convergência de Weierstrass, $g(z) = \overline{z}$ é analítica e derivável em $B(0;1)$. Contradição!

(b) Solução de Arcelino B. L. do Nascimento.

Como f é uniformemente contínua em $D(0;1)$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, que escrevemos como $\delta = 1 - r$ com $r \in (0,1)$, satisfazendo

(18.1) $|f(z) - f(w)| \leq \epsilon$, para todos z, w em $D(0;1)$ tais que $|z - w| \leq 1 - r$.

Em particular, temos

$$|z - rz| = |z|\,|1 - r| \leq 1 - r \text{ para todo } z \text{ em } D(0;1). \tag{18.2}$$

Sabemos que a série de Taylor para f e na origem,

$$f(z) = \sum a_n z^n, \text{ onde } z \in B(0;1),$$

converge uniformente em $D(0;r) \subset B(0;1)$. Logo, para algum $N \geq 1$ temos

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n (rz)^n - f(rz) \right| \leq \epsilon, \text{ para todo } z \in D(0;1). \tag{18.3}$$

Seja

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, \text{ onde } z \in \mathbb{C}.$$

Por (18.3), (18.2) e (18.1), valem as desigualdades

$$|P_N(rz) - f(z)| \leq |P_N(rz) - f(rz)| + |f(rz) - f(z)| \leq \epsilon + \epsilon, \ \forall\, z \in D(0;1).$$

Definamos o polinômio

$$P(\zeta) = \sum_{n=0}^{N} a_n r^n \zeta^n, \text{ onde } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Temos $P(z) = P_N(rz)$. Pelas últimas desigualdades segue

$$|P(z) - f(z)| \leq 2\epsilon, \text{ para todo } z \in D(;1) \clubsuit$$

19. *Seja f holomorfa em $B(a;R)$, onde $R>0$, com desenvolvimento $\sum c_n(z-a)^n$. Dado r tal que $0<r<R$, mostre que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|^2d\theta=\sum|c_n|^2r^{2n}.$$

Solução.

Fixado r tal que $0\leq r<R$, sabidamente temos

$$f(a+re^{i\theta})=\sum_n c_nr^ne^{in\theta}, \text{para todo } \theta\in[0,2\pi],\ \text{com convergência uniforme.}$$

Donde segue

$$\overline{f(a+re^{i\theta})}=\sum_n \overline{c_n}r^ne^{-in\theta}, \text{para todo } \theta\in[0,2\pi],\ \text{com convergência uniforme.}$$

E então, multiplicando pela função contínua e limitada $f(a+re^{i\theta})$ em $[0,2\pi]$,

$$|f(a+re^{i\theta})|^2=\sum_n f(a+re^{i\theta})\overline{c_n}r^ne^{-in\theta},\ \ \text{com convergência uniforme em } [0,2\pi].$$

Logo, podemos integrar termo a termo e obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta}|^2d\theta&=\sum_n\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})\overline{c_n}r^ne^{-in\theta}d\theta\\&=\sum_n\left(\sum_m\int_0^{2\pi}c_mr^me^{im\theta}\overline{c_n}r^ne^{-in\theta}d\theta\right)\\&=\sum_n|c_n|^2r^{2n}2\pi\ \clubsuit\end{aligned}$$

20. *Seja $f : \Omega \to O$ um bi-holomorfismo, denotado por $w = f(z)$, com inversa $f^{-1} : O \to \Omega$ denotada por $z = f^{-1}(w)$. Consideremos um disco compacto $D = D(a;r) \subset \Omega$, com $r > 0$, e a bola aberta $B = B(a;r)$.*

Mostre que a aplicação $f^{-1}\Big|_{f(B)} : f(B) \to B$ é dada pela fórmula

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta, \ \textit{onde } w \in f(B).$$

Solução.

Como f é inversível, já sabemos que f' não se anula. Ainda, f' é contínua.

Fixemos w em $f(B)$ e $z = f^{-1}(w)$ em B. Logo, $f(z) = w$. Notemos que

(20.1)
$$\int_{\partial B}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta = \int_{\partial B}\frac{\frac{\zeta f'(\zeta)(\zeta - z)}{f(\zeta)-w}}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\partial B}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

onde

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta f'(\zeta)(\zeta - z)}{f(\zeta)-w}, \quad \text{se } \zeta \neq z.$$

A função φ é claramente holomorfa em $B \setminus \{z\}$. Ainda, φ satisfaz

$$\lim_{\zeta \to z}\varphi(\zeta) = \lim_{\zeta \to z}\frac{\zeta f'(\zeta)}{\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}} = \frac{zf'(z)}{f'(z)} = z.$$

Definindo $\varphi(z) = z$, vemos que φ é contínua em B e holomorfa em $B \setminus \{z\}$. Pela fórmula integral de Cauchy, só nos falta mostrar que φ é holomorfa no ponto z. Pois, tendo provado este fato, a integral em (20.1) vale

$$2\pi i\varphi(z) = 2\pi i z = 2\pi i f^{-1}(w).$$

- ◇ A função φ é holomorfa no ponto $\zeta = z$.
  Verificação. Pelo teorema de Morera, basta mostrar que a integral de φ em $\partial\Delta$ para cada triângulo fechado e convexo Δ contido em B é zero. Analisemos os possíveis casos.

  ((I) **Δ degenerado.** Isto é, os vértices de Δ estão alinhados. É claro que

  $$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$

  A seguir, Δ é não degenerado e os triângulos tem orientação anti-horária.

  (II) **$\mathbf{z} \notin \mathbf{\Delta}$.** Como f é holomorfa em $B \setminus \{z\}$ e Δ está contido em $B \setminus \{z\}$, pelo teorema de Cauchy-Goursat a integral de f em $\partial\Delta$ é zero.

  (III) **z um vértice de $\partial\mathbf{\Delta}$.** Seja $\{z, b, c\}$ o conjunto de vértices de $\partial\Delta$. Sejam b_1 e c_1 os respectivos pontos médios dos lados $[z, b]$ e $[z, c]$. Divida Δ em um triângulo Δ_1 de vértices $\{z, b_1, c_1\}$ e um quadrilátero Q de vértices $\{b_1, b, c, c_1\}$. Divida Q em dois sub-triângulos. Pelo caso (II) temos

  $$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_1} f + \int_{\partial Q} f \ = \int_{\partial\Delta^1} f + 0 = \int_{\partial\Delta^1} f.$$

Iterando construímos uma sequência decrescente (Δ_n) tal que

$$\begin{cases} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{z\}, \\ \\ L(\partial\Delta_n) = \text{comprimento de } \partial\Delta_n = \frac{L(\partial\Delta)}{2^n}, \\ \\ \int\limits_{\partial\Delta} f = \int\limits_{\partial\Delta_n} f, \text{ para todo } n \geq 1. \end{cases}$$

Como f é contínua no ponto z, pela estimativa M-L temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta_n} f = 0 \;\; [\text{cheque}] \;\; \text{e então} \;\; \int_{\partial\Delta} f = 0.$$

(IV) $\mathbf{z} \in \mathrm{int}(\boldsymbol{\Delta})$. Seja Δ de vértices $\{b, c, d\}$, e os sub-triângulos Δ_1, Δ_2 e Δ_3 de vértices $\{z, c, d\}$, $\{b, z, d\}$ e $\{b, c, z\}$, respectivamente. Por (III),

$$\int_{\Delta} f = \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f + \int_{\Delta_3} f = 0 + 0 + 0 = 0.$$

(V) **z no lado $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ e $\boldsymbol{\Delta}$ de vértices $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$.** Dividimos Δ nos triângulos: Δ_1 de vértices $\{b, z, d\}$ e Δ_2 de vértices $\{c, z, d\}$ e aplicamos (III) ♣