$1^{\underline{a}}$ PROVA DE FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP - MAT 5714

16 de setembro, 2014

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ___________________GABARITO___________________
$N^{\underline{o}}$USP : _________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

A menos que alertado o contrário, as questões se referem a **funções analíticas ou a funções inteiras**, ambas no sentido de Weierstrass.
Justifique todas as passagens, com uma redação clara e não carregada em simbologia.
BOA SORTE!

1. (a) Expresse $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$, para $|z| < 1$, como uma série de potências

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \cdots.$$

Dicas. Propriedade para o produto ou teorema de derivação.

(b) Ache uma fórmula fechada para a função, definida por uma série de potências,

$$f(w) = \sum_{p=1}^{+\infty} p w^p, \text{ onde } |w| < 1.$$

(c) Mostre que se $|z| < 1$, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}.$$

Sugestões. Expresse uma série como série dupla e justifique a troca de ordem no somatório (passe para famílias somáveis).

Solução.

(a) Temos

$$\frac{1}{1-z} = \sum z^n, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Logo, pela propriedade do produto de séries de potências,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots)$$
$$= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \cdots.$$

Para finalizar,

$$\frac{1}{(1-z)^3} = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots)(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \cdots) =$$
$$= 1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + 15z^4 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n + \cdots.$$

VIDE VERSO

(b) Temos, pela lei associativa para somas não ordenadas,

$$\sum_{p=1} pw^p = (w+w^2+w^3+w^4+\cdots)+(w^2+w^3+w^4+\cdots)+(w^3+w^4+\cdots)+\cdots =$$

$$= \sum_{n\geq 1}(w^n+w^{n+1}+w^{n+2}+\cdots) = \sum_{n\geq 1}\frac{w^n}{1-w} = \frac{1}{(1-w)}\frac{w}{(1-w)} = \frac{w}{(1-w)^2}.$$

(c) Fixemos um ponto z tal que $|z|<1$. Pela fórmula para séries geométricas,

$$\frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{m=1}^{+\infty} z^{nm}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} nz^{nm}.$$

Seja $r=|z|$. Para ambos n e m variando em $\mathbb{N}^* = 1,2,\ldots$, segue a identidade para somas não ordenadas de termos positivos

$$\sum_{n,m} nr^{nm} = \sum_m\sum_n n(r^m)^n.$$

Como $0\leq r<1$, pelo item (b) temos

$$\sum_n n(r^m)^n = \frac{r^m}{(1-r^m)^2}.$$

Donde segue, observando que $1-r^m \geq 1-r > 0$,

$$\sum_m\sum_n n(r^m)^n \leq \frac{1}{(1-r)^2}\sum_m r^m < \infty.$$

Logo, a família (nz^{nm}), indexada em $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, é somável. Então,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} nz^{nm}$$

$$= \sum_{n,m} nz^{nm} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} n(z^m)^n.$$

Para finalizar, por (b) temos

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} n(z^m)^n = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{z^m}{(1-z^m)^2}\ \clubsuit$$

2. Mostre que se f é analítica em uma bola aberta $B(0; r)$ contendo o disco fechado $D(0; 1)$, então deve existir n em $\mathbb{N}^*$ tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+1}.$$

Solução.

Suponhamos que exista uma tal f. Seja

$$g(z) = \frac{z}{z+1}, \quad \text{com } z \in B(0; 1).$$

Então, g é analítica e

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{1+n} = f\left(\frac{1}{n}\right), \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo, f e g, na bola $B(0; 1)$, coincidem em um conjunto com ponto de acumulação na origem. Pelo princípio de identidade f e g coincidem em toda a bola $B(0; 1)$.

Segue então que para $z \to -1$, com z dentro da bola $B(0; 1)$, temos

$$\lim_{z \to -1} \frac{z}{z+1} = \lim_{z \to -1} g(z) = \lim_{z \to -1} f(z) = f(-1) \in \mathbb{C}.$$

O que é uma contradição pois não existe $\lim_{z \to -1} \frac{z}{z+1}$ ♣

3. Enuncie a desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências e o princípio do módulo máximo para um aberto conexo. A seguir, mostre que a desigualdade enunciada implica o princípio enunciado.

Enunciados.

Desigualdade de Gutzmer -Parseval. *Seja* $f(z) = \sum a_n z^n$ *convergente em* $B(0;\rho)$, *com* $\rho > 0$. *Dado* r *tal que* $0 \leq r < \rho$, *vale a desigualdade*

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2, \quad \textit{com } M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Princípio do Módulo Máximo. *Seja* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, *com* f *não constante e* Ω *um aberto conexo. Então,* $|f|$ *não tem máximo local.*

==

Prova.

Suponhamos, por absurdo, que $|f|$ tem um valor máximo local em um ponto z_0. Como f é analítica, temos

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n \text{ para todo } z \in B(z_0; R), \text{ para algum } R > 0.$$

Seja r, com $0 < r < R$, tal que

$$\left| \sum a_n (z - z_0)^n \right| \leq |f(z_0)| = |a_0| \text{ para todo } z \in D(z_0; r).$$

Pela desigualdade de Gutzmer-Parseval segue

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + \cdots \leq |a_0|^2.$$

Logo, $a_1 = a_2 = \cdots = 0$. Portanto, f é constante em $D(z_0; r)$ e, pelo princípio dos zeros isolados, constante no conexo Ω $\lightning$

4. Enuncie o teorema fundamental da álgebra (TFA) e o teorema de Liouville para funções analíticas. A seguir, mostre que tal teorema de Liouville implica o TFA.

Enunciados

Teorema Fundamental da Álgebra. *Seja* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *um polinômio complexo e não constante. Então, existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $p(z_0) = 0$.

Teorema de Liouville (para funções analíticas). *Seja* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *analítica e limitada. Então,* f *é constante.*

==

Prova.

Seja $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ um polinômio com coeficientes complexos, $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Suponhamos, por absurdo, que $p(z)$ não se anula em $\mathbb{C}$. Então,

$$\varphi(z) = \frac{1}{p(z)} \quad \text{é analítica em } \mathbb{C}.$$

Ainda mais,

$$|p(z)| \geq [|a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_0|] \to +\infty, \quad \text{se } |z| \to +\infty.$$

Logo, existe $r > 0$ tal que $|p(z)| \geq 1$ se $|z| \geq r$. Logo, $|\varphi(z)| \leq 1$ se $|z| \geq r$. Ainda, φ é contínua e pelo teorema do máximo de Weierstrass, existe M tal que

$$|\varphi(z)| \leq M, \quad \text{para todo } z \text{ no compacto } D(0; r).$$

Assim, temos

$$|\varphi(z)| \leq M + 1, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Pelo teorema de Liouville para funções analíticas, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(z) = \frac{1}{p(z)} = c, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Logo, $p(z)$ é uma constante $\lightning$

5. Enuncie o Lema de Schwarz e o Teorema de Liouville para funções inteiras. A seguir, mostre que tal lema implica tal teorema.

Enunciados.

Lema de Schwarz. *Seja f analítica em $B(0;1)$ e satisfazendo*

$$|f(z)| \leq 1, \text{ para todo } z \in B(0;1), \text{ e } f(0) = 0.$$

Então temos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|^2 \leq 1 \quad (\text{e}, |f'(0)| \leq 1\,) \;\; \text{e} \quad |f(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Ocorre $|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}| = 1$, para algum $n \geq 1$, se e somente se existe $\omega \in S^1$ tal que

$$f(z) = \omega z^n, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Ocorre $|f(z)| = |z|$, para algum $z \neq 0$, se e somente se existe $\omega \in S^1$ tal que

$$f(z) = \omega z, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Teorema de Liouville. *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, limitada. Então, $f \equiv a_0$.*

==

Solução.

Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ convergente em $\mathbb{C}$ e e $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Seja $R > 0$. Definamos

$$\varphi(z) = \frac{f(Rz) - a_0}{3M}, \text{ onde } z \in B(0;1).$$

Então temos $\varphi(0) = 0$ e

$$|\varphi(z)| \leq \frac{2M}{3M} < 1, \quad \text{para todo } z \in B(0;1).$$

Pelo lema de Schwarz segue $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $|z| \leq 1$. Logo,

$$|f(Rz) - a_0| \leq 3M|z|, \quad \text{para quaisquer } z \in D(0;1) \text{ e } R > 0.$$

Fixado ζ em $\mathbb{C}$ temos

$$|f(\zeta) - a_0| \leq 3M\frac{|\zeta|}{R}, \text{ para todo } R > |\zeta|.$$

Impondo $R \to +\infty$ concluímos que $f(\zeta) = a_0$ para todo $\zeta \in \mathbb{C}$♣

6. Sejam $f : B(0;1) \to B(0;1)$ analítica e dois pontos z e w, ambos em $B(0;1)$.

   (a) Mostre (Lema de Pick)

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-f(z)\overline{f(w)}}\right| \leq \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|.$$

   (b) Mostre (Lema de Schwarz-Pick):

$$|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

   (c) Seja g analítica em $B(0;2)$, limitada por 10 e tal que $g(1)=0$. Encontre o possivelmente melhor majorante para

$$\left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right|.$$

Sugestão. Utilize os automorfismos analíticos $\phi_a : B(0;1) \to B(0;1)$, definidos por $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, fixado um ponto a na bola $B(0;1)$.

Solução.

(a) Por hipótese, $w \in B(0;1)$. Temos então

$$\phi_{-w}(\zeta) = \frac{\zeta + w}{1+\overline{w}\,\zeta}, \quad \text{com } \phi_{-w}(0) = w.$$

Logo, $(f\circ\phi_{-w})(0) = f(w) \in B(0;1)$. Temos então

$$\phi_{f(w)}(\zeta) = \frac{\zeta - f(w)}{1-\overline{f(w)}\,\zeta}, \quad \text{com } \phi_{f(w)}(f(w)) = 0.$$

Logo, $(\phi_{f(w)}\circ f\circ\phi_{-w})(0) = 0$ sendo que $\phi_{f(w)}\circ f\circ\phi_{-w} :\ B(0;1) \to B(0;1)$. Pelo lema de Schwarz segue

$$\left|\left(\phi_{f(w)}\circ f\circ\phi_{-w}\right)(\zeta)\right| \leq |\zeta|, \quad \text{para todo } \zeta \in B(0;1).$$

Sabidamente ϕ_{-w} é um automorfismo de $B(0;1)$ e $(\phi_{-w})^{-1} = \phi_w$. Substituindo $\zeta = \phi_w(z)$ na última identidade em destaque obtemos

$$\left|\phi_{f(w)}(f(z))\right| \leq |\phi_w(z)|.$$

Isto é,

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|.$$

VIDE VERSO

(b) Por (a) temos, para $w \neq z$ e com w e z ambos em $B(0;1)$,

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right| \leq \left|\frac{1-\overline{f(w)}\,f(z)}{1-\overline{w}\,z}\right|.$$

Computando o limite para w tendo a z segue

$$|f'(z)| = \lim_{w\to z}\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right| \leq \lim_{w\to z}\left|\frac{1-\overline{f(w)}\,f(z)}{1-\overline{w}\,z}\right| = \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

(c) O caso g constante, logo nula já que $g(1)=0$, é trivial. Supomos g não constante.

Então, temos $|g(z)|<10$ para todo $z\in B(0;2)$ pois g é limitada por 10 e pelo princípio do módulo máximo $|g|$ não tem máximo local.

Definamos

$$h(z) = \frac{g(2z)}{10},\ \text{para } z\in B(0;1).$$

Então temos $h : B(0;1)\to B(0;1)$. Pelo item (a) segue

$$\left|\frac{h\left(\frac{1}{4}\right)-h\left(\frac{1}{2}\right)}{1-h\left(\frac{1}{4}\right)\overline{h\left(\frac{1}{2}\right)}}\right| \leq \left|\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}\,\overline{\frac{1}{4}}}\right|.$$

Substituindo na desigualdade acima os valores

$$h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{10} \quad \text{e} \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{g(1)}{10} = 0,$$

obtemos então

$$\left|\frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{10}\right| \leq \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{2}{7}.$$

Logo,

$$\left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{20}{7} \ \clubsuit$$

7. Suponha que f é limitada e analítica em um aberto contendo $\{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ e também que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Mostre que f é constante.

Solução.

Definimos, para cada z em $\mathbb{C}$,

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{se } \mathrm{Im}(z) \geq 0, \\ \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{se Im(z)} \leq 0. \end{cases}$$

Tal função F está bem definida, pois $f(z) \in \mathbb{R}$ para cada $z \in \mathbb{R}$.

- ◇ Claramente F é analítica no semi-plano aberto $H^+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
- ◇ Seja w no semi-plano $H^- = \{z : \mathrm{Im}(z) < 0\}$. Então, segue que $\overline{w} \in H^+$. Logo, existe um raio $r > 0$ para o qual temos

  $$F(z) = f(z) = \sum a_n(z - \overline{w})^n, \quad \text{para todo } z \in B(\overline{w}; r) \subset H^+.$$

  Observemos que $B(w; r) \subset H^-$.
  Desta forma, dado $\zeta \in B(w; r)$ temos que $\overline{\zeta} \in B(\overline{w}; r) \subset H^+$ e

  $$F(\zeta) = \overline{f(\overline{\zeta})} = \overline{\sum a_n(\overline{\zeta} - \overline{w})^n} = \sum \overline{a_n}(\zeta - w)^n.$$

  Isto é, F é analítica em H^-.
- ◇ Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, por hipótese existe um raio $r > 0$ tal que

  $$f(z) = \sum a_n(z - x_0), \quad \text{para todo } z \in B(x_0; r).$$

  Devido à hipótese $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, temos

  $$f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n \in \mathbb{R}, \text{ para todo } x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

  Sendo assim, temos $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$ em $\mathbb{R}$ para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Computando em x_0 segue que $a_0 \in \mathbb{R}$. Por indução, segue que todo coeficiente a_j é real.

  ▲ **Afirmação.** Temos

  $$F(z) = f(z) = \sum a_n(z - x_0)^n \text{ para todo } z \in B(x_0; r).$$

  Verificação.
  - O caso em que $z \in B(x_0; r)$ e $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, é evidente.
  - Se $z \in B(x_0; r)$ e $\mathrm{Im}(z) < 0$, então temos

  $$F(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{\sum a_n(\overline{z} - x_0)} = \sum a_n(z - x_0).$$

  Portanto, F é analítica nos pontos de $\mathbb{R}$.

  Logo, F é analítica em $\mathbb{C}$ e, assim como f, limitada. Pelo teorema de Liouville segue que F é constante. Donde segue que f é constante♣

8. Seja f inteira e não constante. Definamos, para cada $r \in [0, +\infty)$,

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \ \text{ e } \ m(r) = \inf_{|z|\leq r} |f(z)|.$$

Prove que

(a) $M(r)$ é contínua, estritamente crescente e $\lim_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$.

(b) $m(r)$ é contínua, decrescente (talvez não estritamente) e $\lim_{r\to+\infty} m(r) = 0$.

Solução.

(a) Fixemos $r > 0$ [pois M é contínua em $r = 0$] e $\epsilon > 0$. Então, f é uniformemente contínua no disco $D(0; 4r)$ e existe δ, com $0 < \delta < r$, tal que

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \epsilon \text{ se } |z_1 - z_2| \leq \delta. \text{ com } z_1 \text{ e } z_2 \text{ em } D(0; 4r).$$

Consideremos a coroa circular (ou anel)

$$C = \{z \in \mathbb{C} : r - \delta \leq |z| \leq r + \delta\} \text{ contida em } D(0; 4r).$$

Sejam $\omega \in S^1$ e $s \in [r - \delta, r + \delta]$. Então, o ponto $s\omega$ está na coroa C e $|s\omega - r\omega| = |s - r| \leq \delta$. Donde segue $|f(s\omega) - f(r\omega)| \leq \epsilon$ e então

$$|f(r\omega)| - \epsilon \leq |f(s\omega)| \leq |f(r\omega)| + \epsilon, \text{ para todo } s \in [r - \delta, r + \delta].$$

Agora, variemos ω. Pela desigualdade à esquerda segue $M(r) - \epsilon \leq M(s)$. Pela desigualdade à direita segue $M(s) \leq M(r) + \epsilon$. Logo, M é contínua.

Pelo princípio do módulo máximo, $M(r)$ é crescente. Como M é não constante, $|f|$ não tem máximo local e portanto $M(r)$ é estritamente crescente.

Se $M(r)$ é limitada, então f é limitada e pelo teorema de Liouville, f é constante, contra a hipótese. Logo, $M(r) \to +\infty$ se $r \to +\infty$.

(b) É evidente que a função $m(r)$ é decrescente.

- ⋄ Suponhamos que f se anula em algum z_0. Então, temos $m(r) = 0$ para todo $r \geq |z_0|$. Se $z_0 = 0$ então temos $m(r) = 0$ para todo $r \in [0, +\infty)$. Por outro lado, se $f(0) \neq 0$ e z_0 é o ponto (pode haver mais de um) mais próximo da origem tal que $f(z_0) = 0$ então f não se anula na bola $B(0; R)$, onde $R = |z_0|$. Pela parte (a) segue que

$$m_f(r) = \frac{1}{M_{\frac{1}{f}}(r)} \text{ é contínua no intervalo } r \in [0, R).$$

Se $z_n \to z_0$, com $(z_n)_{\mathbb{N}} \subset B(0; R)$, então $|f(z_n)| \to 0$ e $m(|z_n|) \to 0$. Portanto, $m_f(r)$ é continua em $[0, +\infty)$.

- ⋄ Se f não se anula em nenhum ponto e temos $m(r) \geq m$ para todo $r \in [0, +\infty)$, para algum $m > 0$, então obtemos $|f(z)| \geq m$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Donde segue que a função $\frac{1}{f}$ é limitada e, pelo teorema Liouville, $\frac{1}{f}$ é uma constante. Assim, f é uma constante, contra a hipótese♣

9. Seja $f(z) = \sum c_n z^n$ convergente em $B(0;1)$, com $f'(0) = c_1 \neq 0$ e $f(0) = c_0 = 0$. Isto é,

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots, \text{ com } c_1 \neq 0, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Exiba uma prova direta [isto é, sem auxílio do teorema da função inversa ou do teorema de representação local], de que existe uma bola $B(0;r)$, com $r > 0$, na qual f é injetora.

Sugestão. Considere dois pontos a e b distintos em $B(0;1)$ e o quociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Solução.

Sejam a e b distintos em $B(0;r)$ com $0 < r < 1$ e r a determinar. Temos

$$f(b) - f(a) = \sum_{n\geq 1} c_n(b^n - a^n) = \sum_{n\geq 1} c_n(b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Logo,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = c_1 + \sum_{n\geq 2} c_n(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Temos $|b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}| \leq r^{n-1} + r^{n-2}r + \cdots + r^{n-1} = nr^{n-1}$ e

$$\left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - c_1 \right| \leq \sum_{n\geq 2} |c_n| n r^{n-1}.$$

Pelo teorema da derivação para série de potências, a série $\sum c_n n z^{n-1}$ também converge absolutamente em $B(0;1)$. Logo, $\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1}$ é finita e se anula em $r = 0$ [pois $n-1 \geq 1$ se $n \geq 2$]. Logo, para algum $r \in (0,1)$ temos

$$\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1} < \frac{|c_1|}{2}.$$

Então, dados a e b distintos na bola $B(0;r)$, temos

$$\left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - c_1 \right| \leq \frac{|c_1|}{2}.$$

Donde segue

$$|c_1| - \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| \leq \frac{|c_1|}{2}$$

e portanto

$$0 < \frac{|c_1|}{2} = |c_1| - \frac{|c_1|}{2} \leq \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right|.$$

Logo, temos $f(b) \neq f(a)$ para a e b distintos na bola $B(0;r)$ ♣

10. Seja $f : B(0;1) \to V$ analítica. Suponha que f é uma função bijetora. Justifique que V é um conjunto aberto. Mostre, diretamente [isto é, sem utilizar o teorema da função inversa ou o teorema da representação local] que se a derivada f' não se anula em nenhum ponto, então a função inversa

$$\varphi = f^{-1} : V \to B(0;1)$$

é complexa-derivável (i.e., holomorfa) em todo ponto de V.

Solução.

Como f é não constante, pelo TAA o conjunto $f(B(0;1)) = V$ é aberto.

Ainda, pelo TAA, dado um aberto $O \subset B(0;1)$, o conjunto $f(O)$ é aberto em V.

Logo, dado O aberto em $B(0;1)$ o conjunto $\varphi^{-1}(O) = f(O)$ é aberto em V. Segue então que

$$\varphi : V \to B(0;1) \text{ é contínua.}$$

A seguir, consideremos $v_1 = f(z_1) \in V$ e $v_2 = f(z_2) \in V$, arbitrários e distintos, com $z_1 \in B(0;1)$ e $z_2 \in B(0;1)$. Temos $\varphi(v_1) = z_1$ e $\varphi(v_2) =_2$ e

$$\frac{\varphi(v_2) - \varphi(v_1)}{v_2 - v_1} = \frac{z_2 - z_1}{f(z_2) - f(z_1)} = \frac{1}{\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}}.$$

Se $v_2 \to v_1$, como φ é contínua, $z_2 = \varphi(v_2) \to z_1 = \varphi(v_1)$. Logo, como $f'(z_1) \neq 0$,

$$\lim_{v_2 \to v_1} \frac{\varphi(v_2) - \varphi(v_1)}{v_2 - v_1} = \frac{1}{\lim\limits_{z_2 \to z_1} \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}} = \frac{1}{f'(z_1)} \clubsuit$$

ps. Como f e φ são inversas uma da outra, para todo $A \subset B(0;1)$ temos

$$\varphi^{-1}(A) = f(A).$$

11. Sejam f e g analíticas no aberto conexo limitado Ω e contínuas no compacto $\overline{\Omega}$. Mostre que a função

$$|f(z)| + |g(z)|, \text{ onde } z \in \overline{\Omega},$$

assume seu valor máximo na fronteira $\partial\Omega$.
Dica. Considere a função $f(z)\omega_1 + g(z)\omega_2$ para apropriados $\omega_1 \in S^1$ e $\omega_2 \in S^1$.

Solução.

Como $\overline{\Omega}$ é compacto, pelo teorema do valor máximo existe $\eta \in \overline{\Omega}$ tal que

$$(1) \qquad |f(z)| + |g(z)| \leq |f(\eta)| + |g(\eta)| \text{ para todo } z \in \overline{\Omega}.$$

Sejam $\omega_1 \in S^1$ e $\omega_2 \in S^1$ tais que

$$(2) \qquad |f(\eta)| = f(\eta)\omega_1 \text{ e } |g(\eta)| = g(\eta)\omega_2.$$

A função $f(z)\omega_1 + g(z)\omega_2$ é analítica em Ω e é contínua no compacto $\overline{\Omega}$. Logo, pelo princípio do módulo máximo, existe um ponto $\zeta \in \partial\Omega$ tal que

$$|f(z)\omega_1 + g(z)\omega_2| \leq |f(\zeta)\omega_1 + g(\zeta)\omega_2|, \text{ para todo } z \in \overline{\Omega}.$$

Em particular, para $z = \eta$ temos

$$|f(\eta)\omega_1 + g(\eta)\omega_2| \leq |f(\zeta)\omega_1 + g(\zeta)\omega_2|.$$

Substituindo (2) segue

$$(3) \qquad |f(\eta)| + |g(\eta)| \leq |f(\zeta)\omega_1 + g(\zeta)\omega_2|.$$

Por outro lado, é claro que

$$(4) \qquad |f(\zeta)\omega_1 + g(\zeta)\omega_2| \leq |f(\zeta)| + |g(\zeta)|.$$

Por (1) temos

$$(5) \qquad |f(\zeta)| + |g(\zeta)| \leq |f(\eta)| + |g(\eta)|.$$

Por (3), (4) e (5) segue que

$$|f(\zeta)| + |g(\zeta)| = |f(\eta)| + |g(\eta)|.$$

Logo, temos

$$|f(z)| + |g(z)| \leq |f(\zeta)| + |g(\zeta)| \text{ para todo } z \in \overline{\Omega}, \text{ com } \zeta \in \partial\Omega \clubsuit$$

12. (a) Desenvolva a função

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - 2z^2}$$

em uma série de potências centrada na origem e ache o raio de convergência. Sugestão. Fatore o polinômio no denominador.

(b) Mostre que se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| < 1$, então

$$\frac{z}{1 - z^2} + \frac{z^2}{1 - z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1 - z}.$$

Solução.

(a) Temos $1 - z - 2z^2 = (1 + z)(1 - 2z)$. Logo,

$$\frac{1}{(1 + z)(1 - 2z)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + z} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - 2z}.$$

Assim, se $|z| < 2^{-1}$ temos

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum (-z)^n + \frac{2}{3} \sum (2z)^n.$$

Logo, temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \right] z^n, \text{ para todo } |z| < \frac{1}{2}.$$

O raio de convergência da série de potências imediatamente acima é $\rho = \frac{1}{2}$, pois tal série não converge se $\frac{1}{2} < |z| < 1$ visto que em um tal ponto z, a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} (2z)^n$ diverge e $\sum (-z)^n$ converge.

VIDE VERSO

(b) Fixemos z tal que $|z| < 1$. Seja, para $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$s_n = \frac{z}{1 - z^2} + \frac{z^2}{1 - z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$

Temos

$$s_1 = \frac{z}{1 - z^2} + \frac{z^2}{1 - z^4} = \frac{z(1 + z^2) + z^2}{1 - z^4} = \frac{z + z^2 + z^3}{1 - z^4}.$$

$$s_2 = \frac{(z + z^2 + z^3)(1 + z^4) + z^4}{1 - z^8} = \frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7}{1 - z^8}.$$

Por indução, segue

$$s_n = \frac{z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2^{n+1} - 1}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$

Logo,

$$s_n = \left(\frac{1}{1 - z}\right) \frac{z - z^{2^{n+1} - 1}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$

Como $|z| < 1$, temos que $z^n \to 0$ se $n \to +\infty$. Consequentemente,

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1 - z}\right) \frac{z - z^{2^{n+1} - 1}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z} \clubsuit$$

13. Seja f analítica na bola $B(0;1)$ e satisfazendo

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Ache a melhor majoração de $\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$ fornecida pela desigualdade de Cauchy.
Sugestão. Estime o lado direito de $\left|\frac{|f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ [para $M(r)$ como usual].

Solução.

Obviamente, temos $M(r) \leq \frac{1}{1-|r|}$ para todo $0 \leq r < 1$. Logo,

$$\left|\frac{|f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{1}{r^n(1-r)}, \text{ para } 0 < r < 1.$$

Então, a melhor estimativa é o valor mínimo da expressão

$$\frac{1}{r^n(1-r)}, \quad \text{para } 0 < r < 1.$$

Tal valor é o inverso do valor máximo da função

$$\varphi(r) = r^n(1-r), \text{ com } 0 < r < 1.$$

Derivando temos $\varphi'(r) = nr^{n-1}(1-r) - r^n$. Impondo $\varphi'(r) = 0$ encontramos

$$n - nr - r = 0$$

e então

$$r = \frac{n}{n+1}.$$

Logo, o valor máximo de φ em $(0,r)$ é

$$\varphi(r) = \frac{n^n}{(n+1)^n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

A estimativa solicitada é então

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1) \clubsuit$$

14. (a) Mostre que não existe $f : B(0;1) \to \mathbb{C}$ analítica satisfazendo

$$|f^{(n)}(0)| > n!n^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Suponha que $f(z) = \sum c_n z^n$ converge em $B(0;1)$. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} z^n \text{ converge em } \mathbb{C}.$$

Solução.

(a) Caso contrário, pondo $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ temos

$$f(z) = \sum a_n z^n, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Porém, $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \geq \limsup \sqrt[n]{n^n} = \limsup n = +\infty$. Pela fórmula de Hadamard, o raio ρ de convergência de $\sum a_n z^n$ é $\rho = 0$. Uma contradição!

(b) Temos $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$, caso contrário o raio de convergência de $\sum c_n z^n$ é zero. Portanto, existe p tal que $|c_n| \leq p^n$ para todo n. Donde segue

$$\sum \left| \frac{c_n z^n}{n!} \right| \leq \sum \left| \frac{p^n z^n}{n!} \right|.$$

Pelo teste da razão

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{p^{n+1} z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{p^n z^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{pz}{n+1} \right| = 0.$$

Logo, a série de potências $\sum \frac{c_n}{n!} z^n$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$ ♣

15. Seja f uma função inteira. Mostre que f é

(a) constante, se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re}(f(z)) \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) um polinômio com $\operatorname{grau}(f) \leq n$, se existem $M \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ tais que

$$|f(z)| \leq M|z|^n, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| > r.$$

Solução.

(a) Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re}(f(z)) \leq M$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Então, temos

$|M+1-f(z)| \geq |M+1-\operatorname{Re}(f(z))| = M+1-\operatorname{Re}(f(z)) \geq 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Logo, a função

$$z \mapsto \frac{1}{M+1-f(z)} \text{ é limitada em } \mathbb{C}.$$

Pelo teorema de Liouville segue que f é constante.

(b) Seja r como no enunciado. Então, existe $A > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq A, \text{ para todo } |z| \leq r.$$

Logo, temos

$$|f(z)| \leq A + M|z|^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Assim, dado $\rho \geq 0$ temos

$$M(\rho) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)| \leq A + M\rho^n.$$

Desta forma, escrevendo $f(z) = \sum a_j z^j$ onde $z \in \mathbb{C}$, a desigualdade de Gutzmer-Parseval garante

$$\sum |a_j|^2 \rho^{2j} \leq (A + M\rho^n)^2, \text{ para todo } \rho \geq 0.$$

É então fácil ver que temos $a_j = 0$ para todo $j = n, n+1, \ldots$ ♣

16. (a) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteira. Suponha que para todo ponto $\alpha \in \mathbb{C}$, ao menos um coeficiente na expansão em séries de potências

$$f(z) = \sum c_n (z - \alpha)^n,$$

é igual a 0. Prove que f é um polinômio.
Sugestão. Use que $c_n n! = f^{(n)}(\alpha)$ e use um argumento de contagem.

(b) Enuncie e prove um resultado análogo ao item (a), para funções analíticas $g : \Omega \to \mathbb{C}$, com Ω aberto e conexo.

Solução.

(a) Devido às hipóteses e à fórmula $c_n = f^{(n)}(\alpha)/n!$ temos

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\alpha \in \mathbb{C} : f^{(n)}(\alpha) = 0\}.$$

Então, como $\mathbb{C}$ é não enumerável, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(f^{(n)}\right)^{-1}(0)$ é não enumerável. Logo, o conjunto dos zeros de $f^{(n)}$ não é discreto (pois todo conjunto discreto em $\mathbb{C}$ é enumeravel). Assim, pelo princípio dos zeros isolados temos $f^{(n)} \equiv 0$. É então evidente que f é um polinômio.

(b) É a "mesma prova" que a acima, basta trocar $\mathbb{C}$ por Ω pois o princípio dos zeros isolados vale em qualquer aberto conexo♣

17. Seja f analítica e não constante em um aberto e conexo Ω, prove que $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ [as partes real e imaginária de f] não assumem máximo nem mínimo local.

Solução.

◇ Suponhamos que $\mathrm{Re}(f)$ tem um máximo local em z_0. Então, temos

$$\mathrm{Re}f(z) \leq \ \mathrm{Re}f(z_0) \text{ para todo } z \in B(z_0; R) = O, \text{ para algum } R > 0.$$

Porém, f é não constante no aberto e conexo Ω e portanto f é não constante em $O = B(z_0; R)$ e então, pelo teorema da aplicação aberta, $f(O)$ é aberto.

Restringindo f ao conjunto O, consideremos $f : O \to \mathbb{C}$. Então, existe uma bola aberta de raio $r > 0$, centrada em $f(z_0)$ e contida em $f(O)$. Desta forma obtemos

$$B(f(z_0); r) \subset f(O),$$

contrariando a desigualdade $\mathrm{Re}f(z) \leq \mathrm{Re}f(z_0)$ para todo $z \in B(z_0; R) = O$.

◇ Pelo que mostramos acima, a função $\mathrm{Re}(-f)$ não tem máximo local. Logo,

$$\mathrm{Re}(f) = -\mathrm{Re}(-f) \ \text{ não tem mínimo local.}$$

◇ Pelos dois casos acima, a função

$$\mathrm{Re}(-if) = \mathrm{Im}(f) \ \text{ não tem máximo local nem mínimo local } \clubsuit$$