MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 9 de Exercícios

Faça os exercícios abaixo com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1* Seja Ω aberto e não vazio em $\mathbb{C}$. Dizemos que Ω é conexo por segmentos paralelos aos eixos se dados quaisquer dois pontos p e q, ambos em Ω, existe uma sequência finita de pontos $\{p_0 = p, p_1, \ldots, p_n = q\}$ contida em Ω tal que cada segmento linear

$$\Big\{tp_{j-1} + (1-t)p_j : t \in [0,1]\Big\}, \text{ onde } j = 1, \ldots, n,$$

é paralelo a um dos eixos coordenados e está contido no aberto Ω.

Mostre que Ω é conexo se e somente se Ω é conexo por segmentos paralelos aos eixos.

2* Mostre que é possível definir uma determinação analítica e única de

$$\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \quad \text{em} \quad \mathbb{C} \setminus \overline{B(0;1)},$$

se impormos que seu limite no infinito é zero.

3. Encontre a imagem dos conjuntos abaixo, pela transformação de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

   (a) A semi reta superior it, com $t \geq 0$.
   (b) A circunferência de centro 1 e raio 1.
   (c) A linha horizontal $i + t$, com $t \in \mathbb{R}$.
   (d) A semi circunferência $|z| = 2$, com $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.
   (e) A semi reta vertical $\mathrm{Re}(z) = 1$ e $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

4. Encontre os pontos fixos das transformações de Möbius:

$$(a)\ \ \varphi(z) = \frac{z-3}{z+1} \qquad\qquad (b)\ \ \varphi(z) = \frac{z-4}{z+2}$$

$$(c)\ \ \varphi(z) = \frac{z-i}{z+1} \qquad\qquad (d)\ \ \varphi(z) = \frac{2z-3}{z+1}$$

5. Seja $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Consideremos a transformação de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Mostre que temos $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ se e só se podemos escolher a, b, c e d em $\mathbb{R}$.

6* Sejam z_1 um ponto arbitrário em $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e z_2, z_3 e z_4 pontos distintos em $\overline{\mathbb{C}}$. Definimos o **produto cruzado**

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \ \text{ por } \ T(z_1),$$

com T a única transformação de Möbius mapeando z_2, z_3, z_4 em $1, 0, \infty$, em ordem.

(a) Suponha que z_2, z_3 e z_4 são números distintos. Ache uma expressão para $T(z)$.

(b) Encontre expressões para $T(z)$, nos casos : $z_2 = \infty$, $z_3 = \infty$ e $z_4 = \infty$.

(c) Suponha z_1, z_2, z_3 e z_4 números distintos. Mostre que

$$T(z_1) = [z_1, z_2, z_3, z_4] \ = \ \frac{\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}}{\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}} \ = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

(d) Seja φ uma transformação de Möbius. Mostre que

$$[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4], \text{ onde } \zeta_j = \varphi(z_j) \text{ e } j = 1, 2, 3, 4.$$

Sugestão. Analise separadamente: translações, inversões e multiplicações.

7. Compute os produtos cruzados:

(a) $[7 + i, 1, 0, \infty]$.

(b) $[2, 1 - i, 1, 1 + i]$.

(c) $[0, 1, i, -1]$.

(d) $[1 - i, \infty, 1 + i, 0]$.

8. Considere a transformação de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{(logo, } ad - bc \neq 0).$$

Encontre z_2, z_3 e z_4 [em termos de a, b, c e d] tais que

$$\varphi(z) = [z, z_2, z_3, z_4].$$

9* Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 distintos na esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(a) Prove que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência ou a uma mesma reta se e somente se seu produto cruzado é um número real.

(b) Suponha que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência. Mostre que

$$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| \ = \ |z_1 - z_2||z_3 - z_4| \ + \ |z_2 - z_3||z_4 - z_1|.$$

10* Seja Γ uma circunferência (generalizada) pelos pontos z_2, z_3 e z_4 em $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dois pontos z e z^*, ambos em $\mathbb{C}_\infty$, são ditos simétricos com relação a Γ se

$$[z^*, z_2, z_3, z_4] = \overline{[z, z_2, z_3, z_4]}.$$

Mostre que a definição de simetria independe dos pontos escolhidos em Γ. Isto é, se w_2, w_3, w_4 são outros três pontos em Γ, então a equação destacada acima é satisfeita se e somente se temos

$$[z^*, w_2, w_3, w_4] = \overline{[z, w_2, w_3, w_4]}.$$