MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 4 de Exercícios

Notação: Ω é um **aberto não vazio**. Os exercícios e resultados citados se referem a **funções analíticas ou a funções inteiras, ambas no sentido de Weierstrass**.

Entregue ao menos 15 dos exercícios (distribuídos em 7 grupos). Prove suas afirmações. Os exercícios com * são "obrigatórios". Escolha exercícios de cada um dos 7 grupos. Procure uma redação clara e não carregada em simbologia.

1* Considere em $\mathbb{R}^2$ a coleção de bolas abertas

$$\mathcal{C} = \{B(a_n; r_m) : a_n \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ e } r_m \in \mathbb{Q},\ \text{com } r_m > 0\}.$$

Mostre que $\mathcal{C}$ é enumerável e que todo aberto no plano é a reunião de bolas em $\mathcal{C}$.

2* Seja Z um subconjunto discreto de $\mathbb{R}^2$. Mostre que Z é enumerável.

3* Encontre os termos de ordem ≤ 3 na expansão em séries de potências das funções

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-2)},\ \text{em } z = 1, \qquad \text{e} \quad f(z) = \frac{z-2}{(z+3)(z+2)} \text{ em } z = 1.$$

4* Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica, com Ω convexo, tal que $f' \equiv 0$. Então, f é constante.

5* Seja Ω não vazio e aberto em $\mathbb{R}^2$. Verifique as afirmações abaixo.

(a) As componentes conexas de Ω são abertas.

(b) Se $\mathcal{C}$ é uma componente conexa de Ω, então $\partial C \subset \partial\Omega$.

==

6. Sejam f e g analíticas no conexo Ω. Se $fg \equiv 0$ então, ou $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.

7. Quais são as funções analíticas $f : B(0; 2) \to \mathbb{C}$ tais que

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^2},\ \text{para todo } n \in \mathbb{N}\,?$$

Existe uma função analítica $g : B(0; 2) \to \mathbb{C}$ tal que

$$g\Big(\frac{1}{n}\Big) = g\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^3}\,?$$

8. Suponha que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica e que Ω é conexo. Mostre que

(a) Se $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$, então f é constante.

(b) Se $|f|$ é constante, então f é constante.

9. Seja Ω conexo e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica, com $\mathrm{Re}(f) = u$ e $\mathrm{Im}(f) = v$. Seja $\beta : \Omega \to \mathbb{R}$. Mostre que $u + i\beta$ é analítica se e só se $v - \beta$ é constante.

==

==

10. Encontre o módulo máximo e o módulo mínimo de $f(z) = z^2 - z$ em $D(0;1)$.

11. Sejam f e g analíticas numa vizinhança de $D(0;R)$ e com $|f(z)| = |g(z)|$ se $|z| = R$. Mostre que se f e g não se anulam em $B(0;R)$, então existe $\omega \in S^1$ tal que
$$f = \omega g.$$

12. Seja f analítica em $B(0;1)$, contínua em $D(0;1)$ e com $f(S^1) \subset S^1$. Mostre que
$$f\Big(B(0;1)\Big) = B(0;1).$$

13. A desigualdade de Gutzmer-Parseval implica o princípio do módulo máximo.

==

14* **Teorema de Liouville (para funções analíticas)**. Se f é analítica no plano e é limitada, então f é constante.
Dicas. (1) Princípio do Módulo máximo ; (2) Hurwitz + Liouville (para inteiras).

15* A desigualdade de Gutzmer-Parseval implica o teorema de Liouville (para inteiras).

16 Demonstre o TFA a partir do Teorema de Liouville para funções analíticas.

17. **(Teorema de Liouville Estendido)** Sejam f inteira, $m \in \mathbb{N}$, $A \geq 0$ e $B \geq 0$ com
$$|f(z)| \ \leq \ A + B|z|^m\,, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$
Mostre que f é um polinômio de grau menor ou igual a m.
Sugestão. Desigualdade de Gutzmer-Parseval.

18. Seja f inteira e não constante. Prove que $f(\mathbb{C})$ é denso em $\mathbb{C}$.

19. Sejam ω_1 e ω_2 números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Seja $f = f(z)$ uma função inteira que satisfaz
$$f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$
Mostre que f é constante.

20. Sejam f e g funções inteiras e satisfazendo $|f(z)| \leq |g(z)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda g$.
Sugestão. Princípio dos zeros isolados e teorema de Liouville.

21. Seja f uma função inteira. Mostre que:
    (a) f é constante se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(f)(z) \leq M$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
    (b) f é um polinômio com $\mathrm{grau}(f) \leq n$ se existem $M \geq 0$, $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que
    $$|f(z)| \leq M|z|^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| > r.$$

==

==

22. Sejam Ω e O abertos conexos e não vazios do plano. Suponha que $f : O \to \mathbb{C}$ é analítica e que $g : \Omega \to O$ é analítica e não constante. Suponha ainda que $f(g(z)) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Mostre que f é identicamente nula.

23. Seja $f : B(a;r) \to \mathbb{C}$ analítica, onde $r > 0$, com $f(z) \neq 0$ para todo $z \in B(a;r)$. Fixemos $n \in \mathbb{N}^*$. Mostre que existe $\delta > 0$ e $g : B(a;\delta) \to \mathbb{C}$ analítica e tal que
$$f(z) = [g(z)]^n, \text{ para todo } z \in B(a;\delta).$$

24. Seja f analítica e injetora, em um aberto. Mostre que f' não se anula.

==

25* Seja $a \in B(0;1)$. Mostre que, a aplicação
$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$
é um automorfismo (analítico) de $B(0;1)$, com inversa ϕ_{-a}. Ainda mais, a aplicação ϕ_a é analítica em um aberto contendo $D(0;1)$ e satisfaz $\phi_a(S^1) = S^1$.

Valem as fórmulas
$$\phi_a(a) = 0, \quad \phi_a(0) = -a, \quad \phi_a'(0) = 1 - |a|^2 \ \text{ e } \ \phi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

26. (Blaschke) Seja f analítica em $B(0;1)$, contínua em $D(0;1)$ e com $f(S^1) \subset S^1$.

   (a) Mostre que f pode ser escrita na forma
   $$f(z) = \omega \prod_{j=1}^{n} \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}, \quad \text{para algum } \ \omega \in S^1.$$
   Dica. Considere os zeros de f em $B(0;1)$, contados com repetição se for o caso.

   (b) Mostre que se f é também inteira, então temos
   $$f(z) = \omega z^n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \text{ e para todo } z \in \mathbb{C}.$$

27. Seja f analítica em $B(0;2)$, limitada por 10 e tal que $f(1) = 0$. Encontre o possivelmente melhor majorante para $|f(\frac{1}{2})|$.

28. Seja $f : B(0;1) \to B(0;1)$ analítica. Seja $\alpha = f(a)$, onde $a \in B(0;1)$.

   (A) Prove
   $$|f'(a)| \leq \frac{1-|\alpha|^2}{1-|a|^2}.$$
   Sugestão. Considere a composta $\phi_\alpha \circ f \circ \phi_{-a}$ [v. Exercício 25].

   (B) Conclua que não existe uma aplicação analítica $f : B(0;1) \to B(0;1)$ tal que
   $$f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{4} \ \text{ e } \ f'\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{2}{3}.$$

==

29. Suponha que f é limitada e analítica em um aberto contendo $\{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ e também que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Mostre que f é constante.

30. Suponha que ρ, com $0 < \rho < \infty$, é o raio de convergência de $\sum a_n z^n$ e que em um ponto z_0 em $\partial B(0;\rho)$ a série converge absolutamente. Mostre então que
$$\sum a_n z^n \text{ converge absoluta e uniformemente em } D(0;\rho).$$