MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 2 DE EXERCÍCIOS

Demonstre as afirmações e resultados abaixo.

1. (Princípio do Módulo Máximo para Polinômios) *Seja $P(z)$ um polinômio não constante. Então, $|P|$ não tem máximo local.*

2. (Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios) *Seja $P(z)$ um polinômio não constante. Então, ou $|P|$ não tem mínimo local ou existe z_0 tal que $P(z_0) = 0$.*

3. O Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios implica o TFA.

4. Teorema da Aplicação Aberta para Polinômios (TAAP). *Dado P um polinômio não constante e O aberto em $\mathbb{C}$, o conjunto $P(O)$ é aberto em $\mathbb{C}$.*

   Dicas. (1) Sem aplicar o TFA e os princípios acima, adapte a prova do TFA e a famosa idéia de Carathéodory [*Complex Analysis*, 3rd ed., por Bak/Newman, p. 93, ou *Theory of Complex Functions* por R. Remmert, pp. 256-257].

   (2) Use o TFA e os princípios acima (se preciso) e a idéia de Carathéodory.

5. O TAAP implica: (a) o TFA, (b) o Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios e (c) o Princípio do Módulo Máximo para Polinômios.

6. Propriedade Poligonal do Valor Médio - Kakutani-Nagamo (1935) e Walsh (1936). Seja $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ um polinômio e ω uma primitiva das raízes $2n$-ésimas da unidade (logo, $\omega^n = -1$). Então temos

$$P(z_0) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} P(z_0 + z\omega^k), \text{ quaisquer que sejam } z_0 \text{ e } z \text{ em } \mathbb{C}.$$

   Dica. Considere $z_0 = 0$ e os polinômios $P_k(z) = P(z\omega^k)$, com $0 \le k \le 2n-1$.

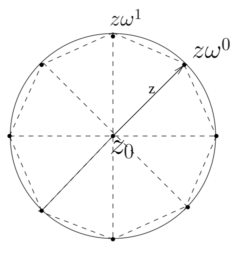

Figura 1: Propriedade Poligonal do Valor Médio, com $n = 4$

7. Aplique a propriedade poligonal do valor médio (e o TFA) e faça uma prova "bastante elementar" do princípio do módulo máximo para polinômios.

8. Mostre que a Desigualdade de Gutzmer-Parseval (para Polinômios) implica o Princípio do Módulo Máximo (para polinômios). [Leia os comentários em *Functions of One Complex Variable I*, second edition, Conway, pp. 79-80.]