MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 13 de Exercícios

Resolva os exercícios com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1. **Uma fórmula substituindo os métodos do anulador e dos coeficientes indeterminados.** Considere o operador diferencial linear

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 I,$$

na variável real t, coeficientes reais a_j para $0 \leq j \leq n$, e com I o operador identidade sobre o espaço $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ [o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ que são de classe C^∞]. Suponha $a_n \neq 0$. Considere o polinômio característico de tal operador,

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0, \text{ onde } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sejam $Q = Q(t)$ uma função em $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e um número complexo arbitrário γ.

(a) Mostre que

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)[Q(t)e^{\gamma t}] = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!}Q' + \frac{p(\gamma)}{0!}Q\right]e^{\gamma t}.$$

Sugestões. Regra de Leibniz para derivar um produto e um "Fubini discreto".

(b) Utilize a fórmula obtida em (a) para encontrar uma (basta uma) solução particular $x = x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ para cada uma das equações abaixo.

(b_1) $x''' - 4x'' + 5x' - 2x = t^2e^t$.

(b_2) $x''' - 4x'' + 6x' - 4x = t^3\ e^{2t}$.

(b_3) $x'' - 2x' + 2x = (2t^2 + t)e^t$.

(b_4) $x'' - 4x' + 5x = e^{2t}\text{cos}t$.

(c) Suponha que γ é uma raíz de ordem m de $p(\lambda) = 0$. Mostre que as m funções

$$x_1(t) = e^{\gamma t},\ x_2(t) = te^{\gamma t}, \ldots,\ x_m(t) = t^{m-1}e^{\gamma t}$$

são soluções da edo homogênea

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_3x''' + a_2x'' + a_1x' + a_0x = 0.$$

Sugestão. Utilize a fórmula em (a).

2. Encontre as singularidades na esfera de Riemann $S^2 \equiv \mathbb{C}_\infty$ e classifique-as.

(a) $\dfrac{e^z}{1+z^2}$ $\quad(b)$ $\dfrac{z^2+1}{e^z}$ $\quad(c)$ $\dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$ $\quad(d)$ $\sin\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$. $\quad(e)$ $\dfrac{z}{e^{\frac{1}{z}}-1}$.

3. Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 distintos e em $\mathbb{C}$. Mostre que

   (a) $$\arg[z_1, z_2, z_3, z_4] = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

   (b) Prove (em detalhes) que os ângulos em z_1 e z_2 na figura abaixo são iguais precisamente quando os quatro pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 se encontram em uma circunferência (ou, abusando da linguagem, em um círculo).

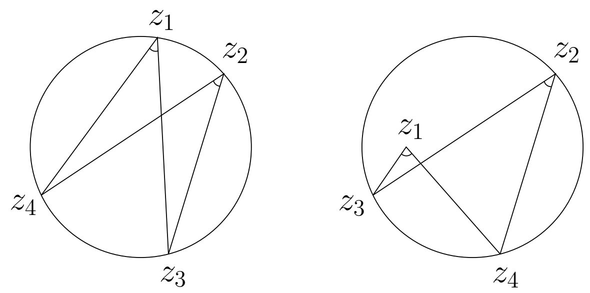

Figura 1: O produto cruzado e circunferências

   Sugestão. Mostre que

$$\arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \in \pi\mathbb{Z}$$

   se e somente se z_1, z_2, z_3 e z_4 determinam uma circunferência.

4. Explicite os possíveis desenvolvimentos em séries de Laurent do tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

   que a função
$$f(z) = \frac{1}{9 - z^2} + \frac{1}{5 - z}$$
   admite. Determine e esboce as respectivas regiões de convergência.

5. Dado $X \subset \mathbb{C}$, definimos a **fronteira estendida** de X por

$$\partial_\infty X = X \text{ se } X \text{ é limitado e } \partial_\infty X = X \cup \{\infty\} \text{ se } X \text{ é ilimitado.}$$

   Sejam Ω um aberto não vazio e conexo, uma função f analítica em Ω e uma constante M tal que para todo valor $z \in \partial_\infty \Omega$ e sequência $(z_n) \subset \Omega$ satisfazendo $\lim z_n = z$ temos

$$\limsup |f(z_n)| \leq M \qquad [\text{defina tal } \limsup].$$

   Nestas condições, mostre que

$$|f(z)| \leq M, \text{ para todo } z \in \Omega.$$

6. Roteiro para uma prova trivial de que dadas duas séries complexas

$$\sum^{+\infty} a_n = \alpha \quad \text{e} \quad \sum^{+\infty} b_n = \beta, \text{ absolutamente convergentes,}$$

então o produto de Cauchy, $\sum^{+\infty} c_p$, com $c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m$, satisfaz $\sum^{+\infty} c_p = \alpha\beta$.

   (a) O caso $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, para todo $n \geq 0$. Sejam s_N e t_N as respectivas N-ésimas somas parciais das séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \beta$. Verifique as relações:

$$s_N t_N \;=\; (a_0 + \cdots + a_N)(b_0 + \cdots + b_N) \;\leq\; c_0 + c_1 + \cdots + c_{2N} \;\leq\; s_{2N} t_{2N}.$$

   Conclua este caso.

   (b) O caso a_n e b_n reais. Sejam (p_n) e (q_n) as respectivas sequências das partes positivas e negativas de (a_n) e, analogamente, (P_m) e (Q_m) as sequências das partes positivas e negativas de (b_m). Desenvolva trivialmente o cômputo

$$\Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} b_m\Big) \;=\; \Big(\sum^{+\infty} p_n - \sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m - \sum^{+\infty} Q_m\Big) = \cdots,$$

   e utilize o item (a) para concluir este caso.

   (c) O caso de duas séries complexas $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} w_m$ absolutamente convergentes. Use as notações $z_n = a_n + ib_n$ e $w_m = c_m + id_m$, com a_n, b_n, c_m, e d_m em $\mathbb{R}$.

      (1) Pelas desigualdades $\max(|a_n|, |b_n) \leq |z_n|$ e $\max(|c_m|, |d_m|) \leq |w_m|$, as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{m=0}^{+\infty} b_n$, $\sum_{m=0}^{+\infty} c_m$ e $\sum_{m=0}^{+\infty} d_m$ convergem absolutamente.

      (2) Conclua este caso, completando o desenvolvimento [e utilizando (b)]

$$\Big(\sum^{+\infty} z_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} w_m\Big) \;= \Big(\sum^{+\infty} a_n + i\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m + i\sum^{+\infty} d_m\Big)\cdots.$$

7. Suponha que a bola $B = B(0;1)$ é o disco de convergência da série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Um ponto $\omega \in \partial B = S^1$ é dito um ponto singular de f se não existe uma função holomorfa g definida em uma vizinhança W de ω e satisfazendo

$$g|_{W\cap B} = f|_{W\cap B}.$$

   (a) Mostre que uma tal série de potências f possui ao menos um ponto singular.

   (b) Mostre que o conjunto dos pontos singulares de f é fechado.

Se todo ω em S^1 for um ponto singular de f, dizemos que S^1 é o bordo natural de f.

   (c) Mostre que o S^1 é o bordo natural de

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}.$$

8. Mostre as afirmações abaixo, todas sobre a série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ com raio de convergência } \rho = 1.$$

   (a) Suponha $a_n \geq 0$ para todo n. Então, $z = 1$ é um ponto singular de f.

   (b) Se $\omega \in S^1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$ converge absolutamente, então a série $\sum a_n z^n$ converge uniforme e absolutamente em $D(0;1)$.

9. Mostre as afirmações abaixo, todas sobre a série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

   (a) A bola $B(0;1)$ é o disco de convergência de tal série.

   (b) O S^1 é o bordo natural de f.
   Sugestão. Tome pontos da forma

$$z_r = re^{\frac{2\pi i p}{q}}, \text{ com } p \text{ e } q \text{ em } \mathbb{N}^*, \quad \text{e conclua que } \lim_{r \to 1^-} |f(z_r)| = \infty.$$

10. Mostre as afirmações abaixo, todas sobre a série de potências

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

   (a) A bola $B(0;1)$ é o disco de convergência de tal série.

   (b) $z = 1$ é ponto singular de f (embora a série de potências converge em $z = 1$).

11. Mostre as afirmações abaixo, sobre a série de potências

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$$

   (a) A bola $B(0;1)$ é o disco de convergência de tal série.

   (b) O S^1 é o bordo natural de f.

   (c) A função f é contínua no disco (fechado) $D(0;1)$.

12. Considere o logaritmo principal

$$\text{Log} : \mathbb{C} \smallsetminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi).$$

   Determine o desenvolvimento de Taylor de $\text{Log}(z)$ em torno de $z_0 = 1 + i$. Ache o disco de convergência da série encontrada.

13. Expresse o desenvolvimento em série de McLaurin (a série de Taylor na origem) das duas funções abaixo, com a determinação que toma o valor 1 na origem $z = 0$.

   (a) $f(z) = (1 + z)^{1/2}$.

   (b) $f(z) = (1 + z)^{3/2}$.

14. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, com campo associado em C^∞. Ponhamos $z = x + iy$ e $f = u + iv$.

   (a) Mostre que f é derivável no ponto z_0 se e somente se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

   Mostre que nestes casos temos $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

Roteiro (introdução ao operador $\overline{\partial}$). Para o que segue, acrescentamos as notações

$$(6.1) \qquad x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad , \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \quad \text{e}$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right).$$

   (a) Utilize "ingenuamente" as notações em (6.1) e a regra da cadeia e encontre

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

   (b) Defina os operadores [vide comentários em Ahlfors, 3rd edition, p. 27]

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

   Mostre que f é derivável no ponto z_0 se e somente se

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \overline{\mathbf{z}}}(\mathbf{z_0}) = \mathbf{0}.$$

   Mostre que se f é derivável em z_0, então

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

15. Seja $c > 0$. Prove que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ir}^{c+ir} \frac{a^z}{z^2}\, dz = \begin{cases} \log a, & \text{se } a > 1, \\ 0, & \text{se } 0 < a < 1, \end{cases}$$

onde $a^z = e^{z \log a}$ para um arbitrário $z \in \mathbb{C}$ e com $\log a \in \mathbb{R}$.

16. Calcule

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{\cosh z} dz, \quad \text{onde} \quad \Gamma(\theta) = 5e^{i\theta} \text{ e } \theta \in [0, 2\pi].$$

17. **Um Teorema da Função Implícita Complexo.** Consideremos uma função

$$f = f(z,w) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Indiquemos $z = x + iy$, com x e y em $\mathbb{R}$. Indiquemos $w = u + iv$, com u e v em $\mathbb{R}$. Denotemos por $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial associado a f e definido por

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = \big(f_1(x,y,u,v), f_2(x,y,u,v)\big), \\ \text{com} \\ f_1(x,y,u,v) = \mathrm{Re}(f)(z,w) \text{ e } f_2(x,y,u,v) = \mathrm{Im}(f)(z,w). \end{cases}$$

Suponha que o campo F pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ e que f é holomorfa em cada variável. Consideremos um ponto (z_0, w_0) satisfazendo

$$f(z_0,w_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0.$$

Mostre a afirmações a seguir.

(a) Existe uma bola não degenerada $B(z_0;r)$ e um aberto W contendo w_0 tais que: para todo ponto $z \in B(z_0;r)$, existe um único ponto $\varphi(z) \in W$ satisfazendo

$$f(z,\varphi(z)) = 0 \quad [\text{logo, } \varphi(z_0) = w_0].$$

Dica. Utilize o Teorema da Função Implícita (real) para o campo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e as equações de Cauchy-Riemann. Vide Teorema 5.11.

(b) Mostre que $\varphi : B(z_0;r) \to W$ é holomorfa.
Dicas. O Teorema da Função Implícita (real) garante que o campo Φ, associado a φ, é de classe C^∞. Use o Teorema 5.11 e, talvez, o operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ [Exercício 6].

18. Calcule as integrais

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx, \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

$$(b) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

19. Desenvolva em série de Laurent, indicando o domínio de convergência:

(a) $(\sin z)\left(\sin \frac{1}{z}\right)$ numa vizinhança da origem.

(b) $\frac{1}{z(1-z)}$ numa vizinhança de $z = 1$.

20. Calcule as integrais

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx.$$

$$(b) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha + \beta \sin t}, \quad \text{onde } \alpha > |\beta|, \text{ com } \alpha \text{ e } \beta \text{ ambos em } \mathbb{R}.$$

21. Dê exemplos de funções tendo somente as seguintes singularidades em $\mathbb{C}_\infty$:

    (a) Polo duplo em $z = 0$, com parte principal $\frac{a-2}{z^2}$, e um polo simples no infinito.

    (b) Polos simples em cada ponto ω^k, onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ [fixado n] e $k = 0, 1 \ldots, n-1$.

22. Seja Ω um subconjunto aberto e simplesmento conexo de $\mathbb{C}$. Seja f holomorfa em Ω. Mostre que existe uma sequência de polinômios (P_n) tal que $P_n \to f$ uniformemente sobre os subconjuntos compactos de Ω.

23. Diga se existe ou não uma sequência (P_n) de polinômios tal que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathrm{Re}(z) > 0, \\ 0, & \text{se } \mathrm{Re}(z) = 0, \\ -1, & \text{se } \mathrm{Re}(z) < 0. \end{cases}$$

    Sugestão. Para cada $n \geq 1$, considere o compacto

$$K_n = K_n^+ \cup K_n^0 \cup K_n^-,$$

    onde K_n^+ é o retângulo fechado com vértices

$$-n + \frac{i}{n},\ n + \frac{i}{n},\ n + in,\ -n + in,$$

    K_n^0 é o segmento $[-n, n] \subset \mathbb{R}$, e K_n^- é o retângulo fechado com vértices

$$-n - in,\ n - in,\ n - \frac{i}{n} \text{ e } -n - \frac{i}{n}.$$

    Defina uma sequência de funções $f_n : K_n \to \mathbb{C}$ adequada e use o teorema de Runge.

24. Mostre que existe uma sequência de polinômios (P_n) tal que

$$P_n(0) = 1, \text{ para todo } n, \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} P_n(z) = 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{C}^*.$$

    Sugestão. Considere uma sequência de compactos (K_n) tal que

$$K_n^c = \mathbb{C} \setminus K_n \text{ é conexo, com } K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1}) \text{ e } \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = \mathbb{C}^*.$$

25. Mostre que existe uma sequência de polinômios (P_n) tal que

$$P_n'(0) = 1 \ \forall\ n, \text{ embora ocorram: } \lim_{n\to\infty} P_n'(z) = 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{C}^* \text{ e } \lim_{n\to\infty} P_n(z) = 0\ \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

    Sugestão. Veja o exercício anterior [24] e utilize estimativas de Cauchy.

26. Seja $M > 0$. Mostre que não existe uma sequência de polinômios (P_n) tal que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z \neq 0, \\ 1, & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

e, ainda, satisfazendo $|P_n(z)| \leq M$ para arbitrários $z \in D(0;1)$ e $n \geq 1$.

27. Comparando coeficientes no desenvolvimento da série de Laurent para $\cot(\pi z)$ e de sua expressão como uma soma em frações parciais,

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

encontre os valores de [atenção, justifique todos os passos necessários]

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}$.

Dica. Talvez seja útil a expansão em frações parciais

$$\pi^2 \operatorname{cossec}^2(\pi z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

28. Encontre uma forma fechada para

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^3 - n^3}.$$

29. Utiliza a fórmula (provada nas notas)

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{-m}^{+m} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

para encontrar o desenvolvimento em frações parciais da função

$$\frac{1}{\cos(\pi z)}.$$

Com a fórmula obtida, mostre então que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

30. Qual o valor de

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2 + a^2}\ ?$$

31. Calcule

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 + 4\cos\theta} d\theta$