MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 12 de Exercícios

Resolva os exercícios com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1. Dado um conjunto $X \subset \mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$, dizemos que f é analítica em X se existe um aberto contendo X no qual f é analítica. Prove o resultado abaixo.

   [**Proposição Anti-Cálculo (P. Erdös)**]: *Seja $f : \overline{D}(0; R) \to \mathbb{C}$ não constante e analítica. Seja α, com $|\alpha| = R$, um ponto de máximo ou de mínimo de $|f|$.*

   (a) Se $|\alpha|$ é ponto de máximo então $f'(\alpha) \neq 0$.

   (b) Se α é ponto de mínimo então $f(\alpha) = 0$ ou $f'(\alpha) \neq 0$.

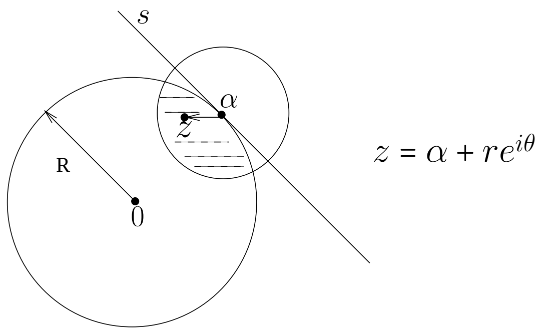

Figura 1: Proposição Anti-Cálculo

2. Seja $z = x + iy$. Consideremos as funções trigonométricas hiperbólicas

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

   (a) Expresse $\cosh z$ e $\sinh z$ em termos de $\cos(iz)$ e $\sin(iz)$.

   (b) Analogamente às funções trigonométricas usuais, derive fórmulas aditivas para

$$\cosh(2z) \quad \text{e} \quad \sinh(2z).$$

   (c) Mostre que

$$(c1) \quad |\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x = \frac{\cosh 2y + \cos 2x}{2}.$$

$$(c2) \quad |\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x = \frac{\cosh 2y - \cos 2x}{2}.$$

3. Mostre que para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\frac{z^j}{j!}$$

e daí que vale o limite (com convergência uniforme sobre os compactos)

$$e^z = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

4. Mostre que

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \infty.$$

5. Utilizando um contorno de formato "buraco de fechadura" (esboce o contorno em cada caso) e um ramo da função logaritmo $\log(z)$, mostre que

$$(a)\qquad \int_0^{\infty}\frac{x^a}{(1+x)^2}dx = \frac{\pi a}{(1+x)^2},\quad -1 < a < 1.$$

$$(b)\qquad \int_0^{\infty}\frac{x^{-a}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)},\qquad 0 < a < 1.$$

6. Calcule

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx.$$

7. (a) Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $|f(z)| \to \infty$ se $|z| \to \infty$. Mostre que f é um polinômio.
   (b) Seja f meromorfa na esfera complexa. Mostre que f é racional.

8. As únicas singularidades de uma função holomorfa f ocorrem no polo simples $z = -1$ e no polo duplo $z = 2$, com resíduos 1 e 2 respectivamente.

   Sabendo ainda que

$$f(0) = \frac{7}{4} \quad \text{e} \quad f(1) = \frac{5}{2},$$

   determine a função f e desenvolva-a em série de Laurent na coroa

$$1 < |z| < 2.$$

9. **Transformada de Fourier.** Mostre que

$$(a)\qquad e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i x\xi}dx,\ \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

$$(b)\qquad e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}e^{2\pi i x\xi}dx,\ \text{para todo } \xi \in \mathbb{C}.$$

   Obs. Por (b), a transformada de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$ é

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}.$$

10. Seja f meromorfa na esfera complexa e satisfazendo as condições

    (a) $f(0) = 0$, $f(-1) = 2$ e $f(3) = 3$.

    (b) f tem um polo simples em $z = 1$ com resíduo 1.

    (c) f tem um polo triplo em $z = 2$ com resíduo 2.

    Determine f e calcule seu desenvolvimento de Laurent na coroa

$$\{z : 1 < |z| < 2\}.$$

11. **(Representação).** Seja f holomorfa em $B(0;\rho)$. Suponhamos $0 < r < R < \rho$.

    (a) Seja $z \in B(0;R)$. Mostre que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\right)d\theta.$$

    (b) Mostre que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\theta}+r}{Re^{i\theta}-r}\right) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}.$$

    Sugestões (independentes).

    ☼ Vide Capítulo 10, seção 10.8.

    ☼ Use a fórmula integral de Cauchy nos pontos z e z^*, onde z^* é o simétrico de z em relação à circunferência $S(0;R)$.

12. (**O reverso do teorema de Runge**). Seja K um compacto cujo complementar não é conexo. Mostre que existe uma função f holomorfa em uma vizinhança de K cuja restrição $f|_K$ não pode ser aproximada uniformemente por polinômios.
    Dica. ☼ Considere um ponto z_0 em uma componente limitada de K^c, e a função

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}.$$

    Se $f|_K$ é aproximável por polinômios, mostre que existe um polinômio p tal que

$$\Big|(z-z_0)p(z) - 1\Big| < 1.$$

    Utilize o princípio do módulo máximo para mostrar que tal desigualdade continua a valer para todo z na componente (conexa maximal) de K^c que contém o ponto z_0.

13. (a) Determine a forma geral de uma função analítica em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ que tenha um polo de ordem n em $z = 0$ e um polo de ordem m no infinito.

    (b) Determine os resíduos da função

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2}\cos\left(\frac{2\pi z-2}{2z}\right)$$

    nos pontos $z = 2$, no ponto ∞ e em $z = 0$.

14. Explicite os desenvolvimentos em séries de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}$$

nas regiões (esboce as regiões)

(a) $|z| < 2$ (b) $2 < |z| < 3$ (c) $|z+2| > 1$

(d) $|z| > 3$ (e) $0 < |z+2| < 1$ (f) $0 < |z+3| < 1.$

15. Seja $f(z,t)$ definida em $\Omega \times [0,1]$, onde Ω é um aberto em $\mathbb{C}$. Suponha que f satisfaz

(1) $f(z,t)$ é holomorfa na variável z, para cada t em $[0,1]$.

(2) f é contínua em $\Omega \times [0,1]$.

Considere então as somas de Riemann

$$s_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(z, \frac{k}{n}\right).$$

Verifique que

(a) s_n é holomorfa em Ω.

(b) s_n converge uniformemente a

$$F(z) = \int_0^1 f(z,t)dt$$

em cada disco compacto $D \subset \Omega$.
Dica. Particione $[0,1]$ em n sub-intervalos de medida $1/n$ e então estime

$$|s_n(z) - F(z)|,$$

utilizando a continuidade uniforme de $f(z,t)$ no compacto $D \times [0,1]$.

(c) Conclua que F é holomorfa em Ω.