MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 11 de Exercícios

Resolva os exercícios com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1, 2, 3, e 4. Resolva (se a questão não constava em sua prova), ao menos 4 entre as questões, da segunda prova, $Q6$, $Q8^*$, $Q15^*$, $Q16^*$, $Q17$, $Q18$, $Q19^*$ e $Q20$. As questões marcadas com $\star$ são particularmente recomendáveis.

5. (a) Determine a expressão para a transformação de Möbius $w = w(z)$ que mapeia ordenadamente $1, 3$ e 9 em $16, 30$ e 24.

   (b) Determine a posição $P = w(\infty)$ e o instante T tal que $w(T) = \infty$.

   (c) Considere uma partícula que se movimenta sobre a reta e que cuja posição no instante t é dada por
   $$w(t), \quad \text{onde } t \in (-\infty, +\infty).$$
   Esboce a trajetória da partícula.
   Sugestão. Divida a trajetória em trechos e use cores diferentes para cada trecho.

   (d) Esboce a correspondente trajetória na esfera de Riemann S^2.

6. Compute $\int_\gamma f(z)\,dz$ onde f e γ são dados.

   (a) $f(z) = z\overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (b) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (c) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (e) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (f) $f(z) = \pi e^{\pi\overline{z}}$ e γ é o quadrado de vértices $0, 1, 1+i$ e i, positivamente orientado.

   (g) $f(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi, r > 0$.

   (h) $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi, r > 0, n \ge 2$.

   (i) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

   (j) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$ e $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

   (k) $f(z) = \dfrac{\log z}{z^n}$ e $\gamma(t) = 1 + \dfrac{1}{4}e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

   (l) $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{z^n}$ e $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi, n \ge 1$.

   (m) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

7. Ache os polos da função
$$f(z) = \frac{1}{z^8 + 1}.$$
Considere uma bola centrada em um destes polos e encontre o desenvolvimento de Laurent nesta bola (exceto no centro).

8. (a) Ache o desenvolvimento de Laurent de
$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad \text{em} \quad \Omega = \{z : 0 < |z - i| < 2\}.$$
   (b) Calcule
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 1}, \quad \text{onde } \gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi.$$

9. Desenvolva
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$
em série de Laurent para
$$(a)\ 1 < |z| < 3 \qquad (b)\ |z| > 3 \qquad (c)\ 0 < |z+1| < 2.$$

10. Calcule

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6}.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$

11. Calcule

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2}\, dx,\ a > 0.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^4 + 4a^4}\, dx,\ a > 0.$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x - 1}\, dx.$

12. Determine e classifique as singularidades da função
$$f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$
Mostre que se $0 < |z| < 2\pi$, então a função tem o desenvolvimento de Laurent
$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + a_0 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$
e determine então os valores a_0 e a_2.