MAT0236 - Funções Diferenciáveis e Séries - IMEUSP

Período: Primeiro Semestre de 2022

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

8ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1ª PARTE

1. Encontre o raio de convergência, o disco de convergência e uma expressão (uma fórmula fechada) para as seguintes séries de potências.

   (a) $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$ (b) $B(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}.$

   (c) $C(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nz^n.$ (d) $D(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2}.$

   (e) $E(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)z^n.$ (f) $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n.$

   (g) $G(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)z^{n-3}.$ (h) $H(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(n-2)z^n.$

   (j) $J(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 z^n.$

2. Encontre o raio de convergência, e o disco de convergência, das seguintes séries de potências

   $(a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 z^n$ $(b)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} z^n.$

   $(c)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$ $(d)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n.$

3. (a) Escreva as fórmulas para as funções hiperbólicas complexas $\cosh z$ e $\sinh z$, em termos da função exponencial complexa.

   (b) Escreva as séries de potências para as funções $\cosh z$ e $\sinh z$.

   (c) Derive as séries de potências para $\cosh z$ e $\sinh z$.

   (d) Mostre que $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, para todo z complexo.

==

2ª PARTE —- DIVISÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS.

[**Vide** `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DivisionPowerSeries.pdf`]

4. Escrevendo $\sinh z$ e $\cosh z$ em séries de potências, encontre os três primeiros termos não nulos da série de potências para a tangente hiperbólica
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}.$$

5. Encontre os três primeiros termos não nulos para o desenvolvimento em séries de potências, em torno da origem, das funções abaixo.

   (a) $\frac{e^z}{1+z^2}$.

   (b) $\frac{\cos z}{e^z}$.

   (c) $\frac{e^z}{\cos z}$.

   (d) $\frac{\ln(1+z)}{1+z}$.

   (e) $\frac{\ln(1+z)}{e^z}$.

   (f) $\frac{\ln(1+z)}{\cos z}$.

   (g) $\frac{\sin z}{1+z^2}$.

   (h) $\frac{\cos z}{1+z^2}$.

   (i) $\frac{\arcsin z}{1+z^2}$.

   (j) $\frac{\sinh z}{1+z^4}$.

   (k) $\frac{\cosh z}{1+z^4}$.

   (l) $\frac{e^{z^2}}{1+z}$.

   (m) $\frac{\sin z^2}{1+z}$.

   (n) $\frac{\arctan z}{1+z}$.

   (o) $\frac{\arctan z}{1+z^3}$.

   (p) $\frac{\arcsin z}{1+z}$.

6. Ache os primeiros cinco termos não nulos da série de potências para a divisão
$$\frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \cdots}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots}.$$

7. Ache os primeiros três termos não nulos da série de potências para a divisão
$$\frac{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \cdots}{1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots}.$$

8. Ache os primeiros cinco termos não nulos da série de potências para a divisão
$$\frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \cdots}{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + \cdots}.$$

9. Dê os primeiros quatro termos não nulos da série de potências para a divisão
$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots}{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots}.$$

10. Dê os primeiros quatro termos não nulos da série de potências para a divisão
$$\frac{x + 2x^4 + 3x^9 + 4x^{16} + 5x^{25} + 6x^{36} + \cdots}{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots}.$$

3ª PARTE - DIVISÃO EUCLIDEANA X DIVISÃO LONGA

[Vide
https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DivisionPowerSeriesByPolynomial.pdf**]**

11. Efetue a tradicional divisão polinomial (divisão polinomial euclideana) do polinômio $p(x)$ pelo polinômio $q(x)$.

    (a) $p(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ e $q(x) = x + 1$.

    (b) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ e $q(x) = x - 1$.

    (c) $p(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$ e $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

12. Efetue a divisão como séries de potências (divisão longa) de $p(x)$ por $q(x)$.

    (a) $p(x) = 24 + 50x + 35x^2 + 10x^3 + x^4$ e $q(x) = 1 + x$.

    (b) $p(x) = -2 - x + 2x^2 + x^3$ e $q(x) = -1 + x$.

    (c) $p(x) = -18 - 27x - 7x^2 + 3x^3 + x^4$ e $q(x) = 2 + 3x + x^2$.

    Compare os exercícios 11 **e** 12**.**

13. Efetue a divisão polinomial euclideana e escreva $N(z) = Q(z)D(z) + R(z)$.

    (a) $N(z) = z^2 + 1$ e $D(z) = z + 1$.

    (b) $N(z) = z^3 + z^2 + 2$ e $D(z) = z + 1$.

14. Efetue a divisão longa de $N(z)$ por $D(z)$.

    (a) $N(z) = 1 + z^2$ e $D(z) = 1 + z$.

    (b) $N(z) = 2 + z^2 + z^3$ e $D(z) = 1 + z$.

    Compare os exercícios 13 **e** 14**.**