MAT0236 - Funções Diferenciáveis e Séries - IMEUSP

Período: Primeiro Semestre de 2022

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

7ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1ª Parte (Capítulos 6 e 7 de "Cálculo - Vol. 4, 5ª ed., H. Guidorizzi").

1. Determine o domínio de convergência da série e esboce o gráfico de f.

(a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$ (b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$

2. Determine o limite $f(x) = \lim f_n(x)$, onde $x \in X$, e mostre que a sequência (f_n) não converge uniformemente a f, nos casos abaixo.

(a) $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

(b) $\frac{n}{x+n}$, $X = [0, +\infty)$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = n$.

(c) $f_n(x) = \left(\frac{\text{sen}x}{x}\right)^n$, se $x \neq 0$ e $f_n(0) = 1$, onde $X = \mathbb{R}$.

(d) $f_n(x) = (1 - 2nx^2)e^{-nx^2}$, com $X = \mathbb{R}$.

(e) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, com $X = \mathbb{R}$.

(f) $$X = [0,1] \text{ e } f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - x\,, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

3. Mostre a convergência uniforme de (f_n) em $X \subset \mathbb{R}$ nos casos abaixo.

(a) $f_n(x) = \frac{\text{sen}nx}{n^7}$ e $X = \mathbb{R}$. (b) $f_n(x) = e^{-nx}\sin x$ e $X = [0, +\infty)$.

(c) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ e $X = \mathbb{R}$.

4. Determine o limite $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, onde $x \in [0,1]$, e mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big)dx\,, \quad \text{supondo}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n}\,, \\ n^2(\frac{1}{n} - x)\,, & \frac{1}{2^n n} \leq x \leq \frac{1}{n}\,, \\ 0\,, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

5. Sendo $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$, mostre que f_n converge simplesmente a f (determine f) mas não converge uniformemente. Ainda assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx \ .$$

6. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(a) Determine o domínio de convergência da sequência (f_n). Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

(b) A convergência da sequência (f_n) à função f é uniforme sobre $\mathbb{R}$? E sobre o intervalo $[r,+\infty), r > 0$?

7. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(a) Determine o domínio de convergência. Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

(b) A convergência é uniforme sobre $[0,1]$? Justifique.

(d) Mostre que $\int_0^1 [\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)]\, dx \ \neq \ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

8. Mostre que a série dada converge uniformemente no intervalo dado.

(a) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ em $[-r,r], r > 0$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, em $[-r,r], 0 < r < 1$.

9. Mostre que a função dada é contínua.

(a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx^3}{n^4}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nx}}$, $x \in [1,+\infty)$.

10. Sejam $(a_n)_{n\geq0}$ e $(b_n)_{n\geq1}$ duas sequências em $\mathbb{R}$. Suponhamos que

$$F(x) = \frac{a_0}{2} \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty} [\, a_n \cos nx \ + \ b_n \mathrm{sen}\, nx\,], \quad x \in [-\pi,+\pi],$$

a convergência sendo uniforme. Mostre que:

(i) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cos nx\, dx\, , \forall\, n \geq 0$.

(ii) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \mathrm{sen}\, nx\, dx\, , \forall\, n \geq 1$,

A série é acima é a série de Fourier de F e os números $a_n, n \geq 0$, e $b_n, n \geq 1$, são os coeficientes de Fourier de F.

$2^{\underline{a}}$ Parte – Exercícios sobre convergências absoluta, condicional, somas (não ordenadas) e trigonometria.

1. Suponha que a série $\sum^{+\infty} a_n$ converge absolutamente. Mostre que também convergem absolutamente as séries

   $(a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}\,,\ \text{se } a_n \neq -1\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad (c)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n^2}{1+a_n^2}\ .$

2. Mostre que converge condicionalmente a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + i\frac{1}{n^2}\right]\ .$$

3. Compute, para $|z|<1$, a série de potências $1+2z+3z^2+4z^3+\cdots$. [Sugestão: compute a soma da sequência de termos positivos $\big((n+1)r^n\big)_{\mathbb{N}}$, $r \geq 0$, dispondo os termos da sequência em uma tabela triangular infinita.]

4. Seja $a_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{mn}$, com $m,n \in \{1,2,...\}$. Mostre que não existe a soma
$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn}\ .$$
   Porém, existem o limite e as séries iteradas:
$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_{mn}\,, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\ .$$

5. Verifique, de duas formas, a identidade $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, onde $z \in \mathbb{C}$.

   Dicas: (1) Utilize as expressões em séries para $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$.

   (2) Utilize as fórmulas exponenciais para $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$;

6. Verifique a fórmula, onde N é ímpar e $z,w \in \mathbb{C}$.
$$(z+w)^N = \sum_{2n+1+2m=N}\left[\binom{N}{2m} z^{2n+1}w^{2m} + \binom{N}{2n+1} z^{2m}w^{2n+1}\right]\ .$$
   Dicas: (1) Teste $N=5$. (2) Troque N ímpar por $2N+1$, se preferir.

7. Verifique de duas formas a identidade
$$\operatorname{sen} z\cos w + \cos z \operatorname{sen} w = \operatorname{sen}(z+w),\ \text{ onde } z\in\mathbb{C} \text{ e } w \in \mathbb{C}.$$
   Dicas: (1) Use expressões em séries para as funções envolvidas.

   Use também o Exercício 6.

   (2) Use as fórmulas exponenciais para as funções envolvidas.